Fizika

Dr. Beszeda Imre

2008

„t a r t a l o m j e gy z é k ”

a fizika tárgya, helye a term.tudományok körében, a fizikai megismerés folyamata és módszerei, a fizikai mennyiségek jellege, mértékrendszerek, alapmennyiségek

mechanika

kinematika
dinamika, alapvető fizikai kölcsönhatások
munka, energia
merev testek, deformálható testek
rezgések, hullámok

hőtani alapok

gázok állapotváltozásai, termodinamika főtételei, …

elektromosságtan és mágnesség

nyugvó és mozgó elektromos töltés, egyen- és váltakozó áram, ellenállás, kondenzátorok, RLC körök, …

optika

fényterjedés, geometriai optika, fizikai optika,…

radioaktivitás, atomenergia, …

+ gyakorlati alkalmazásaik

kötelező irodalom :

1. Dezső Gergely: Fizika (2003, főiskolai jegyzet)
2. Dezső Gergely: Fizika példatár és feladatgyűjtemény (2007, főiskolai jegyzet)

ajánlott irodalom :

1. Holics L.: Fizika I-II.
2. Hadházy T., Szabó T., Szabó Á.: A fizika alapjai
3. Erlichné, Hadházy, Hargitainé, Kiss, Nyilas, Sinkovicsné, Vallner, Iszály: Természettudományi alapismeretek
4. középiskolás fizika tankönyvek
5. Öveges könyvek
6. Tasnádi-Bérces-Skrapits-Litz: Mechanika I-II + Hőtan

tantárgyfelelős: Dr. Dezső Gergely, Műszaki Alapozó és Gépgyártástechnológia Tanszék

előadás: heti 1 óra → 2 hetente 2 óra, Dr. Beszeda I.
gyakorlat: heti 2 óra, Dr. Beszeda Imre, Dr. Varga Klára, Erlichné Dr. Bogdán Katalin, Tarján Péter

2 db. ZH: a 44. és 50 naptári héten
félév elfogadható mindkét ZH megírása esetén
vizsgára bocsátás feltétele: TVSZ 8.§

„Részvétel a foglalkozásokon

Az előadások a képzés szerves részét képezik, így a Főiskola a hallgatóktól elvárja a részvételt az előadásokon.

A gyakorlati foglalkozásokon, összefüggő gyakorlatokon a részvétel kötelező. A félévi hiányzás megengedhető mértéke a tantárgy heti kontakt óraszámának háromszorosa."

össz. 100 pont = 25 + 25 + 50 (= 2 Zh + vizsga)
+ plussz pontok !

vizsgán: minimumkérdések → A és B tétel

Pontszám:	86 - 100	(5) jeles
	76 - 85	(4) jó
	61 - 75	(3) közepes
	51 - 60	(2) elégséges
	51 pont alatt	(1) elégtelen

ha a 2 ZH-n min. 45 pont → jeles megajánlása
40 pont jó

a fizika helye a természet-tudományok körében

élettelen természet vizsgálata

cél: a természeti jelenségek tanulmányozása,
objektív törvények megismerése, ezek
érvényességi határainak vizsgálata, és
a törvények gyakorlati alkalmazása

de : kémia, földtudomány, csillagászat is, valamint interdiszciplináris alkalmazások (pl. kristályok vizsgálata)

a fizikai megismerés folyamata

konkrét ⇒ általános
induktív

általános ⇒ konkrét
deduktív

megfigyelés = { spontán **tapasztalás** (alma leesik a fáról)
tudatos **kísérletezés** ⟶ **mérés**

- *a fizikai jelenségek vizsgálata mesterséges körülmények között*
- kezdeti feltételek
- egyszerre csak egy fizikai mennyiséget változtatunk miközben egy másik változását regisztráljuk

(ejtegetős kísérleteket végzünk)

megfigyelés → **következtetés** :
a Föld vonzza a többi testet

modell / elmélet alkotás :
Newton-féle gravitációs **törvény**

(fizikai mennyiségek közötti összefüggések)

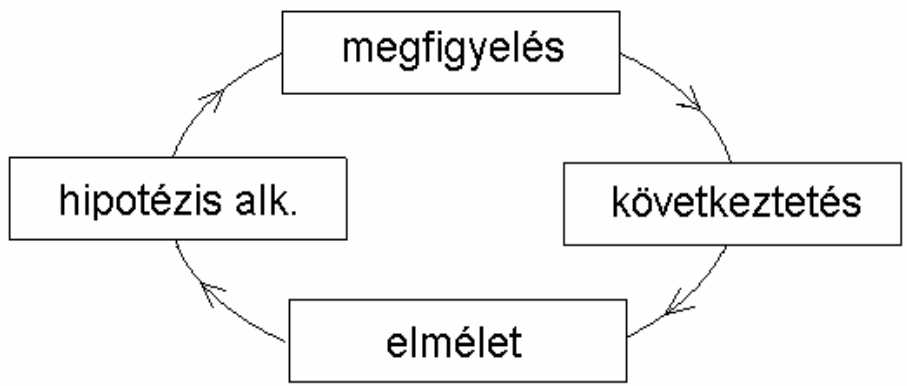
hipotézis / jóslás :
vajon bármelyik két test vonzza egymást ?

↓

újabb kísérlet, megfigyelés

↓

igen



a fizikai mennyiségek jellege

skalár = szám : csak nagysága van — pl. tömeg

vektor = szám + irány : nagyság + irány is — pl. erő

de más jellegű mennyiség is van még

(pl. mechanikai feszültség)

tenzor

+ mértékegység

a különböző egységek nem hasonlíthatók össze !!!

műveletek vektorokkal (+, -, skalárral szorzás, skaláris szorzás, vektori szorzás)

összeadódó (extenzív)
kiegyenlítődő (intenzív) } mennyiségek { pl. tömeg
pl. hőmérséklet

mértékrendszerek, alapmennyiségek

általában **SI** :

alapegységek:	hosszúság,	méter	[m]
	tömeg,	kilogramm	[kg]
	idő,	másodperc	[s]
	elektromos áramerősség,	amper	[A]
	hőmérséklet,	kelvin	[K]
	anyagmennyiség,	mól	[mol]
	fényerősség,	kandela	[cd]

kiegészítő egységek:	síkszög,	radián	[rad]
	térszög,	szteradián	[sr]

származtatott egységek:

az alap- és kiegészítő egységekből algebrai műveletekkel

pl : sebesség [$^{m}/_{s}$], erő [$kg \cdot ^{m}/_{s2}$], …

nem SI-egységrendszerek (pl USA):
inch, coll, hüvelyk, láb, mérföld, gallon, Fahrenheit, stb …

előtétszavak:

…

exa	E	10^{18}	deci	d	10^{-1}
peta	P	10^{15}	centi	c	10^{-2}
tera	T	10^{12}	milli	m	10^{-3}
giga	G	10^{9}	mikro	μ	10^{-6}
mega	M	10^{6}	nano	n	10^{-9}
kilo	k	10^{3}	piko	p	10^{-12}
hekto	h	10^{2}	femto	f	10^{-15}
deka	da	10^{1}	atto	a	10^{-18}

…

pl :	**giga**watt, **mega**watt	erőművek teljesítménye
	kilowattóra	háztartások energiafogyasztása
	kilogramm	pl, alma, kenyér, stb… tömege
	kilométer	távolság

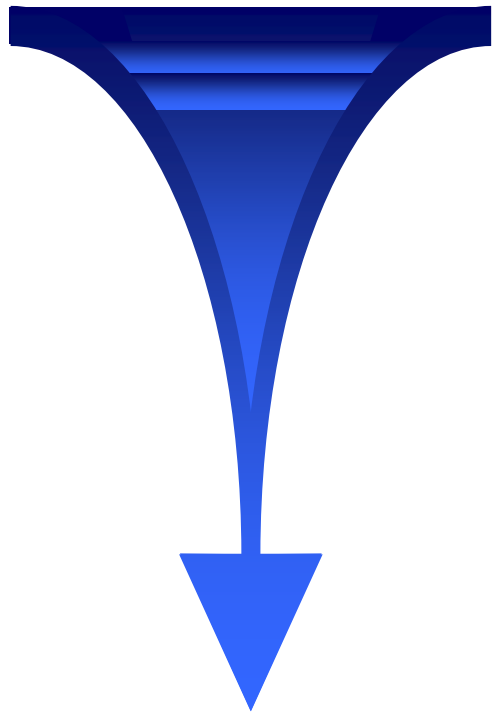
de pl. a számítástechnikában 1 **kilo** = 2^{10} = 1024 !

	hektoliter	hordók űrtartalma
	deciliter	kisebb edények űrtartalma
	centiliter	még kisebb űrtartalom
	deciméter, cm, mm, nm	távolságok
	cg, mg, μg	kis tömegek

az ezektől kisebb ill. nagyobb egységek az atomi és még kisebb mérettartományban előforduló távolságok és energiák jellemzésére használatos

egyéb, nem SI, de használt mértékegységek:

fok, perc, másodperc (szögmérés)	π rad = 180°
angström (Å)	= 10^{-10} m
fényév (távolság !!!)	$\approx 9.46 \cdot 10^{12}$ km
hektár (ha)	100 m × 100 m
liter (ℓ)	= 1 dm^3
mázsa (q)	= 100 kg
tonna (t)	= 1000 kg
óra, perc, másodperc (időmérés; és év, nap, hónap, stb…)	
km/h	3.6 km/h = 1 m/s
atmoszféra (atm)	= 101325 Pa
bar, mbar	= 10^5 Pa
kalória (cal)	= 4.1868 J
kilowattóra (kWh)	1 Wh = 3600 J
lóerő (LE)	$\approx$ 736 W
celsius fok	0 C^{o} $\approx$ 273 K
stb ….	



MECHANIKA = mozgások vizsgálata

(= helyváltoztatás)

kinematika

a mozgás leírása a szemlélő szemszögéből.
nem keres okokat.

- *pálya*
- *elmozdulás, elfordulás*
- *sebesség, szögsebesség*
- *gyorsulás, szöggyorsulás*

dinamika

*a mozgásfajták, a változások **okait** vizsgálja.*

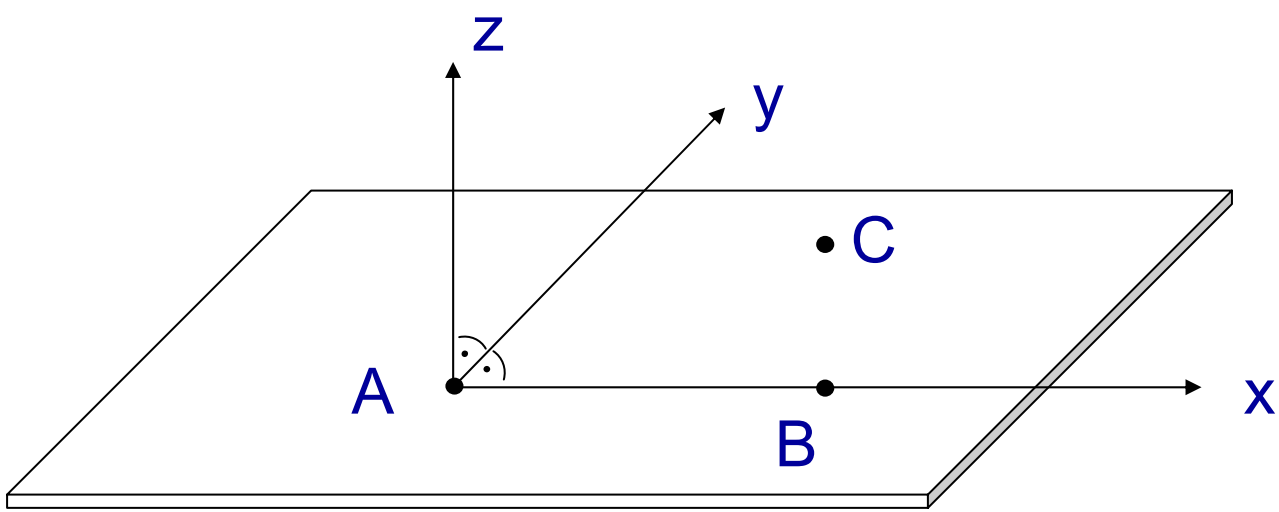
- *tömeg, tehetetlenségi nyomaték*
- *erő, forgatónyomaték*
- *lendület, perdület*
- *energia*

vonatkoztatási rendszer : koordinátarendszer

koordinátarendszer :

három, nem egy egyenesen levő ponthoz lehet viszonyítani

vagy az ezekre illesztett tengelyekhez :



x-y-z jobbsodrású rendszer legyen

pl. egy merev testen kijelölhetjük ezeket a pontokat

földrajzi hely megadása:

origó a Föld kp.-ja

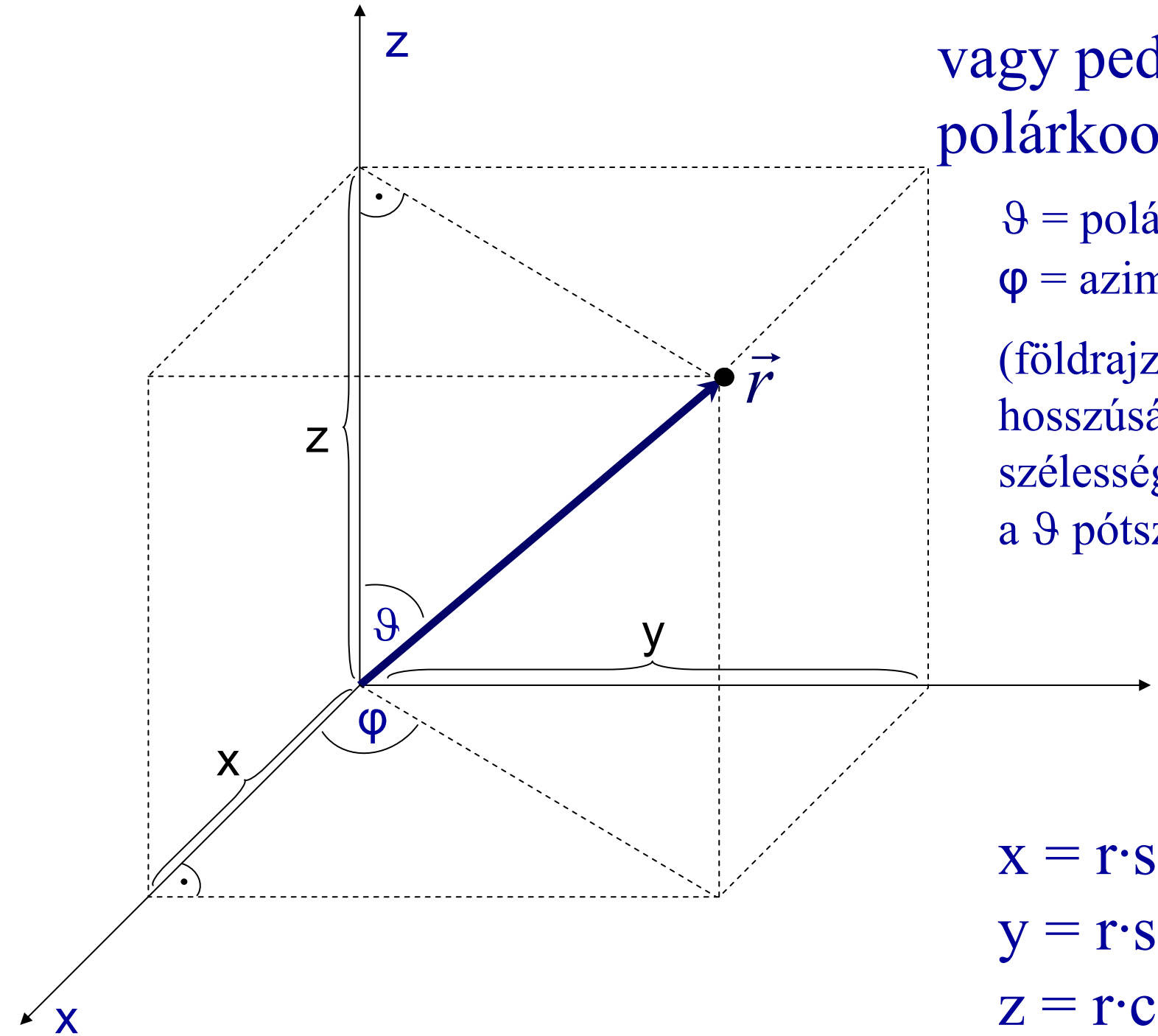
z-tengely a Sarkcsillag felé mutat, az yz sík átmegy a Greenwich angol falu csillagvizsgálóján

munkadarabon furandó lyuk helyének megadása:
a munkadarab élei a koordináta-tengelyek (tervrajz)

épületek, stb…

derékszögű koordinátarendszer:

pont helyzete = az yz, zx és xy síktól mért távolságok (vagyis az x-, y- és z-tengelyekre vett merőleges vetületek)



vagy pedig polárkoordináták:

ϑ = polárszög

φ = azimutszög

(földrajzban ez a hosszúsági fok, a szélességi fok pedig a ϑ pótszöge)

$x = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi$

$z = r \cdot \cos\vartheta$

∞ sok, ehhez képest nem mozgó újabb koord.rdsz. is megadható → **vonatkoztatási rendszer**

nem kell anyaghoz hozzárendelni

pontszerű testek pl. Föld a Nap körül, v. vonat BP és NyH között…
pontrendszerek pl. felrobbanó bomba repeszei, tüzijáték, …
merev testek pl. forgó pörgettyű, falhoz támasztott létra, …

hétköznapi életünk során a vonatkoztatási rendszer a **Föld**
(eltekintünk a forgástól)

kinematika = mozgás jellemzése :

milyen **pályán** mozog
mennyi **idő** alatt mennyi **utat**
tett meg, vagy :
mekkora **elmozdulása** van…

idő, időtartam, időpillanat, esemény
idő = két esemény közötti időtartam

időmérés : *periodikus* folyamatok alapján („órák”)

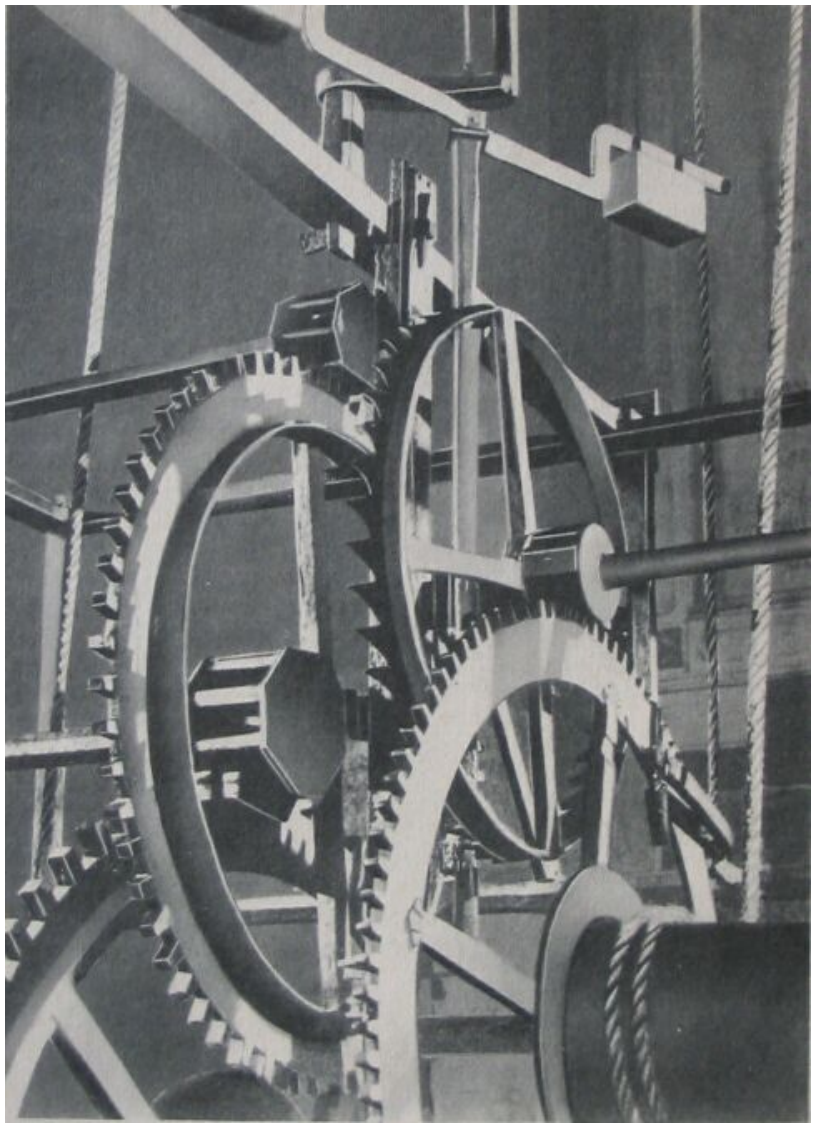
pl. csillagok járása, homokóra fordítgatása, stb…

Galilei (1583) : ingalengések egyenlő időtartamúak

→ első ingaóra

(kevésbé pontos órák már előtte is voltak)

a legrégebbi mechanikai időmérő szerkezet
1386, Anglia



legpontosabb óra
atomóra (Cs)

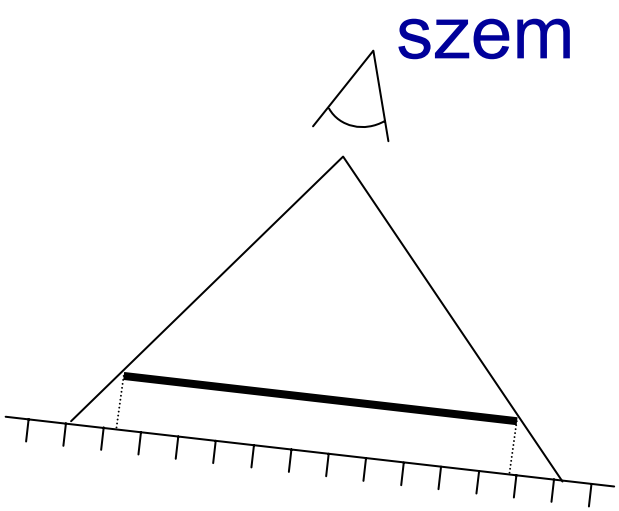
idő egysége :
másodperc

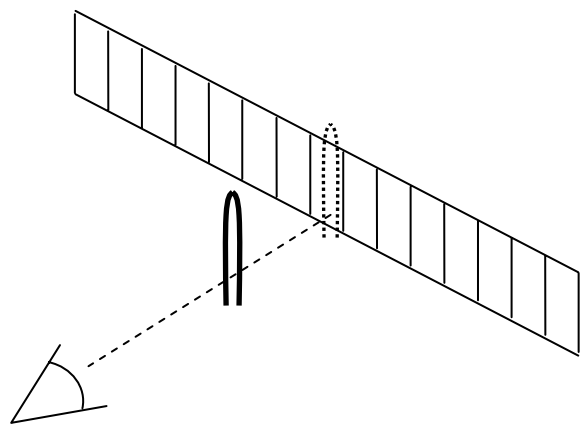
1s = 9192631,770
Cs-rezgés

távolságmérés : a *méter-etalonnal* való összehasonlítás alapján („vonalzók”)

végpontok összeillesztése, 0 jelzés

ha nem lehet egymás mellé tenni:
leolvasás párhuzamos fénysugarakkal (tükörskála)



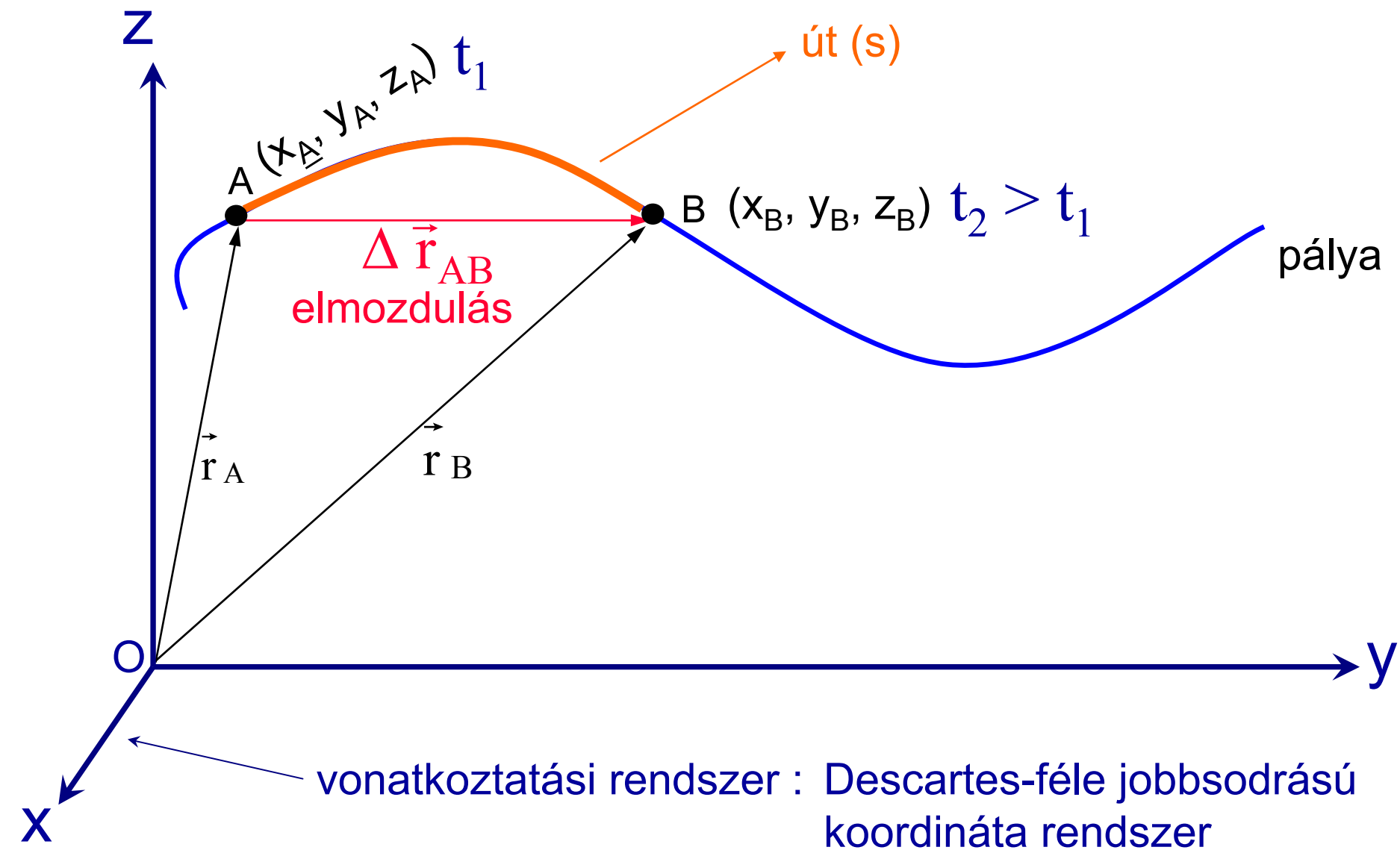


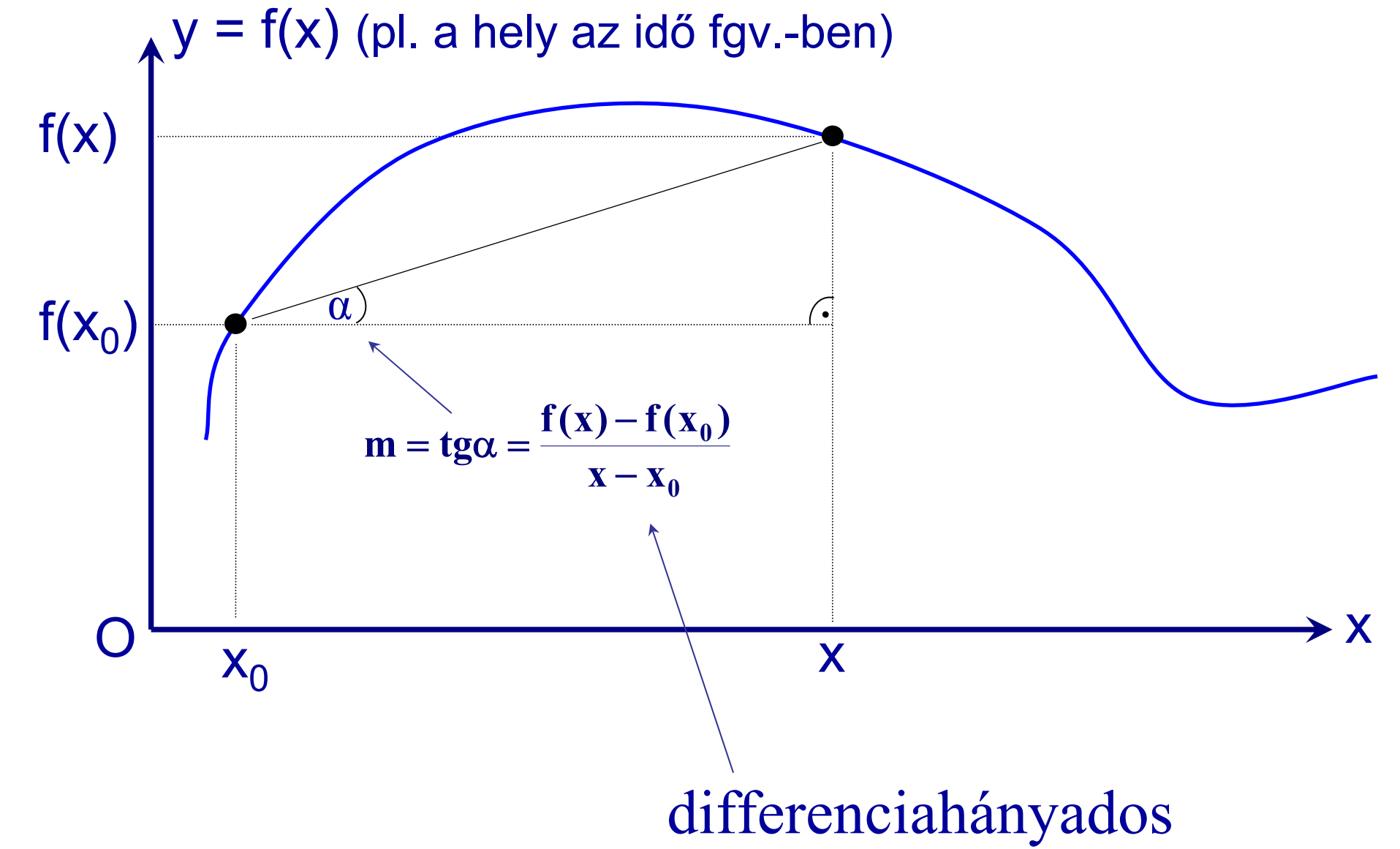
leolvasás pontosságának növelése : optikai eszközök
finommechanika (csavarmikrométer), nóniusz

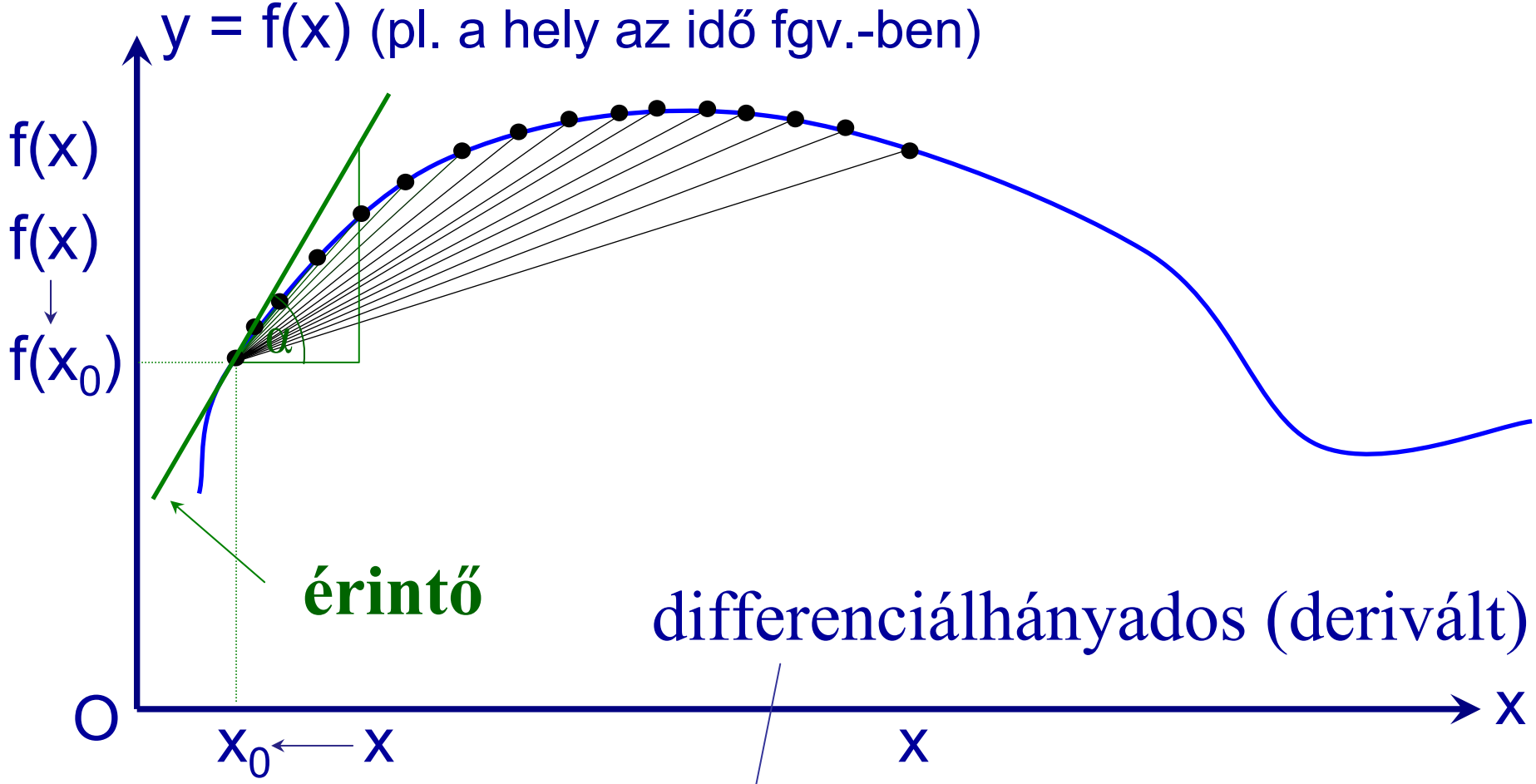
mérési pontatlanságok → pl :

$\ell = (3{,}46 \pm 0{,}07)$ cm

mozgás jellemzése :



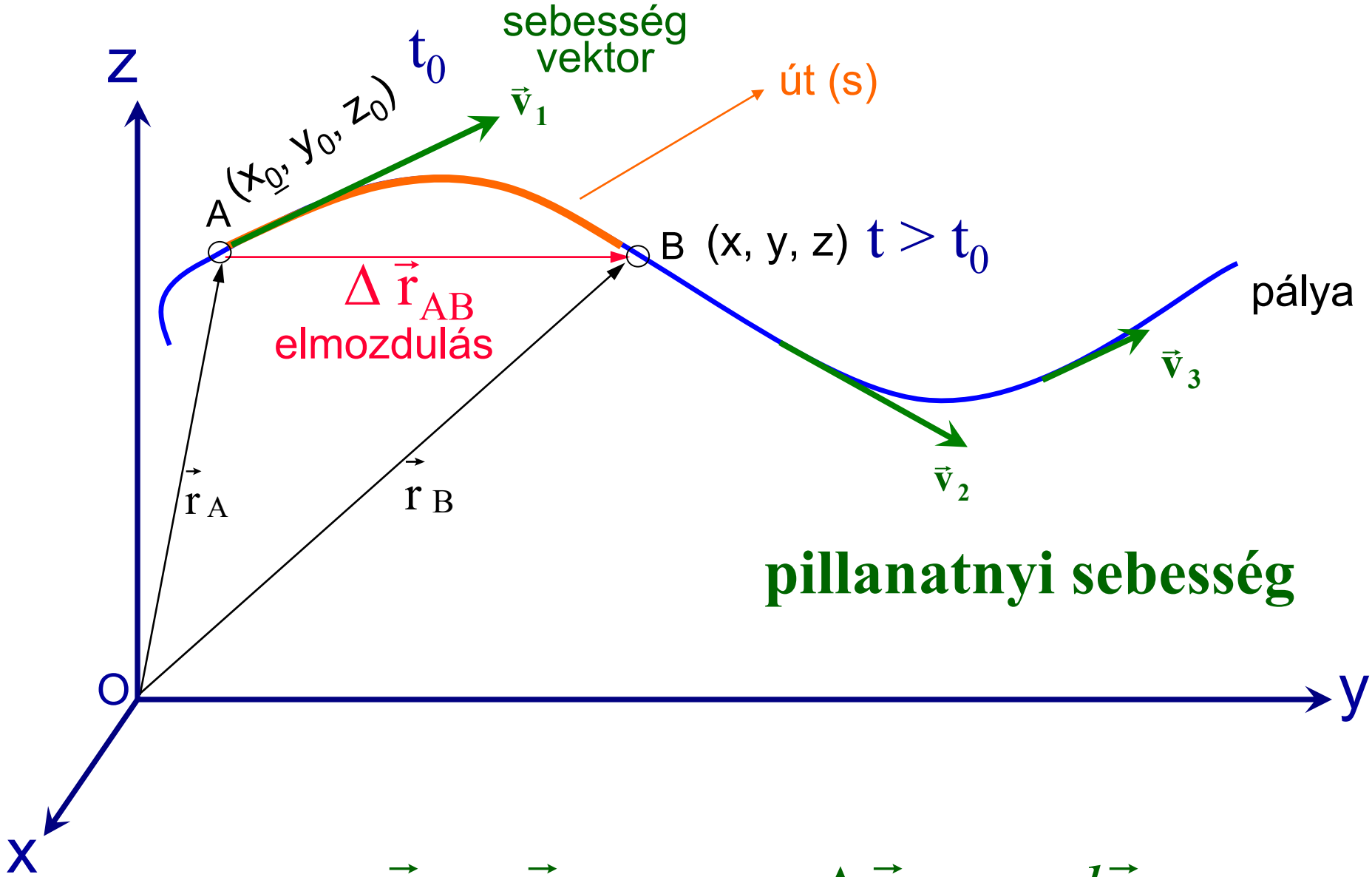

y = f(x) (pl. a hely az idő fgv.-ben)
f(x)
f(x0)
α
m = tgα = f(x) − f(x0) / x − x0
O
x0
x
x
differenciahányados



$$m = (\mathrm{tg}\alpha) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x)$$

ha időfüggés van (x = t) :

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \dot{f}(t)$$



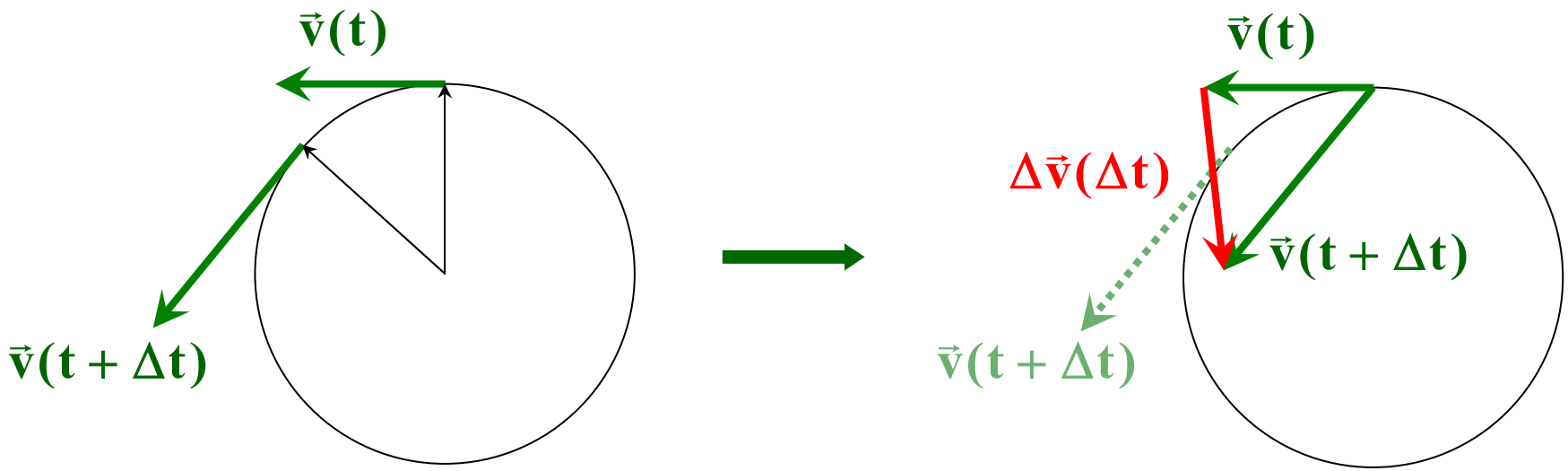
pillanatnyi sebesség

$$\vec{v} = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}_{AB}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

sebességvektor időben változhat

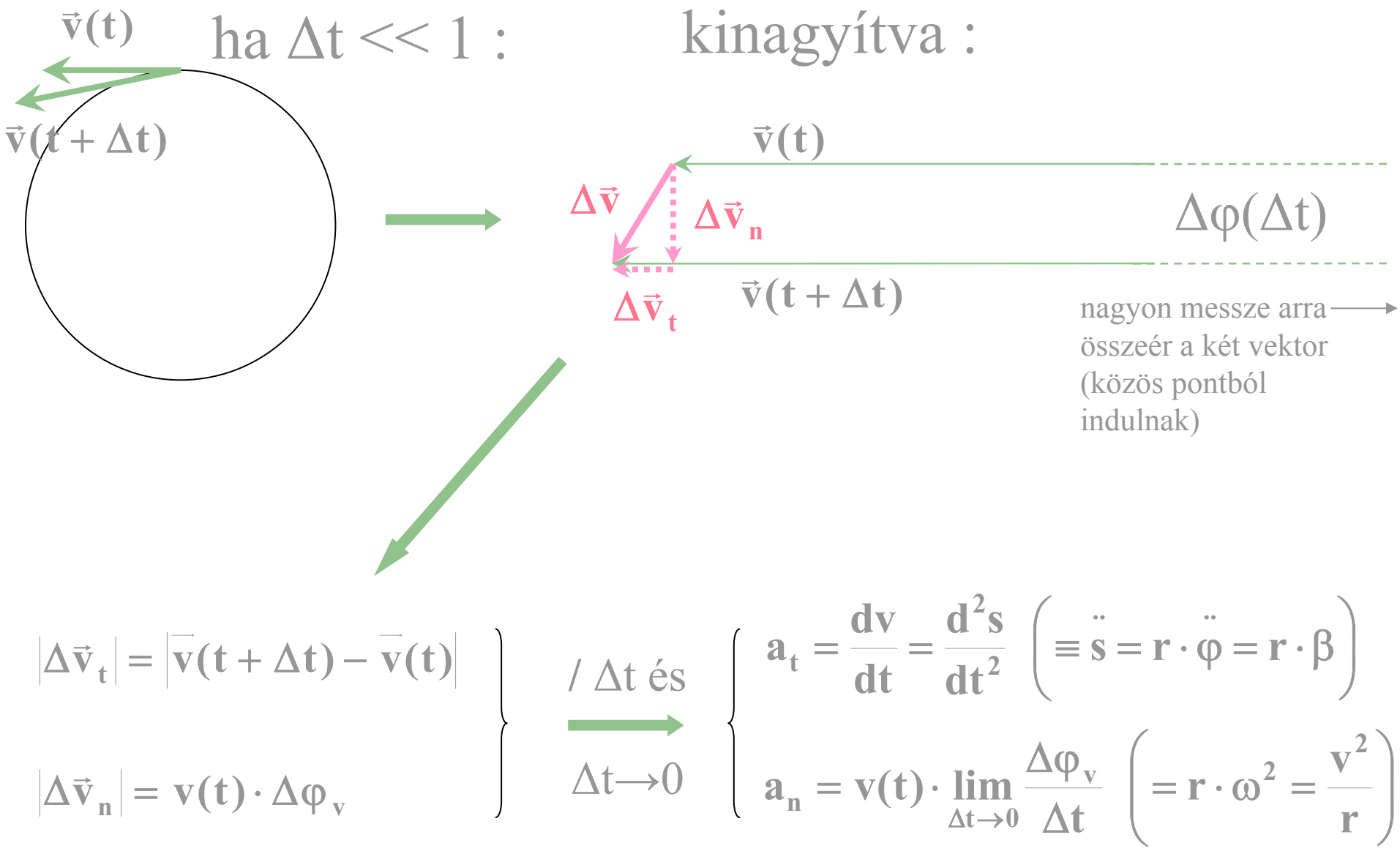
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

gyorsulásvektor



gyorsulásvektor

- tangenciális, a_t — $\Delta|\vec{v}|$
- centripetális, a_{cp} — $\Delta\vec{v}$



$$\left|\Delta\vec{v}_t\right| = \left|\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)\right|$$

$$\left|\Delta\vec{v}_n\right| = v(t)\cdot\Delta\varphi_v$$

/ Δt és

$\Delta t \to 0$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad \left(\equiv \ddot{s} = r\cdot\ddot{\varphi} = r\cdot\beta\right)$$

$$a_n = v(t)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi_v}{\Delta t} \quad \left(= r\cdot\omega^2 = \frac{v^2}{r}\right)$$

mozgásfajták

haladó mozgás

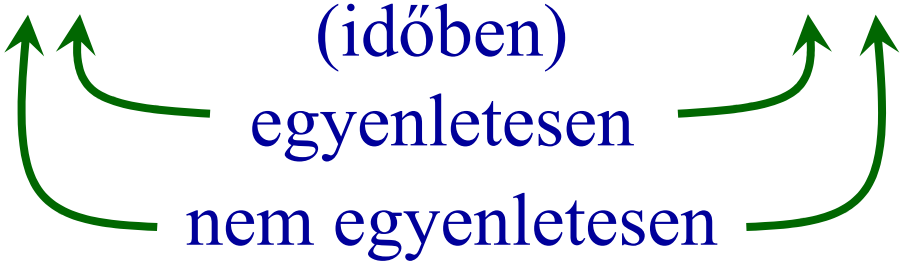
- egyenletes
- változó

körmozgás, forgó mozgás

- egyenletes
- változó

rezgőmozgás, hullámmozgás

- harmonikus
- anharmonikus



pl. : haladó mozgás :

pl. vonat a sinen, gyalogos a járdán, stb…

legegyszerűbb mozgás :

egyenesvonalú egyenletes mozgás:

pálya : egyenes

sebesség : időben állandó

(vektor !) ⟶ $\vec{a} = 0$

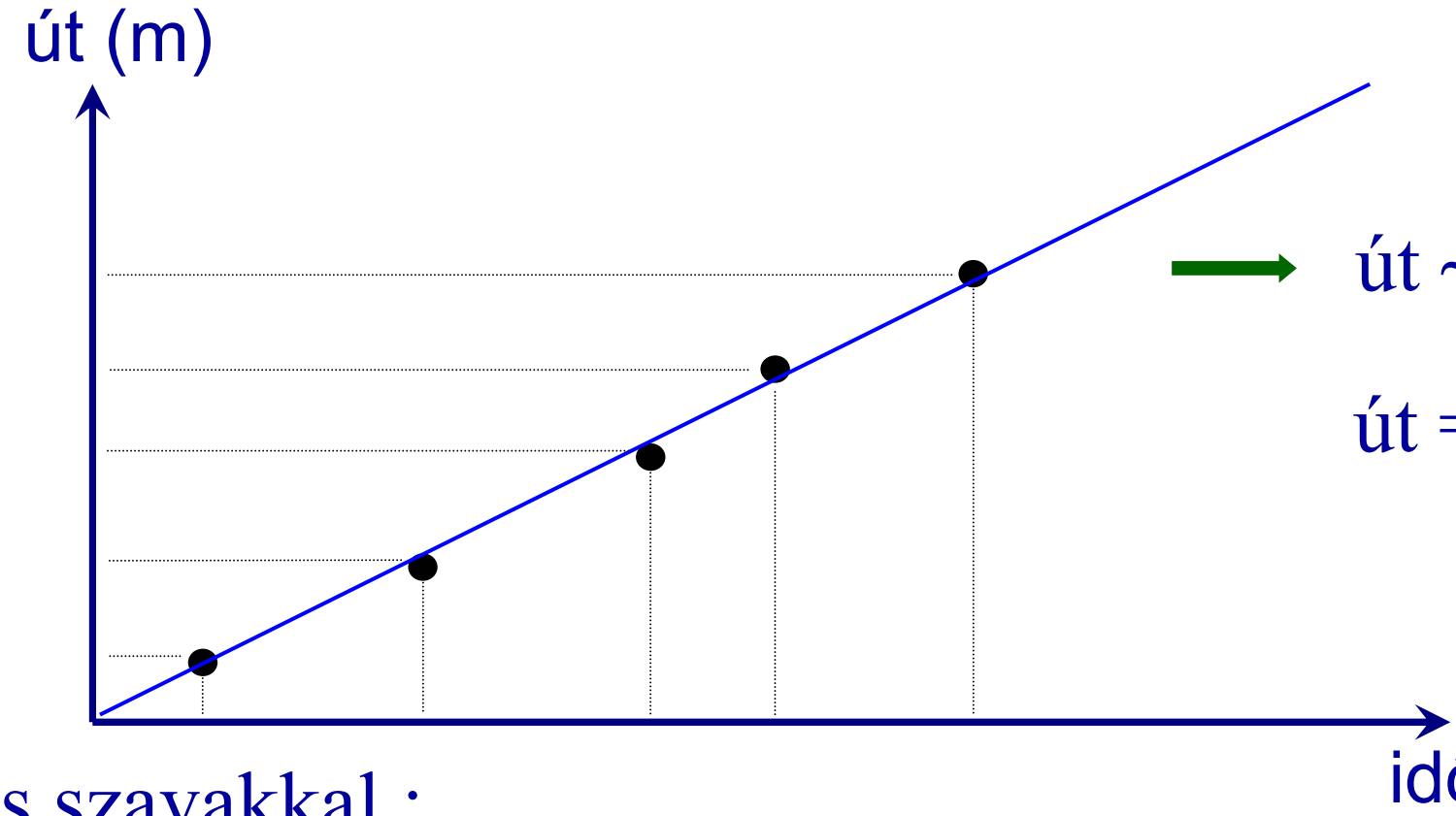
pl. : vonat a nyílt egyenes pályán mozgólépcső, …

ellenőrzés **kísérlettel** : **Mikola-cső**

(gimnáziumi tanár volt a múlt század első felében)

tapasztalat : a buborék által megtett utak az idők függvényében egyenest adnak :

tapasztalat : a buborék által megtett utak az idők függvényében egyenest adnak :



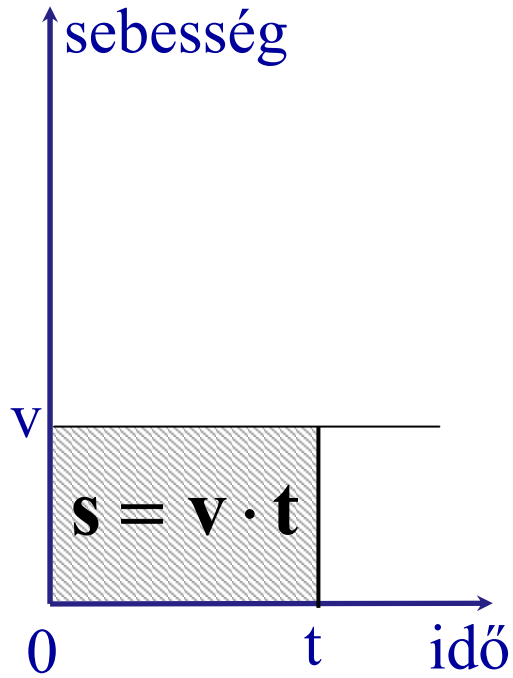
út ~ idő

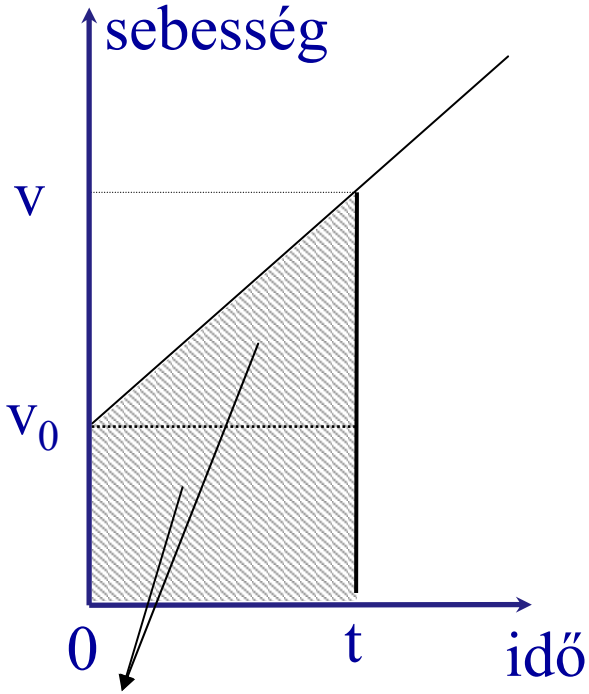
út = v · idő

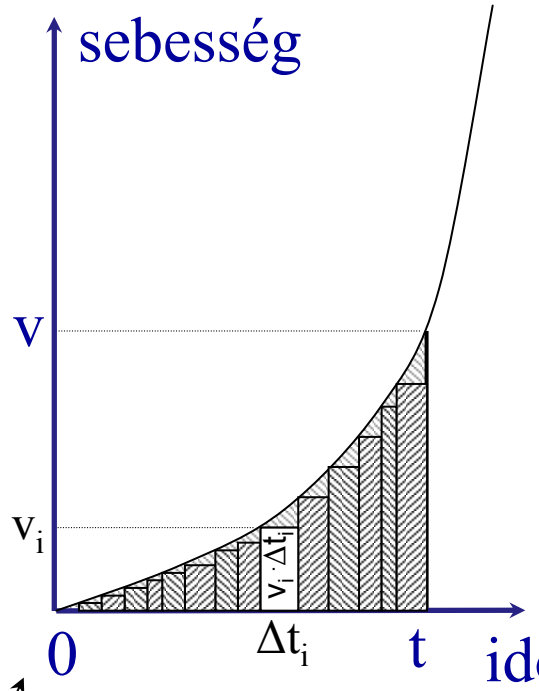
más szavakkal :
az egyforma idők alatt megtett utak egyformák

$$v = \frac{\textbf{megtett út}}{\textbf{közben eltelt idő}} \equiv \frac{s}{t} =$$ **sebesség**

a megtett út meghatározása a v-t grafikonról :







$$s = v_0 \cdot t + \frac{v - v_0}{2} \cdot t$$

$$s \approx s_0 + \sum_{i=1}^{n} v_i(t_i) \cdot \Delta t_i$$

út = görbe alatti terület

$$s = s_0 + \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

sebesség → **pillanatnyi sebesség**

→ **átlagsebesség**

pl. : autó v. vonat NyH és BP között, időnként megáll

feladat : egy gépkocsi egy utat odafele 60 km/h sebességgel, visszafele 80 km/h sebességgel tesz meg. Mekkora a teljes (oda-vissza) útra számított átlagsebessége ? (68.5 km/h)

átlagsebesség ≠ sebességek átlaga !!!

$$\overline{v} = \frac{\textbf{összes út}}{\textbf{összes idő}}$$

(mert lassabban hosszabb ideig megy)

hasonlóan „egyszerű” mozgás még :

egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás:

pálya : egyenes

sebességvektor : időben nem állandó :

iránya állandó

nagysága időben egyenletesen nő

$\vec{a} > 0$ $(\mathbf{a_t})$

pl. : vonat az állomásról elindul és gyorsít (egyenes pályán)

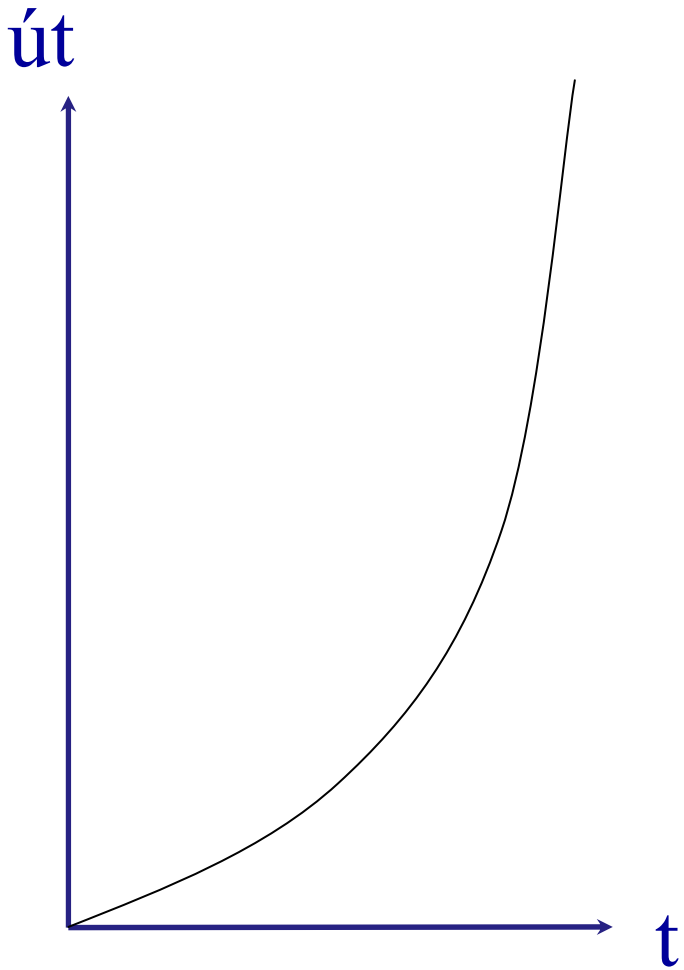
ellenőrzés **kísérlettel** : **lejtőn leguruló golyó** (különböző hajlásszögeknél)

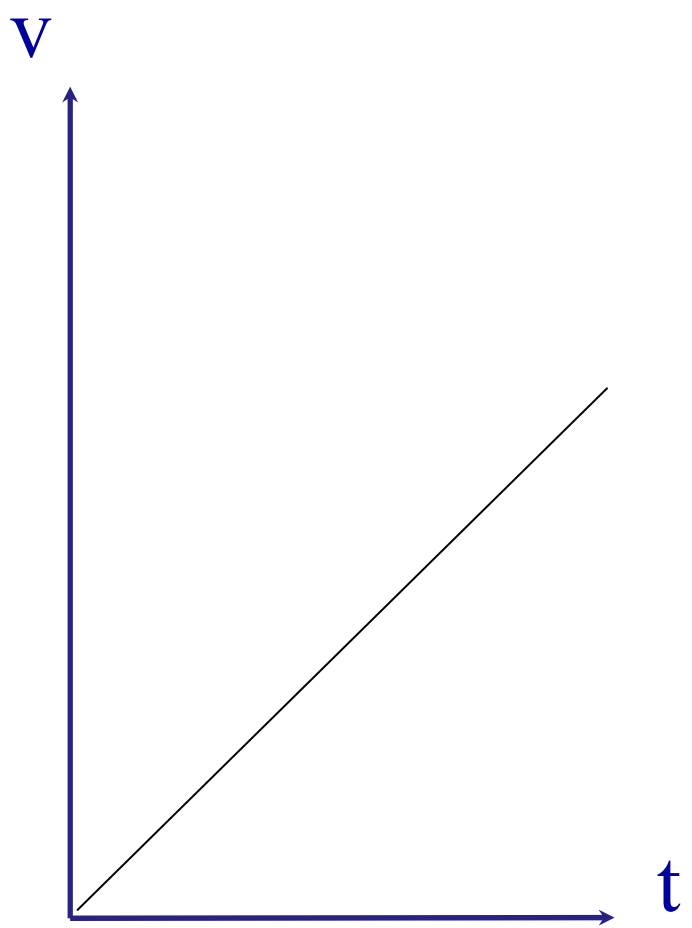
tapasztalat : $\mathbf{s \sim t^2}$ → parabola

$s \sim t^2$ konkrétan :

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad \text{és} \quad v = a \cdot t$$

gyorsulás





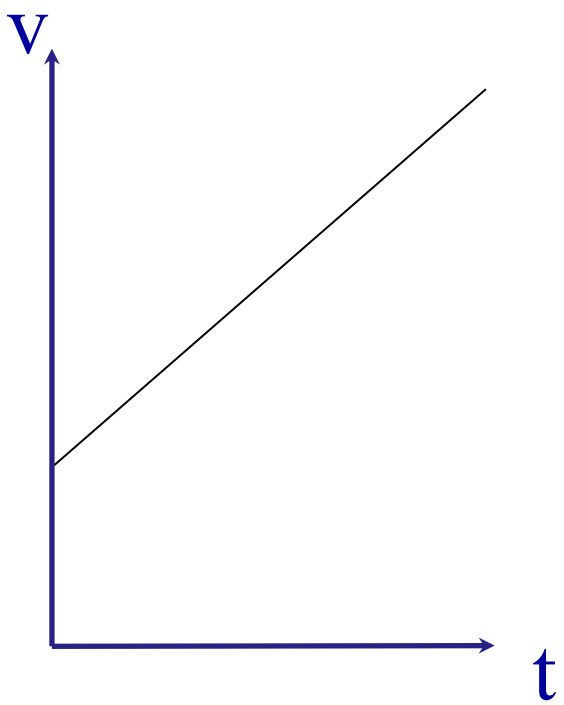
matematika: egyenletesen gyorsuló mozgásnál

$v = a \cdot t$

$$s = \int_0^t v\,dt = \int_0^t (a \cdot t)\,dt = a \cdot \int_0^t t\,dt = a \cdot \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^t + C = \frac{a}{2} \cdot t^2 - 0 + C$$

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

lassulásnál : $-\mathbf{a}$



nem nulla kezdősebességről
induló mozgás :

$$\mathbf{s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2} \quad \text{és} \quad \mathbf{v = v_0 + a \cdot t}$$

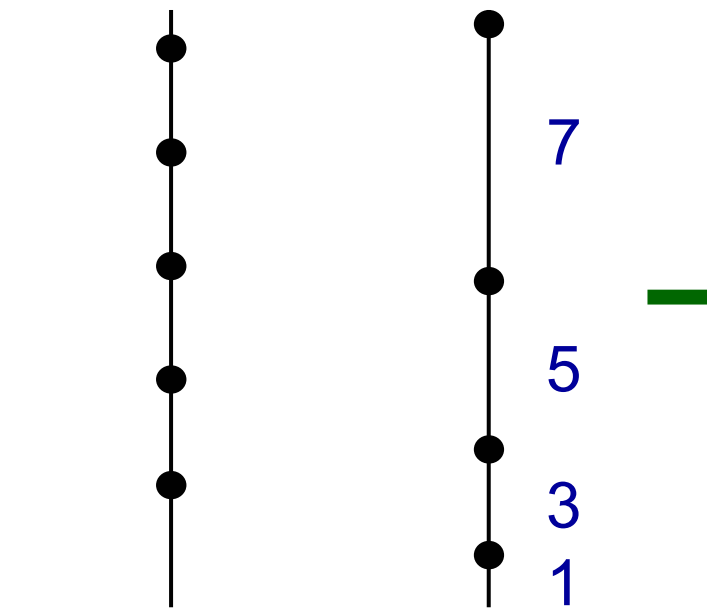
szabadesés :

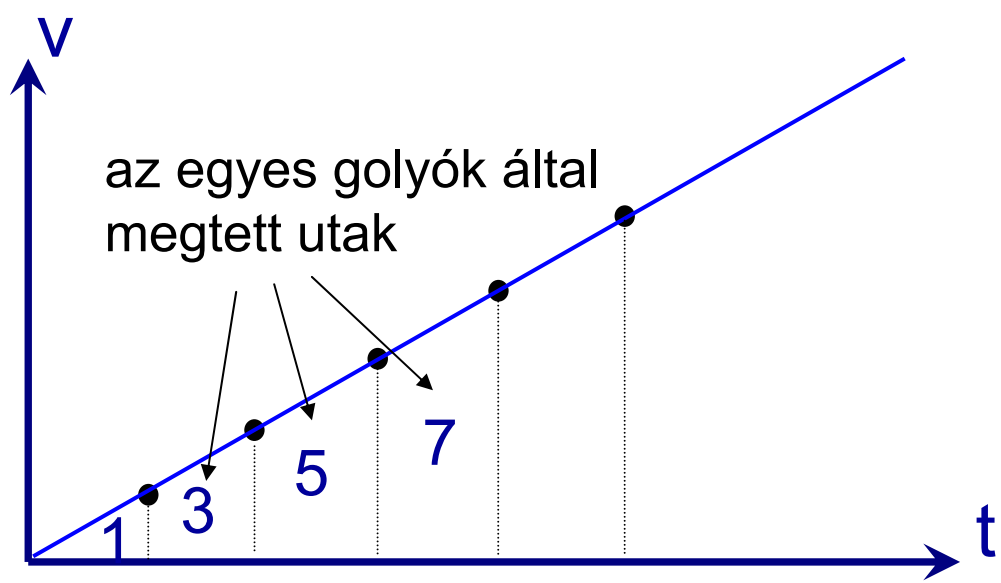
elejtett test mozgását csak a Föld vonzása befolyásolja

első kísérleti vizsgálata : Galilei

Galilei :
„ … az eső, nehéz test szabad mozgása állandóan gyorsul… amennyire én tudom, még senki sem állapította meg, hogy a távolságok, melyeket egy nyugvó állapotból induló test egyenlő intervallumok alatt befut, úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan egész számok, kezdve az egységgel… „

kísérlet : ejtőzsinór





azaz itt is **v ~ t**

$v \sim t$ → a szabadesés is egyenesvonalú, egyenletesen gyorsuló mozgás

kísérlet : papírdarab és vasgolyó ejtése levegőben

ejtőcső → nem egyszerre érkeznek le

kísérlet : papírdarab és vasgolyó ejtése (vákuumban) → egyszerre érkeznek le

↓

minden **szabadon** eső test gyorsulása ugyanakkora !!!

$$\mathbf{v = g \cdot t}$$

$$\mathbf{h = \frac{g}{2} \cdot t^2}$$

← = nehézségi gyorsulás, $g \approx 9.81\ {}^{m}/_{s^2}$ függ a helytől !!!

pl. : kút mélységének mérése beledobott kővel $\approx 5t^2$

függőleges hajítás lefelé, felfelé :

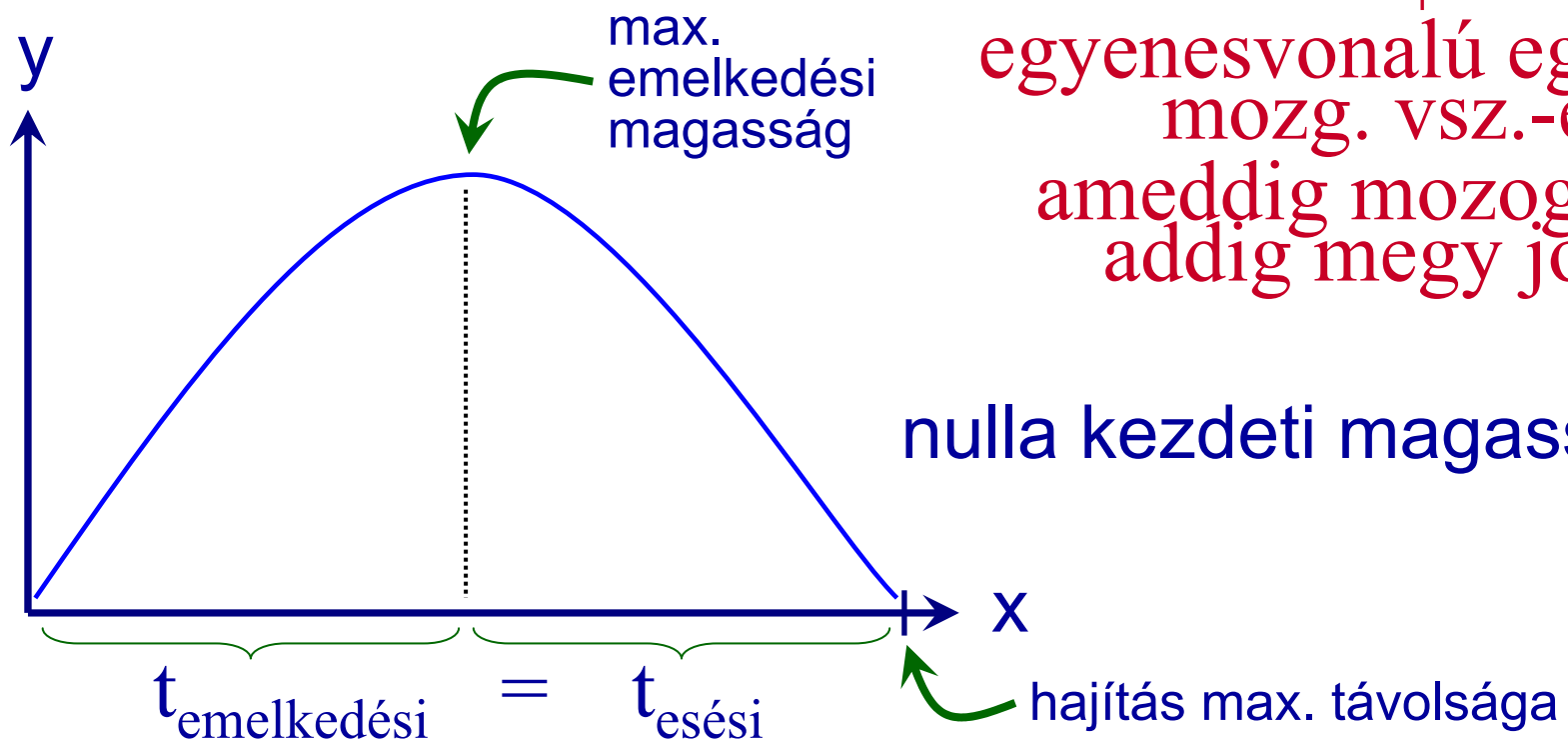
= nem nulla kezdősebességű szabadesés $\mathbf{v = v_0 \pm g \cdot t}$

$$\mathbf{h = h_0 \pm v_0 \cdot t \pm \frac{g}{2} \cdot t^2}$$

ferde hajítás (vízszintes hajítás) :

függőleges és vsz. komponensekre bontva :

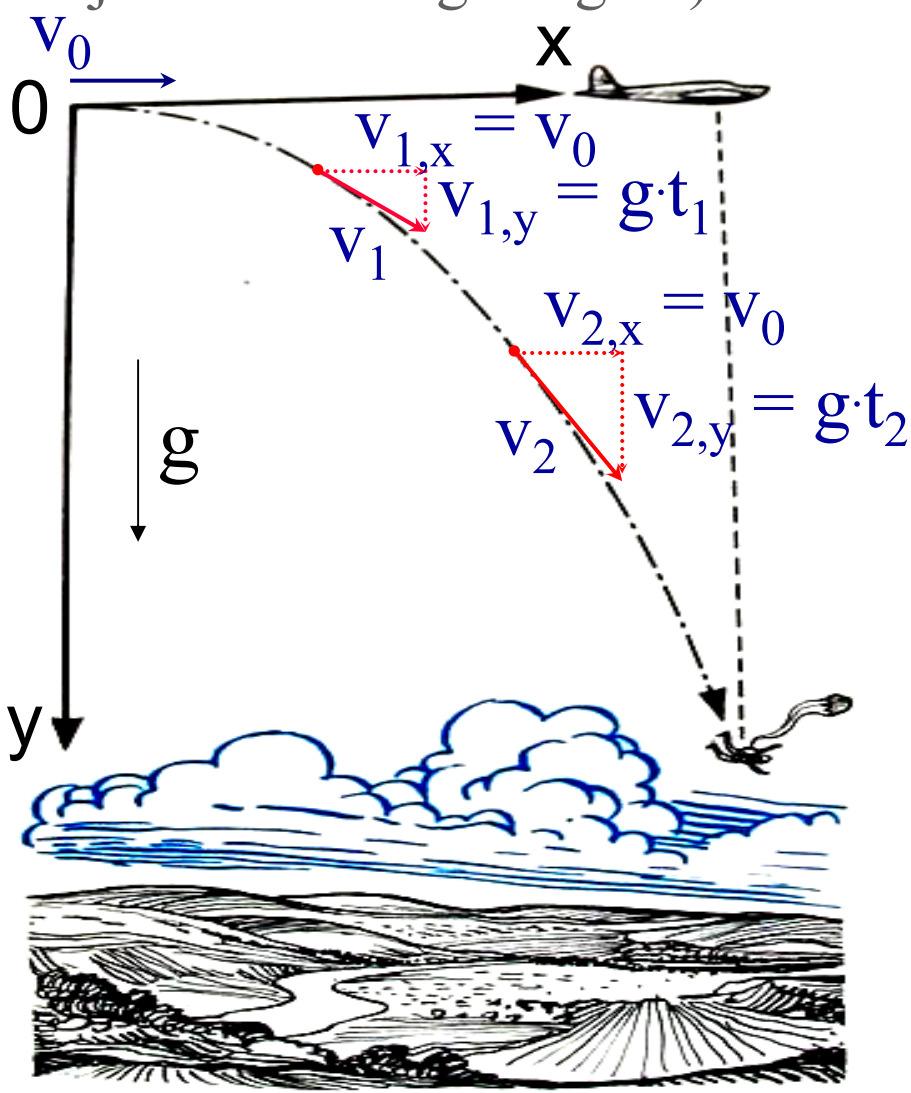
függ. hajítás felfele
+
egyenesvonalú egyenletes mozg. vsz.-en :
ameddig mozog föl-le, addig megy jobbra



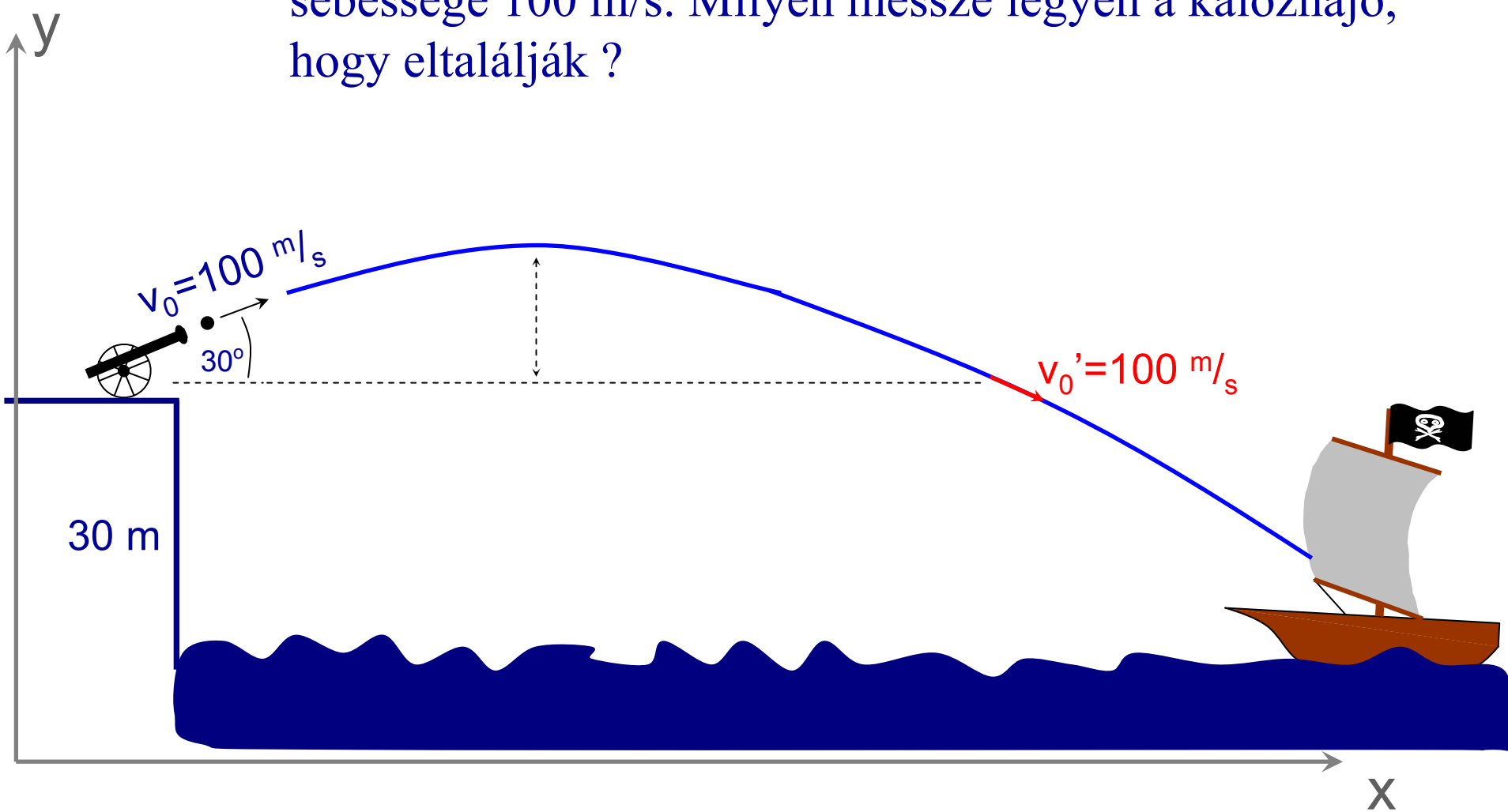
nulla kezdeti magasságról

feladat : egy 150 m magasan szálló repülőgépről csomagot dobnak ki. Mennyivel a cél előtt kell a csomagot kidobni, ha a gép sebessége 200 km/h ? (304 m)

(= vsz. hajítás adott magasságból)



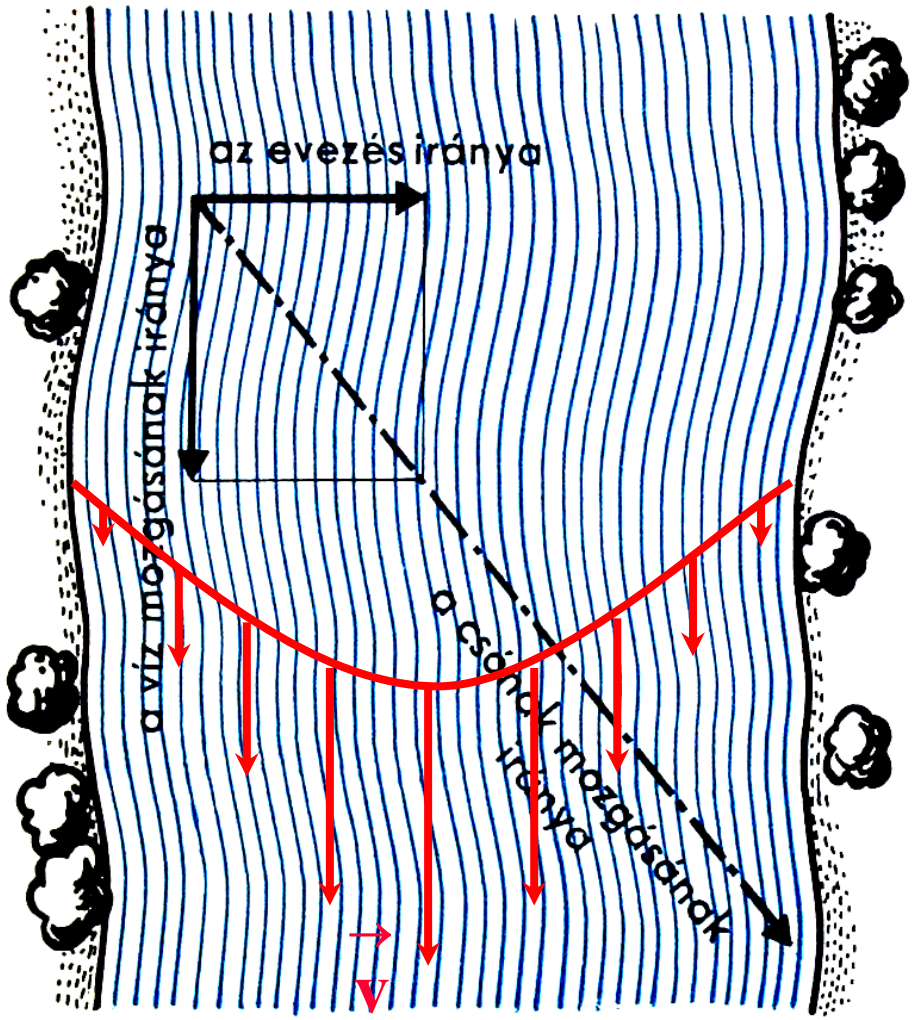
feladat : egy 30 m magas sziklaperemről 30°-os szögben lőnek ágyúval az érkező kalózhajóra. A lövedék kezdősebessége 100 m/s. Milyen messze legyen a kalózhajó, hogy eltalálják ?



$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2, \text{ és } v_{0x} = \text{áll.}$$

mozgások összetevése :

folyón egy csónak megy keresztül, hol ér partot ?

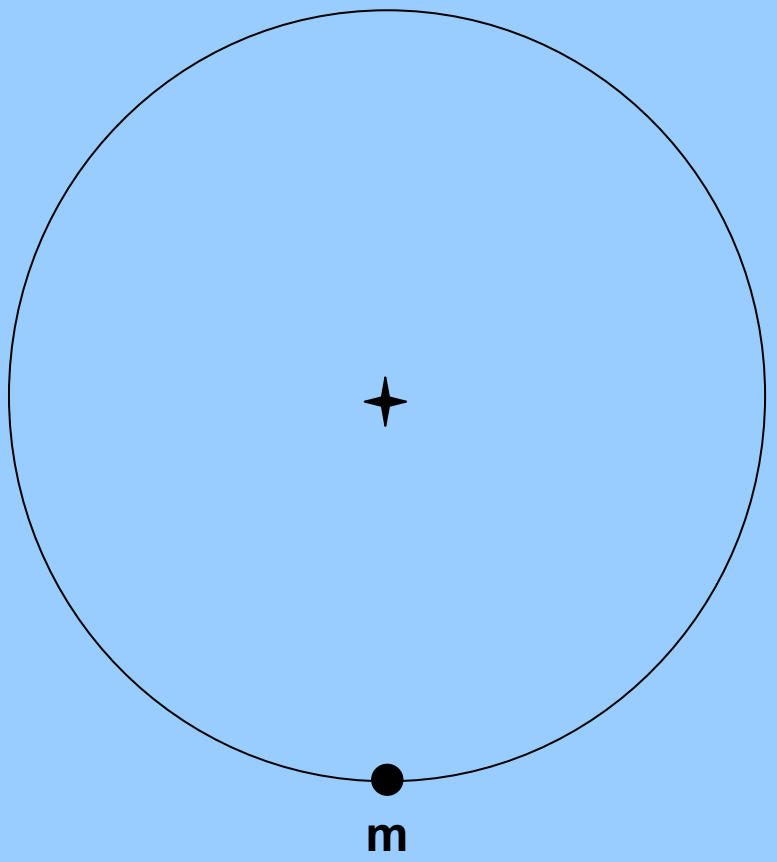


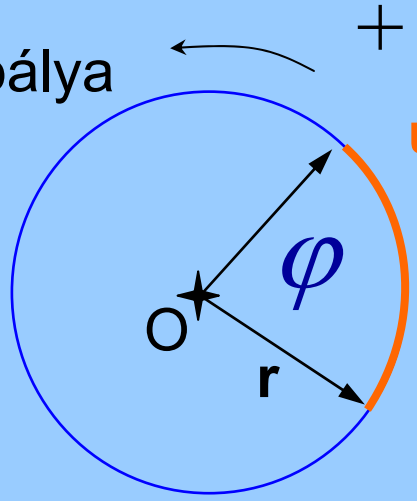
vektorok összeadása !

körmozgás : → egyenletes
→ egyenletesen gyorsuló (lassuló)

egyenletes körmozgás :

ω = **áll.**





út = ívhossz

szögelfordulás = $\Delta\varphi$

$\vec{\varphi}$!

jobbkéz-szabály

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\underbrace{\Delta t}}$$

periódusidő : T → 2π

fordulatszám : f → $1/T$

szögsebesség : $\boldsymbol{\omega = 2\pi/T} = 2\pi f$

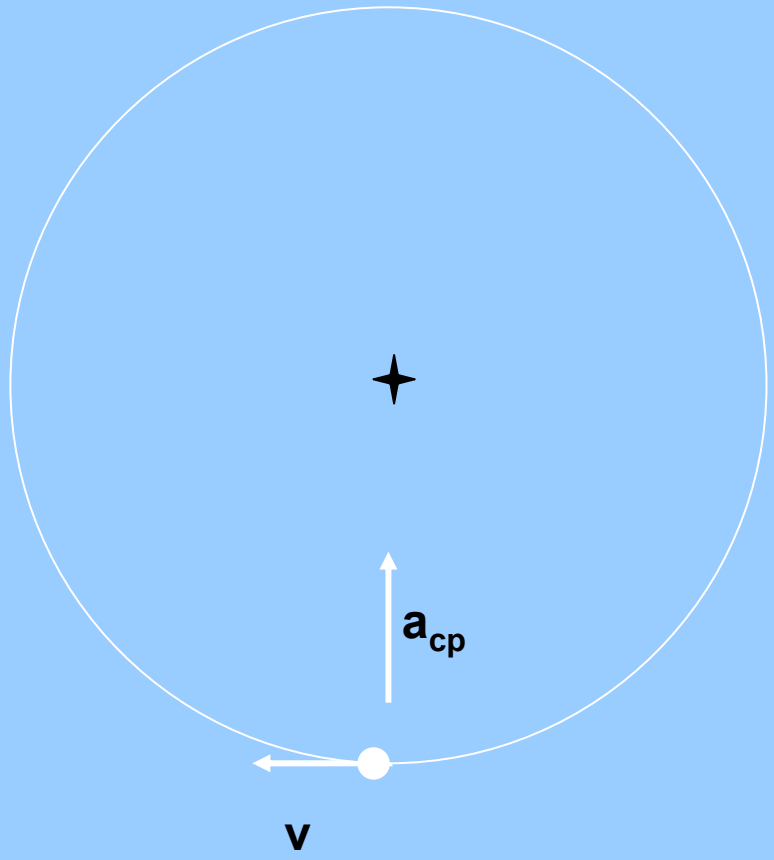
$\boldsymbol{\varphi = \omega \cdot t}$

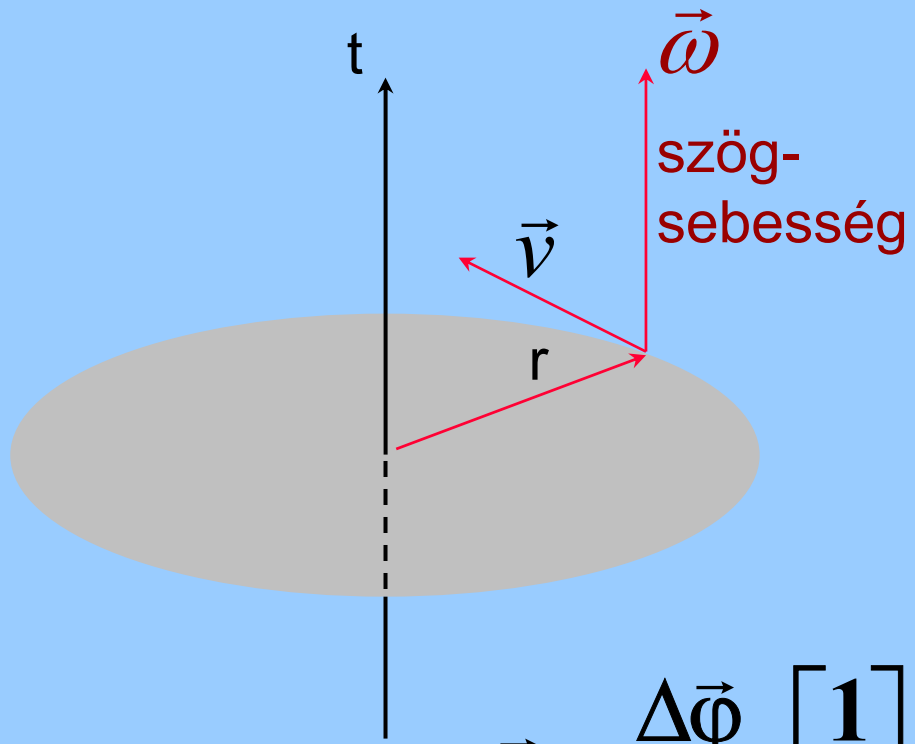
$\boldsymbol{s = r \cdot \varphi}$

$\boldsymbol{v = r \cdot \omega}$

$a_t = 0$, de $a_{cp} \neq 0$:

$\vec{\varphi}$!





$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$\vec{\omega} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} \left[\frac{1}{s}\right]$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \; !$$

egyenletesen változó körmozgás : $a_t = \text{áll.}$

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \textbf{áll.} \qquad a_t = r \cdot \beta \qquad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \textbf{áll.}$$

$$\omega = \beta \cdot t \qquad v = r \cdot \omega \qquad v = a \cdot t$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\beta \cdot t^2 \qquad s = r \cdot \varphi \qquad s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

mozgás tetszőleges pályagörbén :

a pályagörbét minden pillanatban egy-egy körpályával helyettesíthetünk

↓

egyenletes mozgás
egyenletesen változó mozgás } szabályai érvényesek

forgó mozgás :

merev testek egy tengely körüli forgása :

a test egyes pontjai nem mozdulnak

forgástengely

rögzített tengely,
legalább 2 pont rögz.
(kerék, motor,…)

szabad tengely
1 pont körül forog
(pörgettyű, labda,…)

kísérlet : pörgettyű

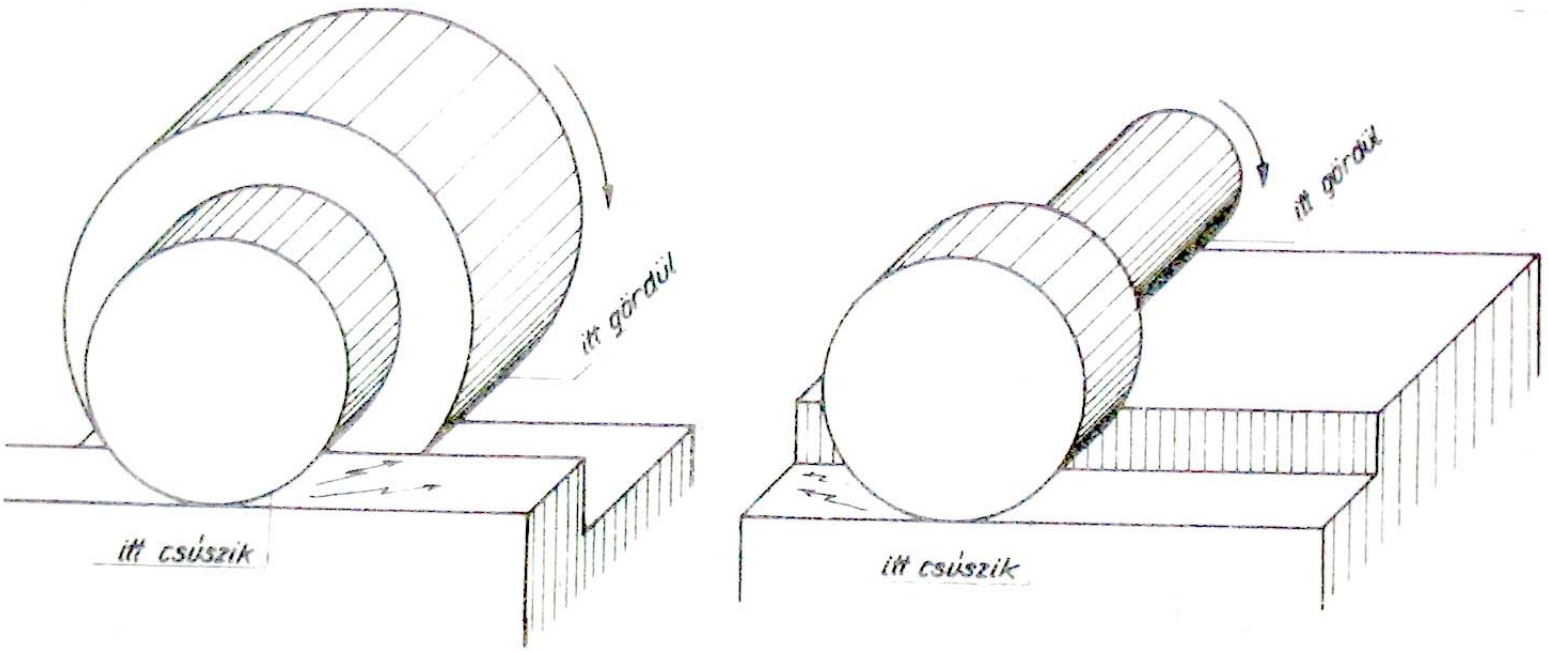
ω = áll. és v ≠ áll. minden pontra

a többi pontjai a tengely körüli körpályákon mozognak

visszavezettük körmozgásra

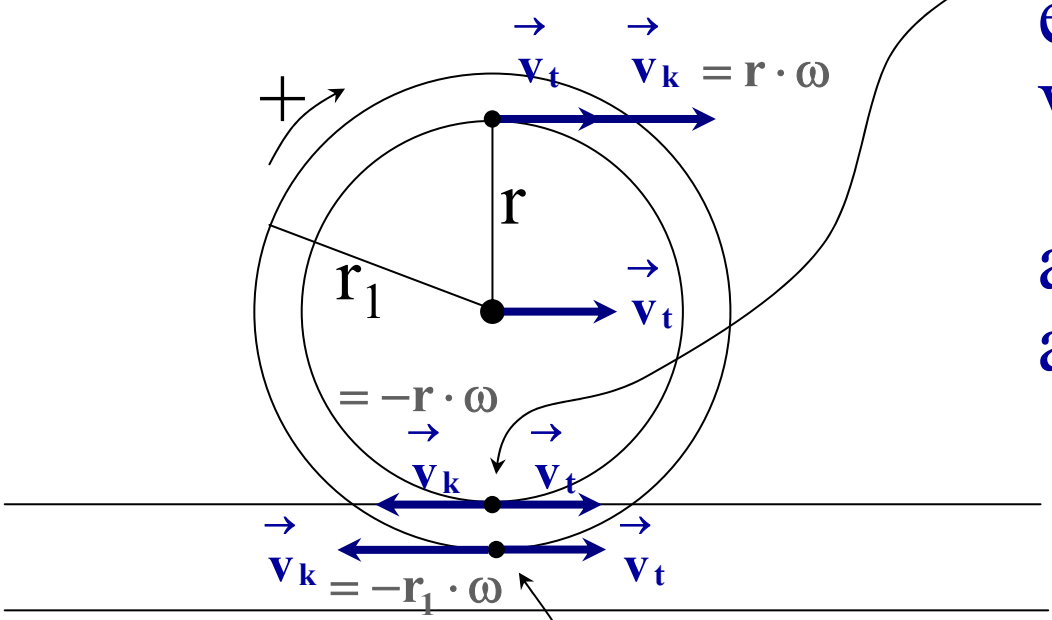
gördülő mozgás : = forgás rögzített tengely körül + haladó mozgás

kísérlet : gördülések



gördülés →
- tiszta gördülés = csúszásmentes (autó egyenletesen halad)
- csúszva gördülés (hirtelen indulás, vagy fékezés)

vonatkerék :



az a pont „annyit halad előre, mint amennyit visszafele fordul” :

$$v_t = r \cdot \omega$$

azaz a sinhez képest áll !!!

pillanatnyi forgástengely

ez a pont hátrafele mozog !

rezgőmozgás : → harmonikus
anharmonikus

harmonikus rezgőmozgás :

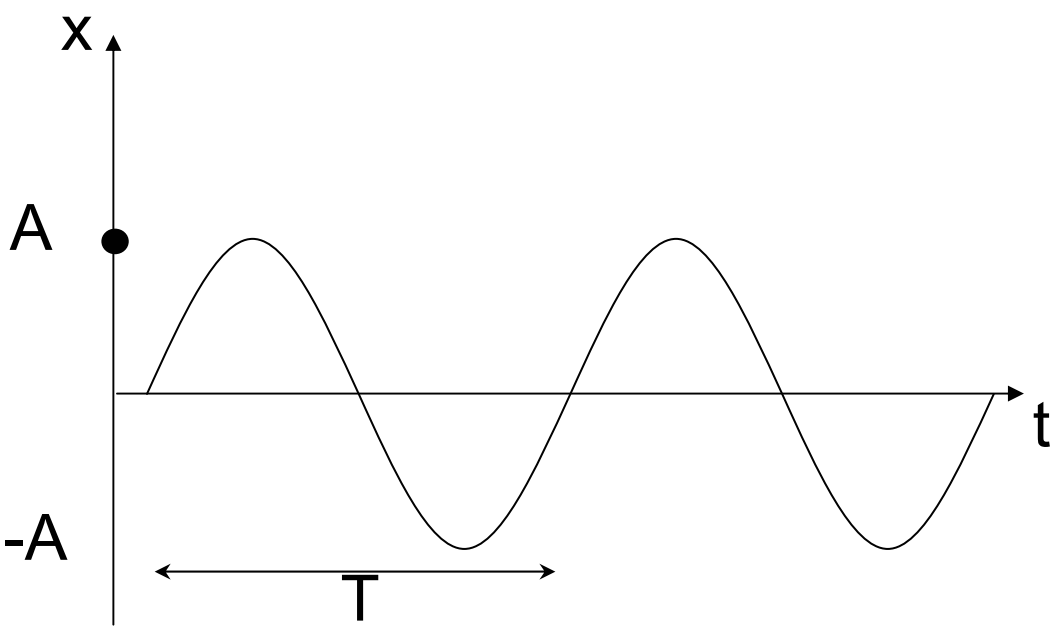
$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

amplitúdó

körfrekvencia

T = periódusidő
rezgésidő

f = 1/T
frekvencia

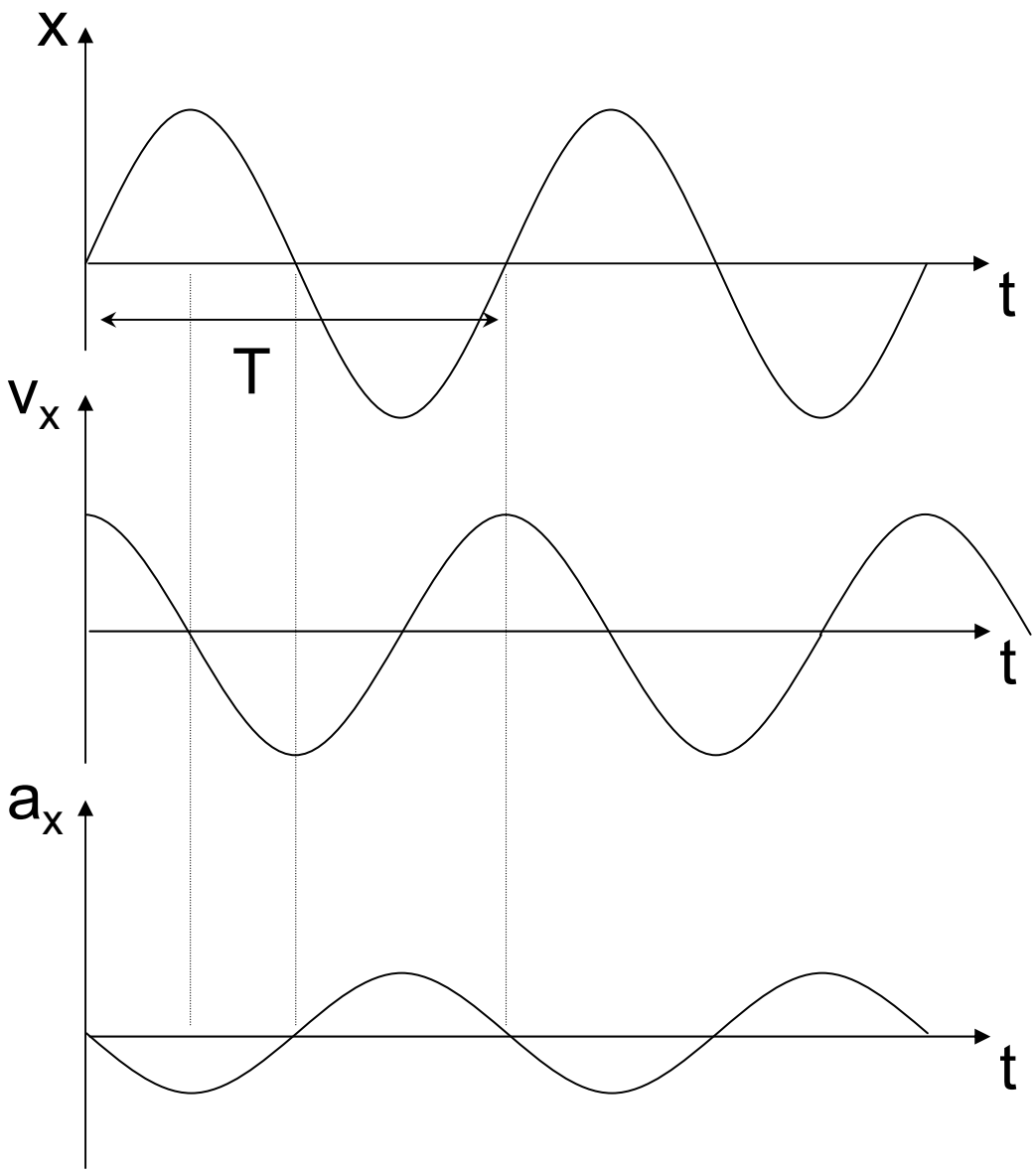


kísérlet :

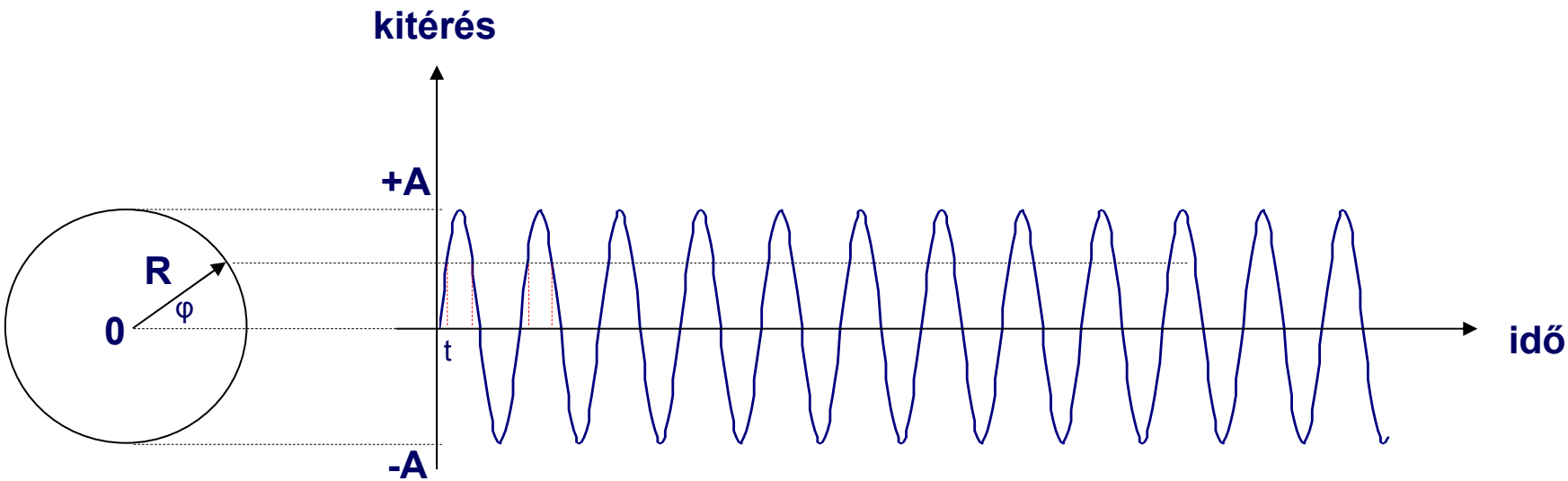
rúgón rezgő test,
megpendített húr,
hangvilla végén tű, megütjük, majd kormozott üveglaphoz érintve egyenletesen húzzuk

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \longrightarrow v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



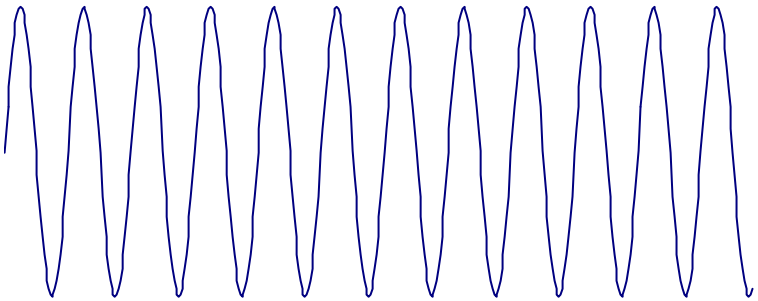
a harmonikus rezgőmozgás és egyenletes körmozgás kapcsolata :



csillapodó rezgés :

β = 0

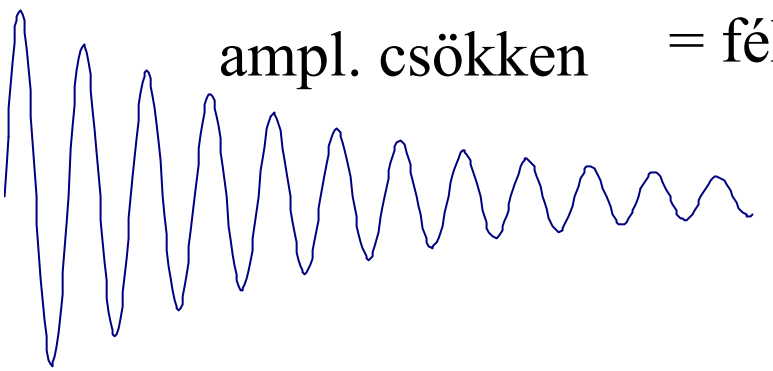
harmonikus



β = 0.1

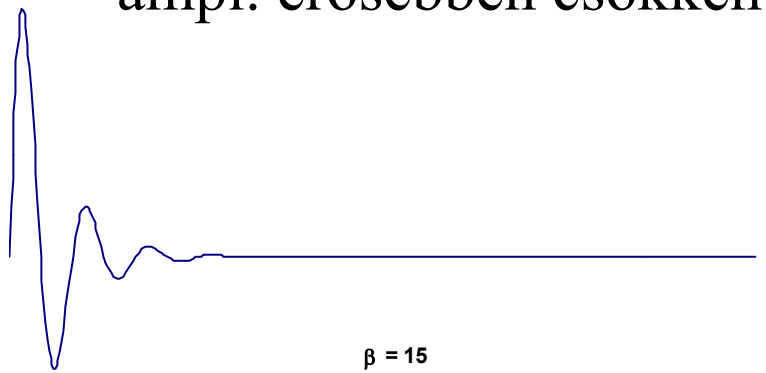
csillapítási tényező
= fékezés

ampl. csökken

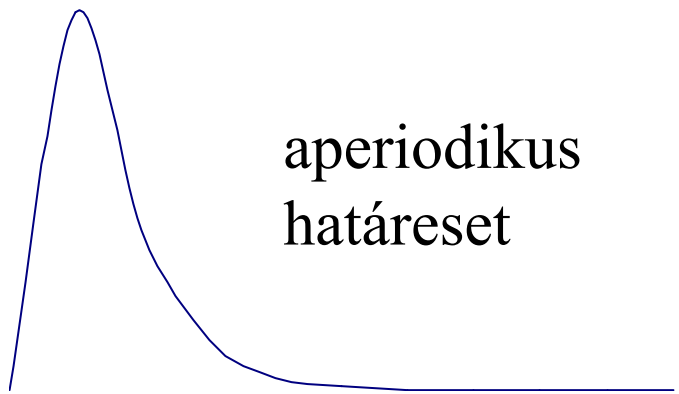


β = 0.4

ampl. erősebben csökken



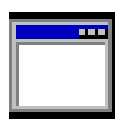
β = 15



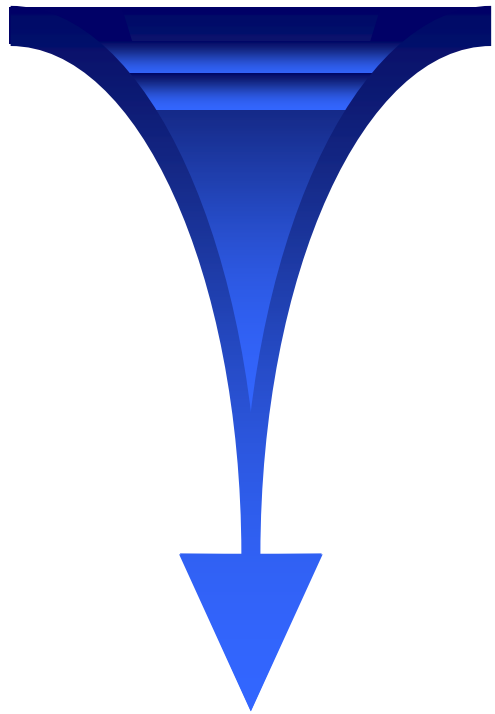
aperiodikus
határeset

rezgések összeadása → párhuzamos
merőleges

kísérlet : rezgések összeadása →



Fizdemo.exe



dinamika = mozgások, mozgásállapot-változások okainak vizsgálata, leírása

régen : a mozgás fenntartásához egy másik test állandó hatása (= „erő”) kell, pl. egy kocsi csak akkor mozog, ha húzzuk

Galilei : elindított és magára hagyott test annál hosszabb utakat tesz meg, minél simább/csúszósabb a felület

gondolatban folytatta : az egyszer elindított test megtartaná mozgásállapotát, ha a felület akadályozó hatását (súrlódás) ki lehetne küszöbölni = **tehetetlenség törvénye**

a tehetetlenség törvénye → **axióma** = alaptörvény

valószínűleg igaz

Newton megfogalmazásában :

minden test megtartja mozgási állapotát (= sebességének nagyságát és irányát), amíg más test/testek hatása annak megváltoztatására nem kényszeríti

inerciarendszer → **Newton I. törv.**

Newton : 1642-1727

mechanika törvényei, differenciálszámítás, szín, optika, tükrös távcső, graviáció (összefoglalta Kopernikusz, Galilei és Kepler felfedezéseit)

1687-ben „Principia” → 1705-ben lovaggá ütik

Newton előtt : erő = ember által kifejtett „erőfeszítés”

utána : erő = testek kölcsönhatásának mértéke

feltétele: érintkezés, különböző állapot …

eredménye: mozgásállapot-változás

ha két test kölcsönhatásba lép

mindkettőnek megváltozik a mozgásállapota :

pl. : két, korcsolyán álló ember húzza egymást / egyik húzza a másikat / másik húzza az egyiket, mindkettő elmozdul

az elmozdulások (és a kapott sebességek) ellentétes irányúak

a kövérebb fog lassabban mozogni

kísérlet : kocsik ütközése sinen / légpárnás asztalon

a kölcsönhatás törvénye : (= tapasztalat !)

a sebességváltozások ellentétes irányúak, és a sebességváltozások nagyságának hányadosa egy adott testpárra jellemző állandó, nem függ a kölcsönhatás módjától → a **tömeg**et lehet definiálni :

tömeg : egy B test tömege n-szerese az A test tömegének, ha kölcsönhatásuk során a B test sebességváltozása n-ed része az A sebességváltozásának

[kg]

a tömeg a test tehetelenségének mértéke

\+ mérések → a tömeg tranzitív

de : fénysebességnél más !!!

másképpen fogalmazva : $\mathbf{m_1 \cdot \Delta \vec{v}_1 = -m_2 \cdot \Delta \vec{v}_2}$

$$\mathbf{m_1 \cdot (\vec{v}_1'' - \vec{v}_1') = -m_2 \cdot (\vec{v}_2'' - \vec{v}_2')}$$

$$\mathbf{\underbrace{m_1 \cdot \vec{v}_1'} + m_2 \cdot \vec{v}_2' = m_1 \cdot \vec{v}_1'' + m_2 \vec{v}_2''}$$

impulzus (lendület) → $\mathbf{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$

2 test kölcsönhatása során $\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \longleftrightarrow \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1'' + \vec{p}_2''$$

= impulzusmegmaradás ← zárt rdsz-ben!

pl. egyforma tömegek ütközésénél a „középső” pont helyben marad, ha mindkettő egyforma sebességgel halad :

$$\vec{r}_{tkp} = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

tömegközéppont

$$\vec{v}_{tkp} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

a számlálóban $m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$ állandó

ütközéskor a **tömegközéppont** egyenesvonalú egyenletes mozgást végez

erő = kölcsönhatás mértéke :
mennyi idő alatt mekkora impulzusváltozás van ? :

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \underbrace{m \cdot \vec{a}}$$

impulzus-tétel

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

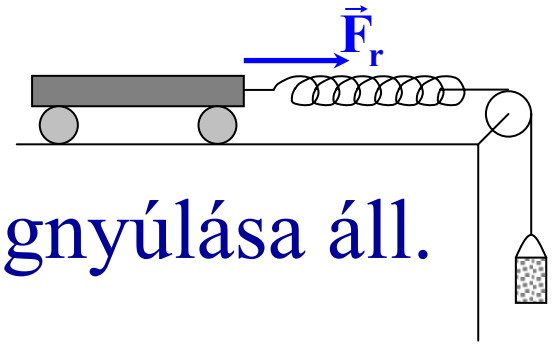
[N]

Newton II. törv.

(= dinamika alaptörvénye)

pl.: kalapácsütés

erőtörvények : *rúgó* : $F_r = -k \cdot (\Delta \ell)$ (megnyúlás is)
(Hooke-törv.)

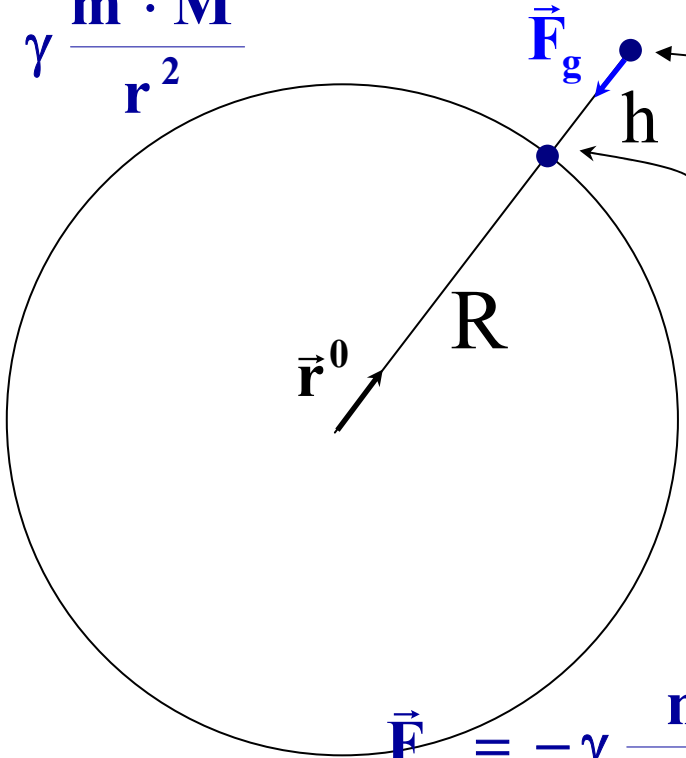


így a rúgó megnyúlása áll.

kül.súlyok → kül.megnyúlások

gravitáció: $G = m \cdot g$

de : $F_g = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2}$



$$F_g = \gamma \frac{m \cdot M}{(R+h)^2}$$

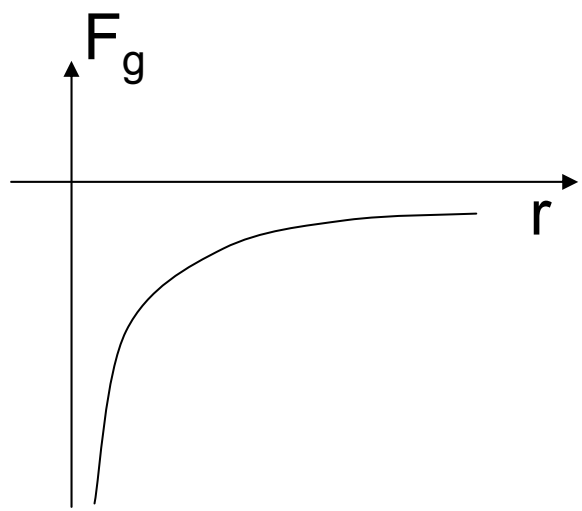
$$F_g = \gamma \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot \underbrace{\gamma \frac{M}{R^2}}_{g} = m \cdot g$$

$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

$$\vec{F}_g = -\gamma \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} \vec{r}^{\,0}$$

Newton…

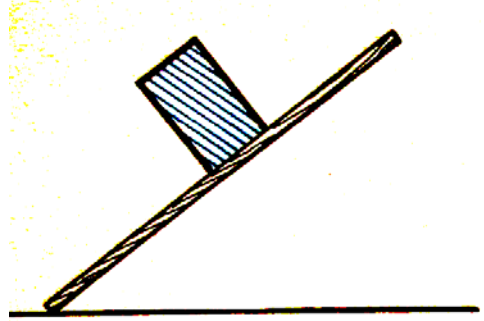
pl. : a Holdra csak F_g hat a Föld miatt (körpálya, $\approx$ 27,3 nap keringési idő)



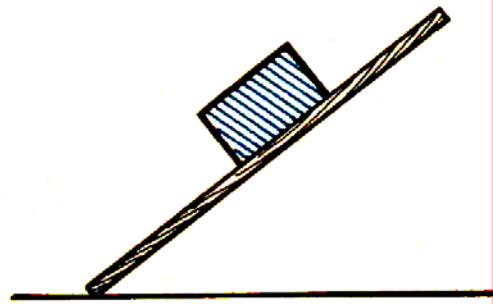
súly = súlyerő = F_{grav} vagy G

súrlódás :

kísérlet :
lejtőn lecsúszó fahasáb :



tapasztalat :



F_{surl} ellentétes az elmozdulás irányával
nagysága nem függ az érintkező felületek nagyságától

álló tárgyat nehéz megmozdítani, de utána már könnyebb tolni

súrlódás →
- csúszási : $F_{cs} = \mu_{cs} \cdot F_{ny}$
- tapadási : $0 < F_t < F_{t,max} = \mu_t \cdot F_{ny}$

és $\mu_{cs} < \mu_t$

tapadás: fa-fa : 0,6; acél-acél : 0,15; acél-jég: 0,027

$\mu_{cs} < \mu_t$ ⟶ álló tárgyat nehéz megmozdítani, de utána már csúszik

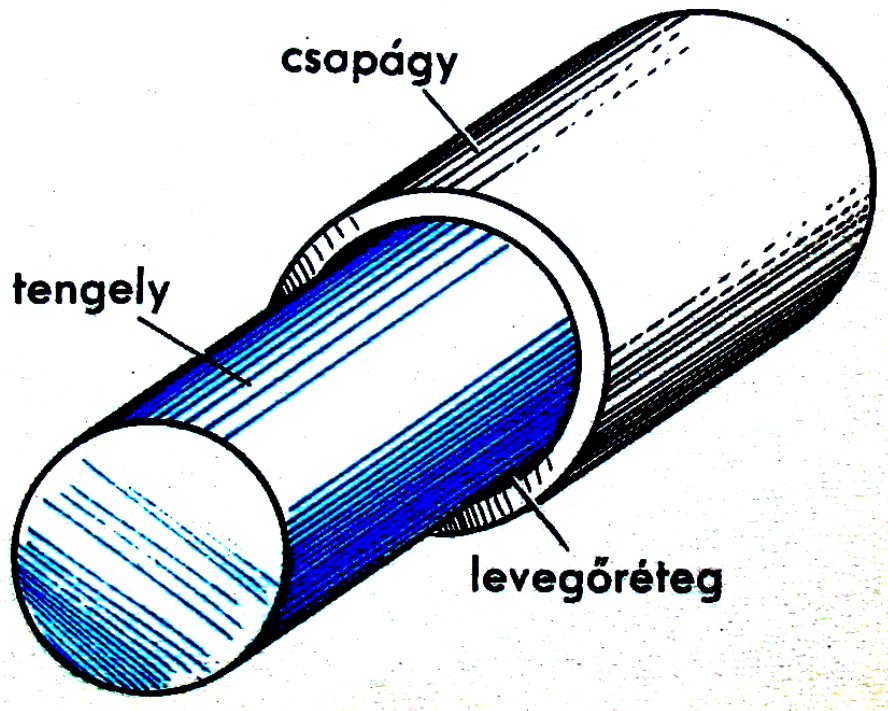
$\mu_{cs} < \mu_t$ ⟶ fékhatás : ne csússzon meg a kerék !!!

blokkolásgátló

elindulás ⟶ kipörgésgátló

csapágyak : olaj, gáz

↳ μ_{cs} csökkentése
kopás csökkentése

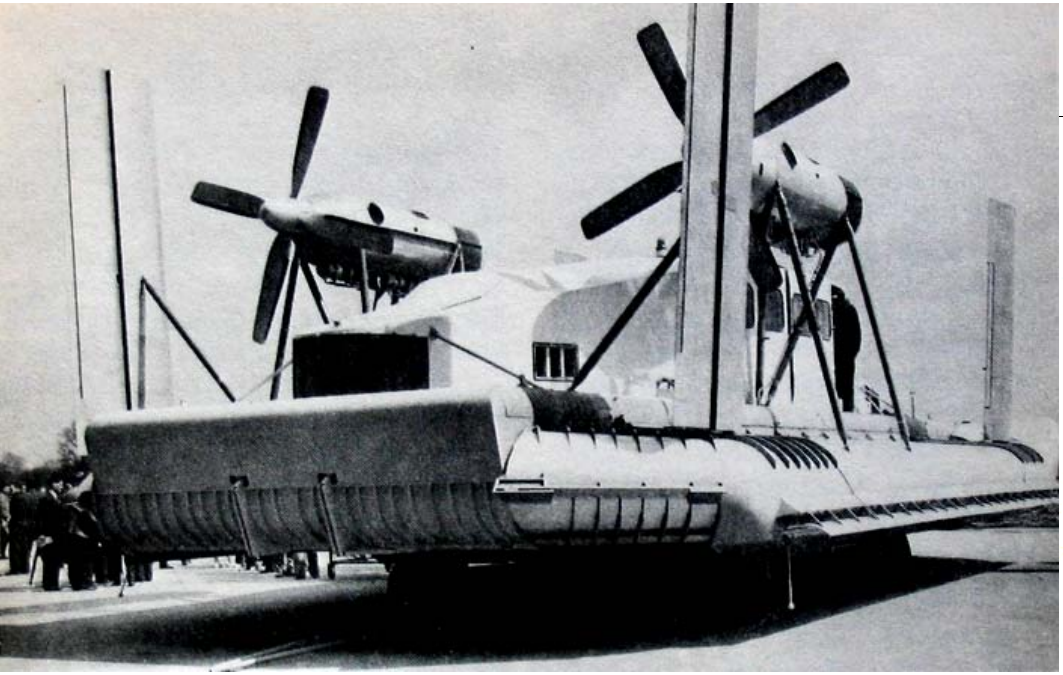


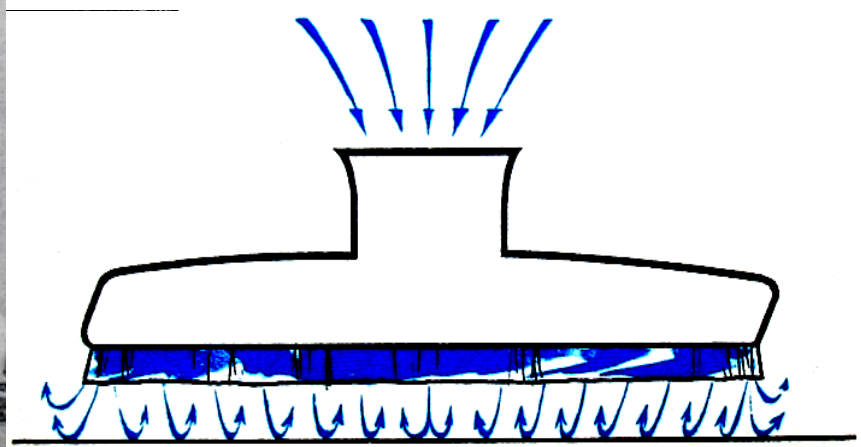
pl.: teherautón vaslemezek egymáson, kanyarodik, szemből jön a busz, lemezek lecsúsznak …
pl.: teherautó platóján ládát/konténert visz…

autógumi mérete, fékpofa/fékbetét mérete mégsem mindegy ⟶ miért ???

az anyagot le kell „reszelni” a felületről :
nagyobb felület ⟶ több atom ⟶ több kötés felvágása

pl. : az autó miért tud kanyarodni (miért nem csúszik ki egyenesen az útról) ?
mert ki akarna csúszni, de a tapadási súrlódási erő ezzel ellentétesen hat, azaz a körpálya közepe felé (= F_{cp}), ez tartja körpályán az autót.





közegellenállás :

folyadékban, gázban mozgó testek

tapasztalat : $F_{köz}$ ellentétes az elmozdulás irányával
nagysága függ a mozgó test felületétől,
sebességétől és a felület alakjától

$F_{köz} = -k \cdot A \cdot \rho \cdot v$ ← kis sebességeknél

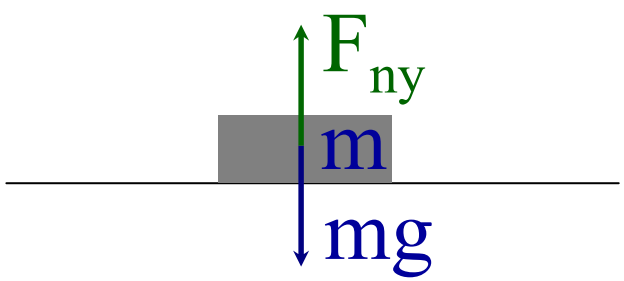
$F_{köz} = -k \cdot A \cdot \rho \cdot v^2$ ← nagy sebességeknél

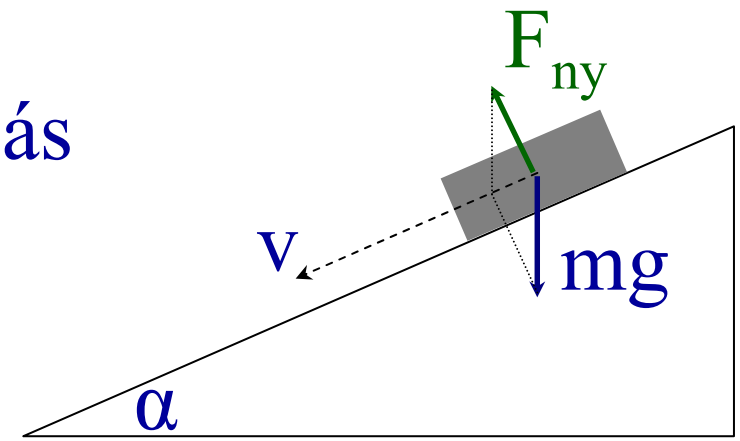
pl. : hordót visznek tetőcsomagtartón

kényszererő :

pl. alátámasztás (felfüggesztés) által a testre ható erő

ingamozgás





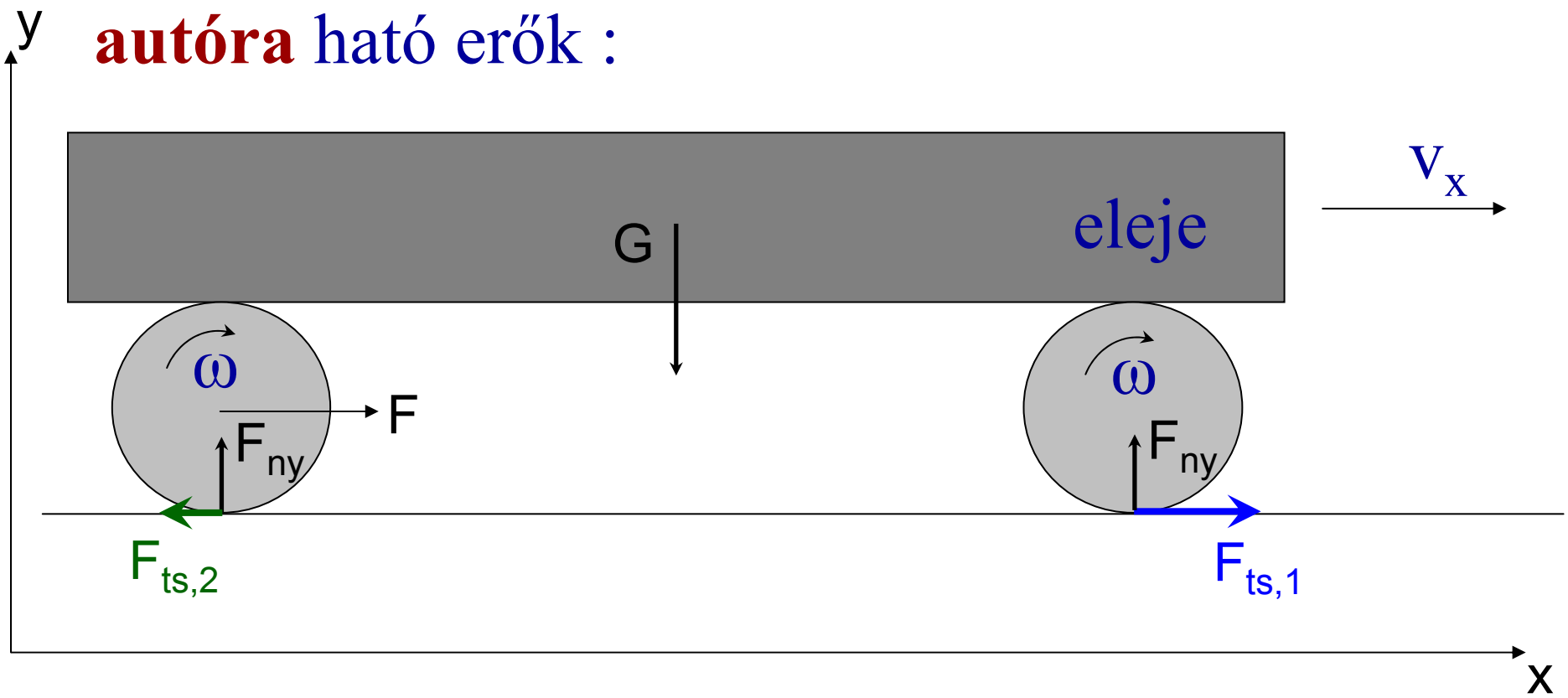
$F_{ny} = mg$

$F_{ny} < mg \quad (=mg\cos\alpha)$

F_{ny} **mindig merőleges** az alátámasztó felületre

pl. : az autó miért halad az úton ? :

autóra ható erők :



$$a_y = 0 \longrightarrow \sum F_{i,y} = 0 \longrightarrow G = 2 \cdot F_{ny}$$

$$\sum F_{i,x} = F_{ts,1} - F_{ts,2} > 0 \longrightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} \neq 0$$

felhajtóerő, Coulomb-erő, mágneses erő, van der Waals, stb … } ld. később

további tapasztalat :

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

↳ **Newton III. törv.**

(= hatás-ellenhatás törvénye)

= kölcs.hat.tv. újrafogalmazása

pl.: birkózáskor A felemeli B-t, akkor A erősebb, de mégis ugyanakkora erővel hat B-re, mint B A-ra !!!

pl.: ló húzza a lovaskocsit, akkor N.III. szerint a kocsi is ugyanakkora erővel húzza a lovat visszafele → miért megy mégis előre ???

pl.: lehet így utazni ? (Cyrano)

(mágnest feldobja, az a kocsit magához húzza, fent a golyót újra feldobja, és így tovább …)

miért ?

pl. : rúgóerő hatására létrejövő mozgás :

erőtörv.-t ism. → meghat.-hatjuk, h. adott kezdeti állapotból indulva hogyan fog mozogni : $x = x(t)$

ismert : $t = 0$ – ban $x = x(0)$, $v = v(0)$, k és m :

numerikus megoldás :

kis Δt → F_r változása elhanyagolható

≈ egyenl.gyorsuló mozgással mozog

→ $t = 0$ – ban : $$a(0) = \frac{F_r(x(0))}{m}$$

$t = \Delta t/2$ – ben : $$v(\Delta t/2) = v(0) + a(0) \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

elmozd. Δt alatt : $$x(\Delta t) = x(0) + v(\Delta t/2) \cdot \Delta t$$

majd ugyanígy tovább :

$t = \Delta t$ – ben : $\quad a(\Delta t) = \dfrac{F_r\left(x(\Delta t)\right)}{m}$

$t = 3\Delta t/2$ – ben : $\quad v\left(\frac{3}{2}\Delta t\right) = v\left(\frac{1}{2}\Delta t\right) + a(\Delta t)\cdot \Delta t$

kitérés $2\Delta t$-ben : $\quad x(2\Delta t) = x(\Delta t) + v\left(\frac{3}{2}\Delta t\right)\cdot \Delta t$

$t = 2\Delta t$ – ben : $\quad a(2\Delta t) = \dfrac{F_r\left(x(2\Delta t)\right)}{m}$

$t = 5\Delta t/2$ – ben : $\quad v\left(\frac{5}{2}\Delta t\right) = v\left(\frac{3}{2}\Delta t\right) + a(2\Delta t)\cdot \Delta t$

kitérés $3\Delta t$-ben : $\quad x(3\Delta t) = x(2\Delta t) + v\left(\frac{5}{2}\Delta t\right)\cdot \Delta t$

és így tovább tetsz. ideig …

kirajzoltatni az x(t), v(t) és a(t) függvényeket

analitikus megoldás :

N.II. $\rightarrow -k \cdot x = m \cdot a \longrightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_r}{m} = -\frac{k}{m}x$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

az ismtl. egy függvény : $x = x(t)$

és annak deriváltja

= differenciálegyenlet

a harm.rezgésnél volt olyan kitérés-idő függés, h. a hely és annak 2. deriváltja (=gyorsulás) megegyezett:

$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$

$\downarrow$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük, h. ez kielégíti a fenti diff. egy.-t

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega t+\varphi_0) \qquad x(t) = A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_0)$$

$$-A\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega t+\varphi_0) = -\frac{k}{m}\cdot A\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

de A és φ_0 tetszőleges lehet

→ meghatározhatók a kezdeti feltételekből :

t = 0 - ban : $x(0) = 0,\ v(0) = v_0$

$x(0) = A\cdot\sin(\omega\cdot 0+\varphi_0) = A\cdot\sin(\varphi_0) = 0 \longrightarrow A\cdot\sin(\varphi_0) = 0$

$v(0) = A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot 0+\varphi_0) = A\cdot\omega\cdot\cos(\varphi_0) = v_0$

$\longrightarrow A\cdot\omega\cdot\cos(\varphi_0) = v_0$

$$A\cdot\sin(\varphi_0) = 0 \rightarrow \boldsymbol{\varphi_0 = 0}$$

$$A\cdot\omega\cdot\cos(\varphi_0) = v_0$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{A = \frac{v_0}{\omega} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

tehát a megoldás :

$$\mathbf{x(t) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + 0\right)}$$

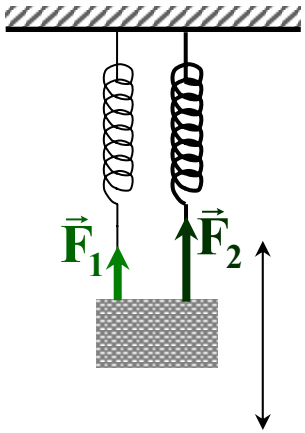
vagyis : a rúgón rezgő test harm. rezgőmozg. végez,
melynek körfrekv.-ja : $\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

$\downarrow$

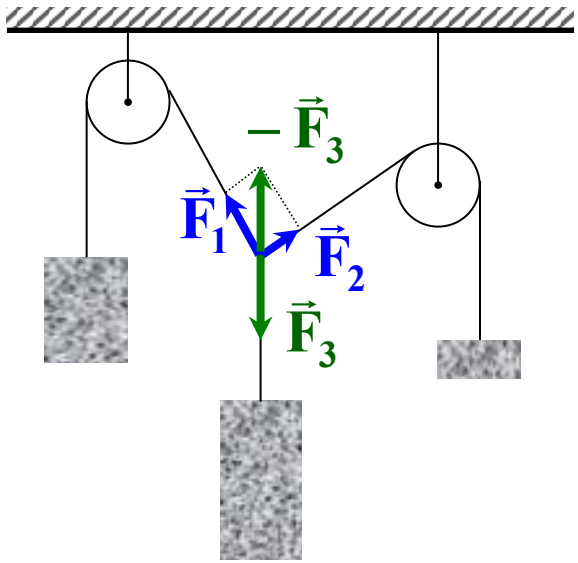
rezgésideje : $\mathbf{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

hasonló problémáknak **hasonló a megoldása** is !!!
lásd pl. : ingamozgás !

további tapasztalat :
ha több erő hat egy testre, pl. több rúgó:



vagy :



pl. speciálisan :
rúgón függő test
vsz. alátámasztáson levő test } 2 erő ⟶ egyensúly

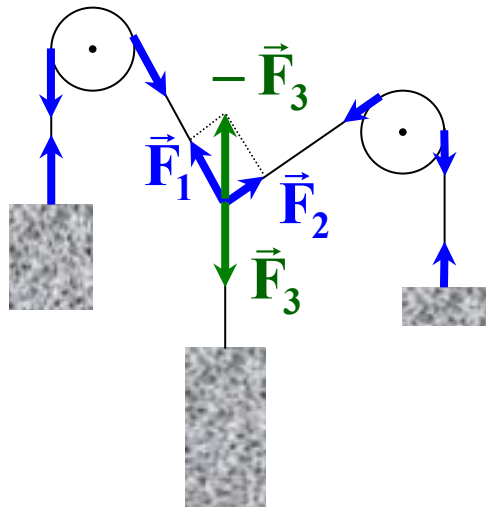
≠ nyugalom

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_i \longrightarrow \textbf{eredő erő}$$

⟶ **Newton IV. törv.**

(= erőhatások függetlenségének elve)

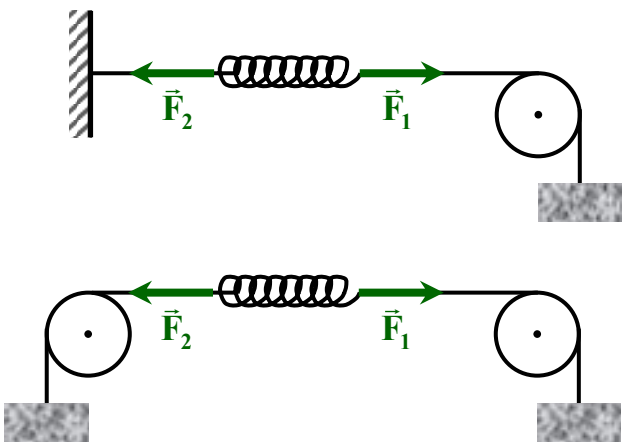
ha speciálisan : a kötélnek nincs súlya (tömege), vagy van, csak nyugvó kötél, akkor a meghúzott kötél az egyik végére ható erőt „változtatás nélkül továbbítja” a másik végén levő testhez :



rúgóra hasonlóan

vonatszerelvény …

de odafigyelni :



$\vec{F}_1 = \vec{F}_2$

pl.

magdeburgi féltekék :
8-8 ló ≠ 16 ló !!!
hanem csak 8 ló

pl.: mi van akkor, ha függőlegesen van a rúgó ? :

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x + mg = -k \cdot \left(x - \frac{mg}{k} \right)$$

$$x' := x - \frac{mg}{k}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

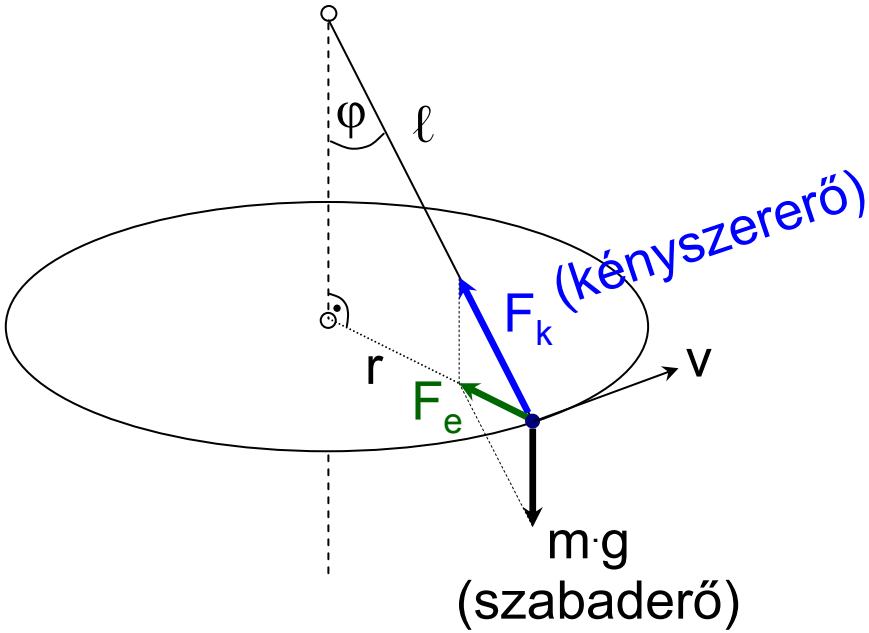
$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x' \quad \longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

tehát : ugyanaz, mint vsz. rúgó, csak

az $\frac{mg}{k}$ lesz az új egyensúlyi helyzet

pl. : kúpinga :

körmozgás :



$r = \ell \cdot \sin\varphi$

F_e a kp. felé mutat

$$F_{cp} = F_e$$

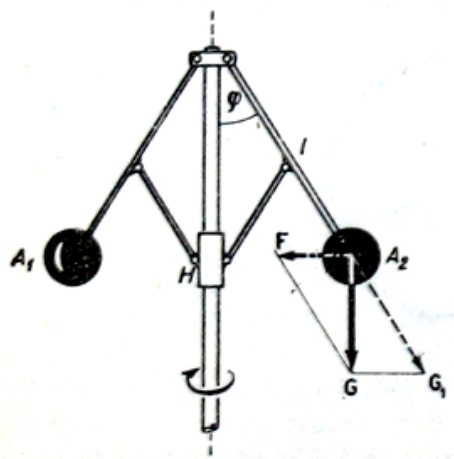
$$F_e = mg \cdot tg\varphi$$

N.II. : $F_{cp} = m \cdot a_{cp} = m \cdot r \cdot \omega^2$ $\quad \omega = 2\pi \cdot n$

$$mg \cdot tg\varphi = m \cdot (\ell \cdot \sin\varphi) \cdot \omega^2 = m \cdot (\ell \sin\varphi) \cdot (2\pi n)^2$$

$$\frac{g}{\cos\varphi} = \ell \cdot 4\pi^2 \cdot n^2$$

$$\cos\varphi = \frac{g}{\ell \cdot 4\pi^2 \cdot n^2} \rightarrow$$ centrifugális szabályozó :

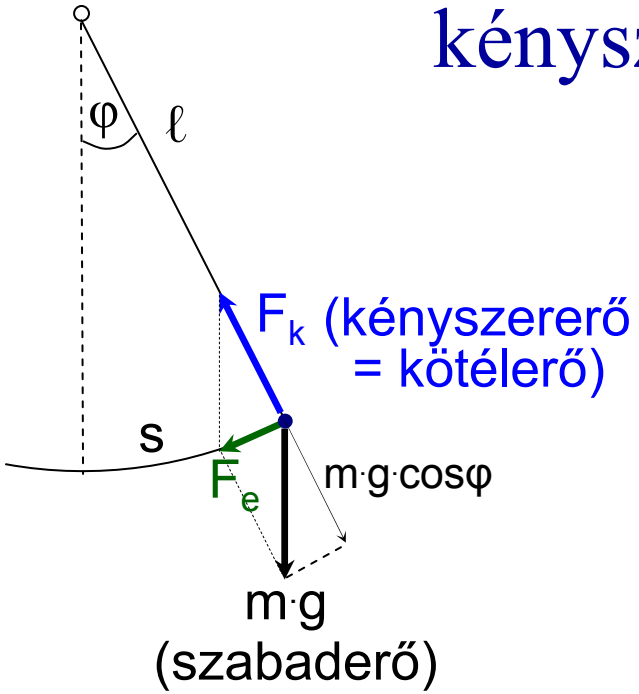


pl. : matematikai inga : = kötélinga, fonálinga

vékony, „súlytalan”, nyújthatatlan fonálon lengő test

kényszermozgás → síkmozgás (körpálya)

pillanatnyi helyzet : $\varphi = \varphi(t)$



erők : $m \cdot g$ ✔

F_k ?

kötélirányú és érintőirányú komponensekre bontva :

kötélirányban : $\sum F_{i,k} = 0$

$$F_k - m \cdot g \cdot \cos\varphi = 0$$

érintő irányában : $F_e = m \cdot g \cdot \sin\varphi$

N. II. : $m \cdot a = F_e$ *mozgásegyenlet*

$$m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \cdot \sin\varphi \qquad \text{és} \qquad s = \ell \cdot \varphi$$

$$m \cdot \ell \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \cdot \sin\varphi$$

ha φ kicsi ⟶ $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \cdot \varphi \quad = -\omega^2 \cdot \varphi, \quad \text{ahol } \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

ez ugyanolyan egyenlet, mint a harm. rezgőmozg. :

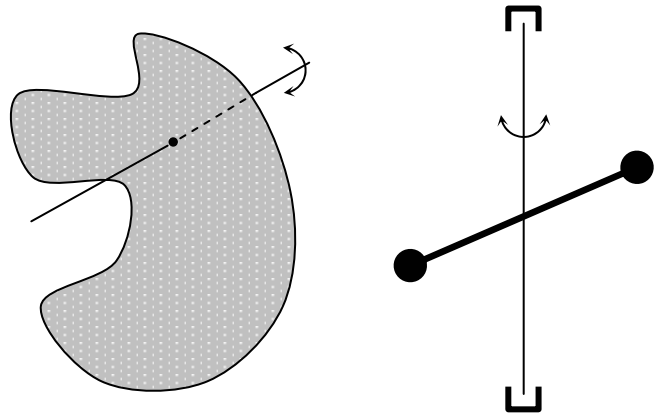
$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha_k)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\ell / g} \longrightarrow \text{g - t lehet mérni}$$

de : T függ φ_0-tól : nagyobb amplitúdó

→ nagyobb T !!!

hasonlóan a fizikai inga :
T függ a geometriai méretektől
g - t itt is lehet mérni



torziós inga : ezeket ld. később
(merev testeknél)

pl. : égitestek mozgása :

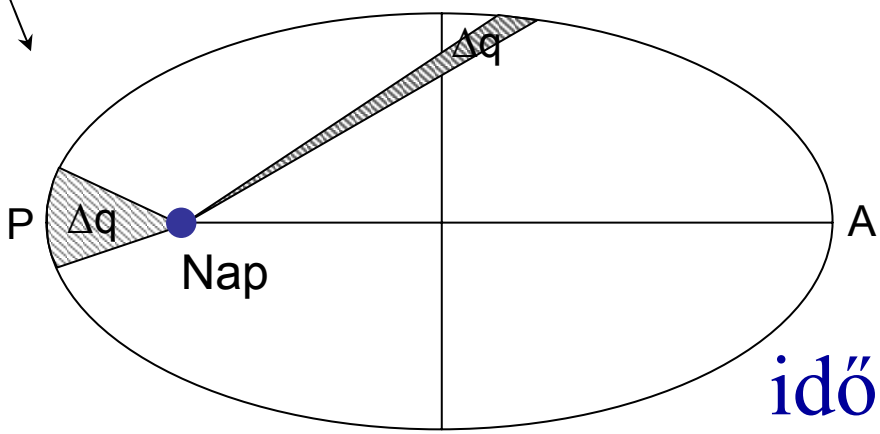
(bolygómozgás, mesterséges égitestek, Kepler törv.-i)

i.e. 2.sz. : geocentrikus világkép (Ptolemaiosz) = kör-pályák, kp.-ban a Föld

≈1500 : helocentrikus világkép (Kopernikusz) Nap körüli pályák, és tengely körüli forgás

1609-1619 : **Kepler-törv.-k :** Tycho Brahe is !

1. ellipszispálya, egyik gyújtópt.-ban a Föld;
2. a Naptól a bolygókhoz húzott sugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol;
3. a bolygók keringési idők négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint az ellipszispályák nagytengelyeinek köbei.



időegység alatt súrolt terület = területsebesség $\approx \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = \text{áll.}$

a Föld sebessége legnagyobb P-ben (január 3-án) legkisebb A-ban

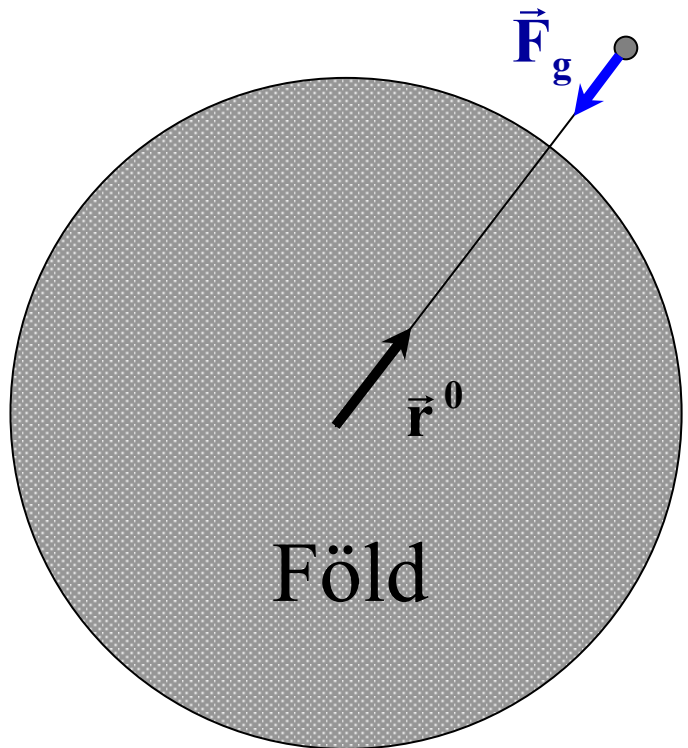
bolygómozgás = **centrális mozgás** = a bolygóra ható erő mindig egy centrum felé mutat → a gyorsulása is → **centrális erők**

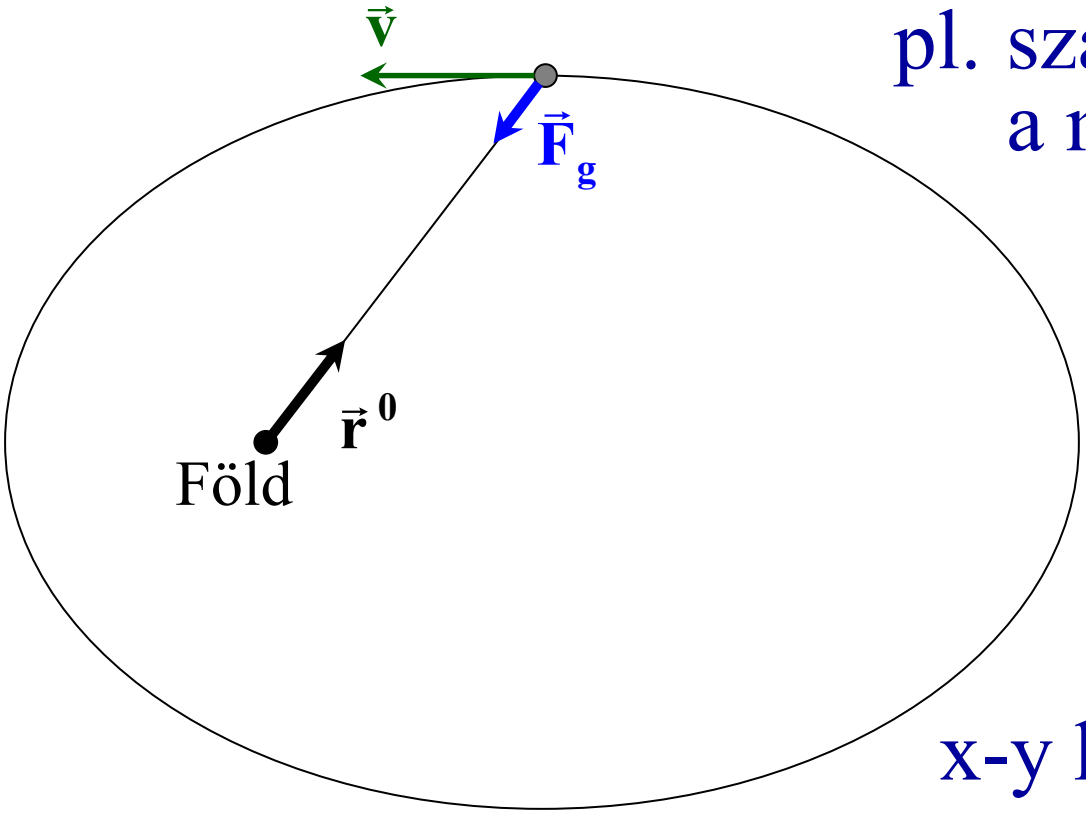
tétel :
∀ centrális mozgásnál a tömegpt. pályája síkgörbe és a területi seb. állandó.
megfordítva : ha a pálya síkgörbe és a területi seb. áll. akkor a mozgás centrális mozgás.
biz. : ld. könyvekben…

már Kepler is sejtette az ált. tömegvonzás törv.-t

tömegpontoknak vesszük

$$\vec{F}_g = -\gamma \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{r}^{\,0}$$





pl. számítógéppel szimulálni a mozgást :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F}_g = -\gamma \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{r}^{\,0}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\gamma \frac{M}{r^2} \vec{r}^{\,0}$$

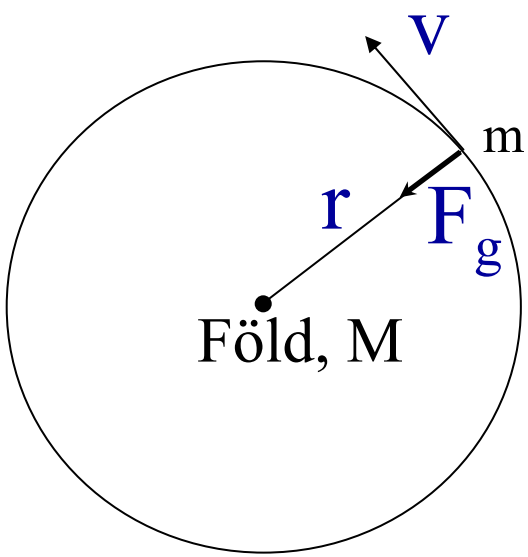
x-y koordináta rendszerben

+ kezdeti feltételek : $x(0)$, $y(0)$, $v_x(0)$, $v_y(0)$

- ellipszis alakú pályák, egyik fókuszban a Föld (Kepler)
- nagytengely mérete és keringési idő v_0-lal nő
- ha speciálisan v_0 olyan, h. $a_{cp} = v_0^2/r$, ⟶ $F_{cp} = \gamma mM/_{r2} = mv_0^2/r$ ⟶ körpálya;

geostacionárius pálya

geostacionárius pálya :



$$F_g = \gamma \frac{mM}{r^2} = ma_{cp} = mr\omega^2$$

$$\gamma M = r^3 \omega^2$$

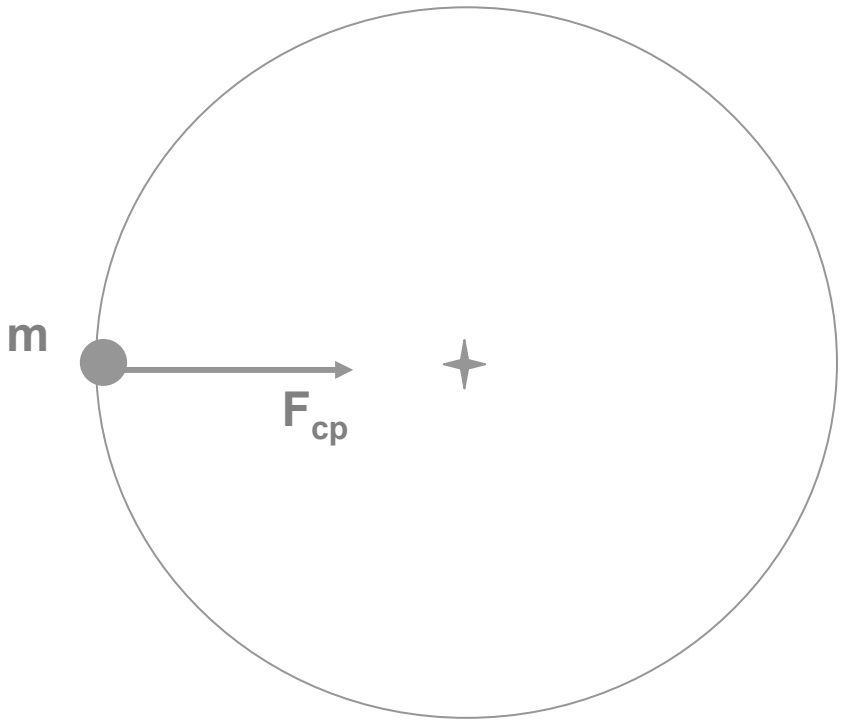
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$ és T = 24h = 86400s

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}} = \ldots \approx 36e\ \text{km}$$

pl. távközlési műholdak

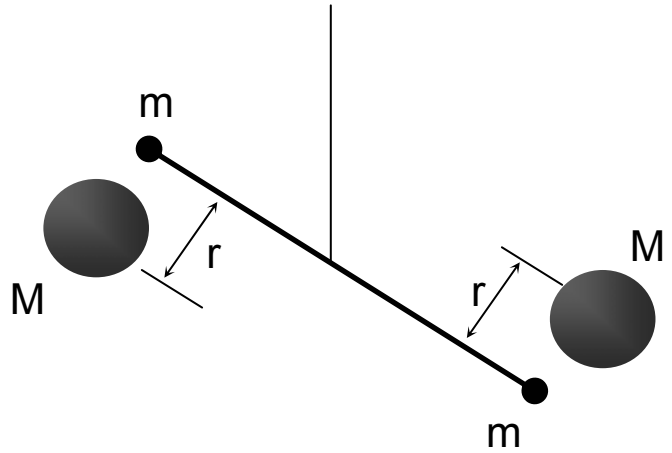
számítással kimutatható, h. a homogén gömb helyettesíthető egyetlen, ugyanolyan tömegű tömegponttal

de : F_{cp} NEM erőtörvény !!!



F_{cp} lehet pl kötélerő, rúgóerő, grav.erő, … (ami „húzza” a testet, h körpályán maradjon)

a grav. állandó meghatározása : Cavendish, 1798



M tömegeket tett a m golyók mellé szimmetrikusan és mérte a torziós szál szögel-fordulását

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$$

torziós ingát ld. később !

a Föld felületén :

$$\gamma \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{M}_F}{\mathbf{R}^2} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{g} \longrightarrow$$

a Föld tömege :

$$\mathbf{M}_F = \frac{\mathbf{g}}{\gamma}\mathbf{R}^2 = \mathbf{5.97 \cdot 10^{24}\ kg}$$

a Föld sűrűsége :

$$\bar{\rho} = \frac{M_F}{\frac{4}{3} R^3 \pi} \approx 5.5 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

a felszínen csak $\bar{\rho} \approx 2.5 \frac{kg}{dm^3}$ ⟶ a belsejében

$$\rho > 5.5 \frac{kg}{dm^3}$$

pl. a Nap tömegének becslése :

M_{Nap}, m_{Mars}, r, T ismert ⟶

$$m_{Mars} \cdot a_{cp} = m_{Mars} \cdot r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = F_{cp} = \gamma \frac{m_{Mars} \cdot M_{Nap}}{r^2}$$

$$M_{Nap} \approx 332 \cdot 10^3 M_F$$

hasonlóan a holdakkal rendelkező bolygókra is…

az $\mathbf{m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} = -\gamma \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{r}^{\,0}}$

mozgásegyenletből matematikai úton levezethetők a Kepler-törv.-k

az is köv., h. más kúpszelet is lehet a pálya, pl. üstökösnél parabola v. hiperbola

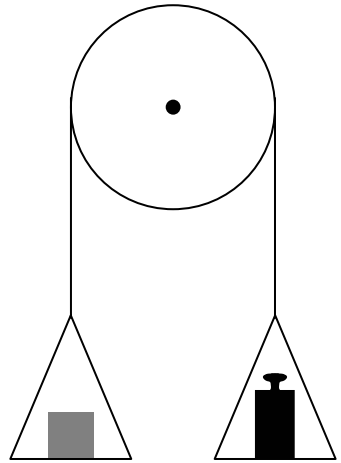
sztatikai erőmérés, súlyos és tehetetlen tömeg :

$G = m \cdot g$ ⟶ a súly a hellyel változik; különböző testek súlya ugyanazon a helyen a tömegtől függ

rúgóra akasztott test nyugalomban van : $a = 0 \rightarrow$ a rá ható erők eredője nulla

rúgós erőmérő ⟶ egyszerű erőmérés = sztatikai erőmérés

súly ~ tömeg → tömegmérés :
(G = m·g)



mérlegek
(több ezer éve)

etalonok

ez a tömeg (súlyos tömeg, m_s) nem ugyanaz, mint amit ütközésekkel definiáltunk (tehetetlen tömeg, m_t), de pl. ha ez a test szabadon esik :

$$m_t \cdot a = m_s \cdot g$$

$$\frac{m_s}{m_t} = \frac{a}{g}$$

és a = g minden testre egyforma → $\mathbf{m_t = m_s}$

Eötvös Loránd :

$m_t = m_s$ egyenlőség $5 \cdot 10^{-9}$ relatív hibával teljesül

sűrűség, fajsúly :

homogén
inhomogén
} anyag { $\rho = \frac{m}{V}$; $\rho = \frac{dm}{dV}$ } $\frac{kg}{m^3}$, $\frac{g}{cm^3}$

pl. : 1 kg víz 4 °C-on, normál nyomáson 1 dm^3 (=1ℓ)
$\rho_{víz} = 1\ kg/dm^3$

pl. : galvanizált fémekre : ρ = átlagsűrűség
vas hajó sűrűsége is átlagsűrűség !

fajsúly …

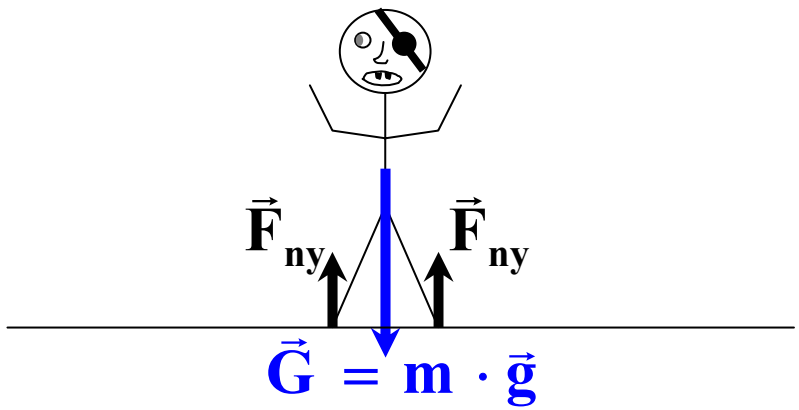
súlytalanság :

ha csak a saját súlya hat rá :

pl. : szabadon eső test

Föld körüli körpályán keringő test

a ránk ható súlyerőt akkor érezzük, ha az alátámasztás által kifejtett nyomóerő is hat :



$$2\vec{F}_{ny} = m\vec{g}$$

pl. : hajítás dinamikai leírása :

csak a nehézségi erő hat a testre : N.II. : $m \cdot a = m \cdot g$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} \quad \longleftarrow \quad m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m \cdot \vec{g}$$

tf.h. g = áll.

a Földhöz rögz., függ. fölfele irányított z-tengely esetén :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x = const_x \qquad \frac{dy}{dt} = v_y = const_y \qquad \frac{dz}{dt} = v_z = -g \cdot t + const_z$$

$$x = v_x \cdot t + c_1 \qquad y = v_y \cdot t + c_2 \qquad z = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_z \cdot t + c_3$$

$$x = v_x \cdot t + c_1 \qquad y = v_y \cdot t + c_2 \qquad z = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_z \cdot t + c_3$$

6 db ismeretlen : v_x, v_y, v_z és $c_1 \ldots c_3$

meghatározásuk a kezdeti feltételekből

ha pl. : t = 0 – ban $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$

$x_0 = c_1$, $y_0 = c_2$ és $z_0 = c_3$

$const_x = v_x = v_{0x}$, $const_y = v_y = v_{0y}$ és $const_z = v_{0z}$

hajítás

kényszererők, kényszermozgás :

a Földön is tudunk inerciamozgást létrehozni

közelítőleg !

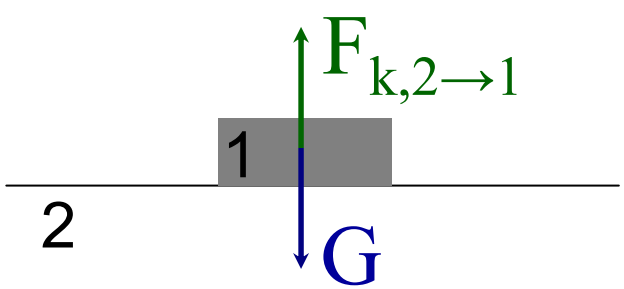
pl. légpárnás asztalon vagy sinen

→ az alátámasztás a tömegpontot a felületen való maradásra kényszeríti

↓

kényszererő, az alátámasztás pedig a **kényszer**

pl. : nyugvó asztalon álló test még egyszer :



$\vec{F}_{eredő} = \vec{G} + \vec{F}_{k,2\to1}$

mivel áll : $\vec{a} = 0$

$\vec{F}_{k,2\to1} = -\vec{G}$

($F_{ny} = -mg$)

ha az alátámasztás mozog is, pl. *a* gyorsulással süllyed egy lift :

$$\vec{F}_{\text{eredő}} = \vec{G} + \vec{F}_{k,2\to1} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F}_{k,2\to1} = -\vec{G} + m \cdot \vec{a} = -m(\vec{g} - \vec{a})$$

$$(m \cdot g - F_{ny} = m \cdot a)$$

$$(F_{ny} = m \cdot (g - a))$$

N.III. $\longrightarrow$ $F_{test\to asztal} = -F_{k,2\to1} = G$

pl. : miért van „bedöntve” a kanyar ?

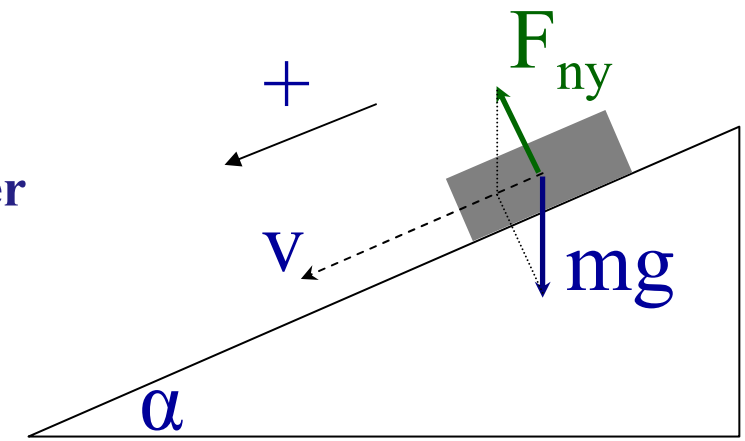
pl. : két kötélen felfüggesztett test
lámpa két fal között
kifeszített dróton
lejtőn lecsúszó test

} ld. önállóan !

pl.: lejtőn lecsúszó test :

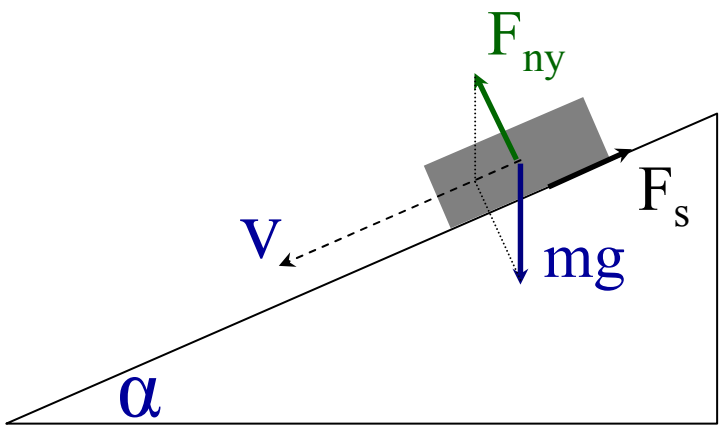
N.II.: $\mathbf{m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{szabad} + \vec{F}_{kényszer}}$

$\mathbf{a = g \cdot \sin\alpha}$



$F_e = mg \cdot \sin\alpha$

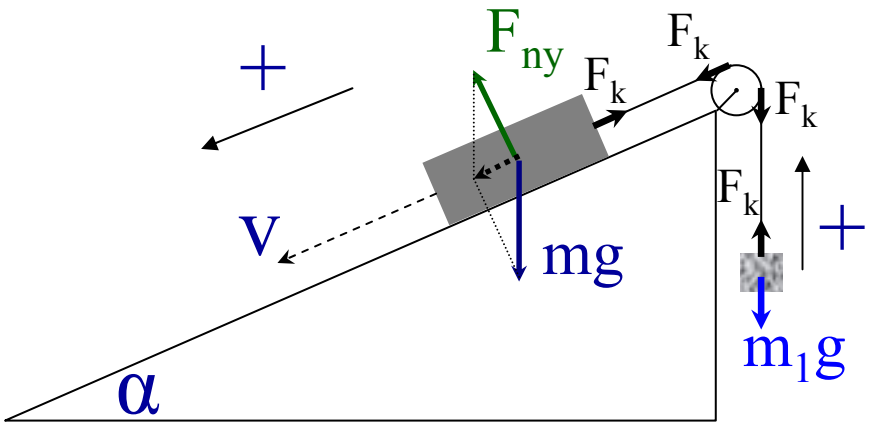
ha adott μ_{cs} :



$F_e = mg \cdot \sin\alpha - F_s = m \cdot a$

$mg \cdot \sin\alpha - \mu_{cs} \cdot mg \cdot \cos\alpha = m \cdot a$

$\mathbf{a = g \cdot (\sin\alpha - \mu_{cs} \cdot \cos\alpha)}$



az m tömegű testre :

N.II.: $\mathbf{m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}}$

$m \cdot a = mg \cdot \sin\alpha - F_k$

az m_1 tömegű testre N.II. : $\mathbf{m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}}$

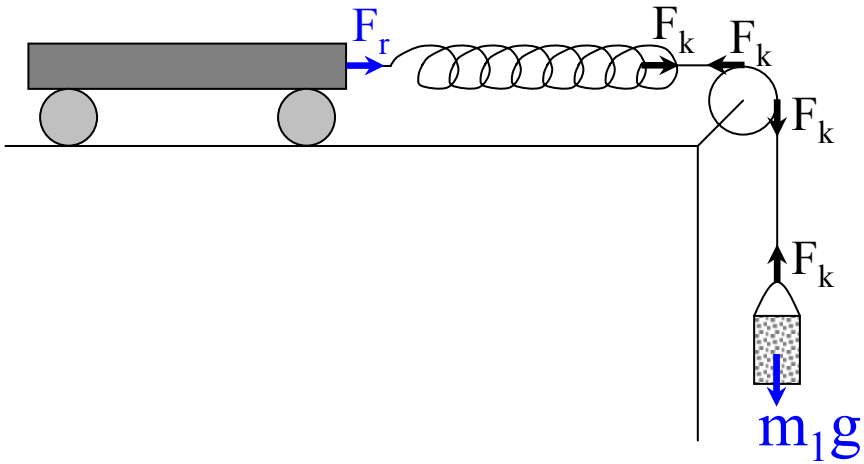
$F_k - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a$

ha a kötél nyújthatatlan !

ha a kötél súlytalan !

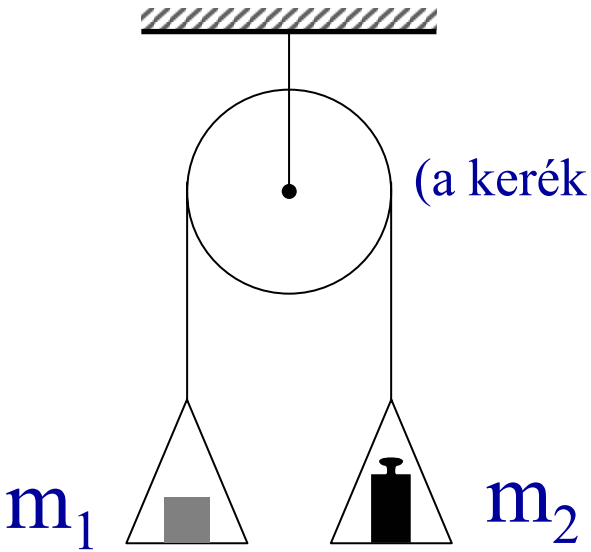
2 egyenlet és 2 ismeretlen ⟶ F_k és a meghatározható

ha még súrl. is van …

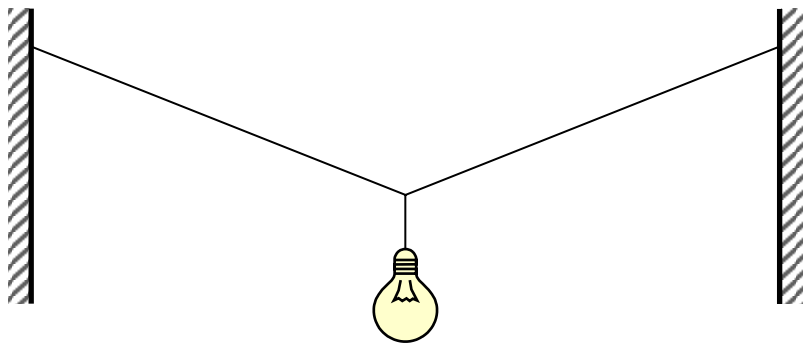


(a kerék és a rúgó súlytalan)

$$F_r = F_k$$



(a kerék súlytalan)



mozgás mozgó vonatkoztatási rendszerben :

Galilei-féle relativitási elv : egymáshoz képest egyenletesen haladó vonatk.rdsz.-k közül nem tudunk egy abszolút nyugalomban levőt kiválasztani

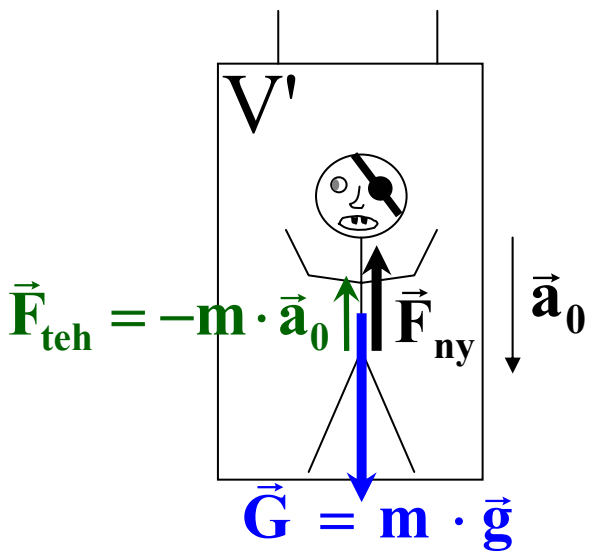
pl. : egyenl. mozgó vonaton egy inga ugyanúgy leng, mint az állomáson

gyorsulva haladó vonatk. rdsz. :

pl. : mekkora erő hat egy a_0 gyorsulással lefele induló liftben álló emberre ? :

$\vec{F}_{teh} = -m \cdot \vec{a}_0 \longrightarrow$ **tehetetlenségi erő**

N.II. érvényes marad



az ember a lifthez képest nem gyorsul

$$\sum_i \vec{F}_i = \underbrace{\vec{G} + \vec{F}_{ny} + \vec{F}_{teh}}_{\vec{F}_{ny}\text{ meghatározható}} = m \cdot \vec{a} = 0$$

forgó rendszerben :

ha egy V' rendszer egyenletes $\vec{\omega}$ szögsebességgel forog egy „nyugvó” V-hez képest :

$$\vec{F}_{cf} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r} \quad \rightarrow \quad \textbf{centrifugális erő}$$

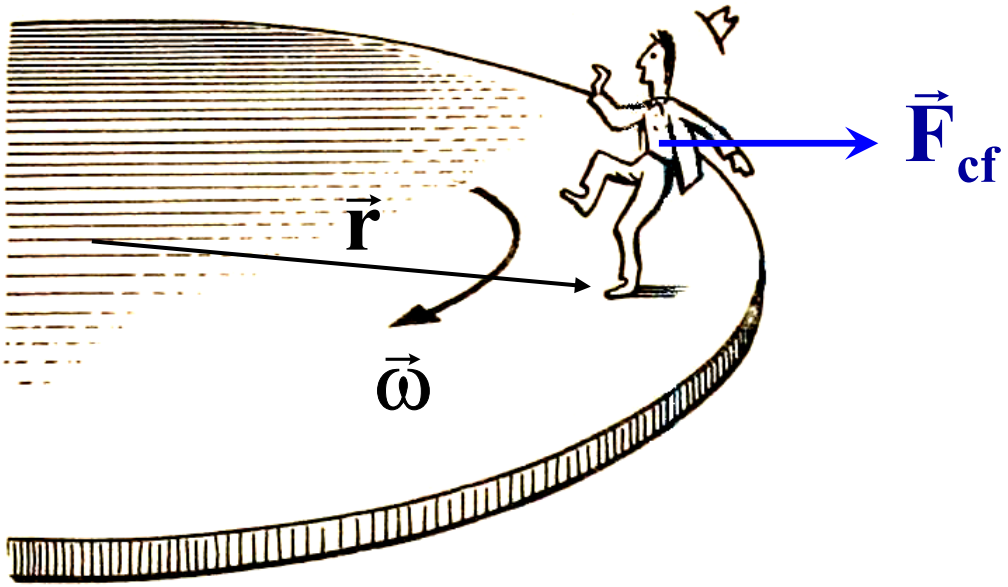
$$\vec{F}_{Co} = 2m \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega} \quad \rightarrow \quad \textbf{Coriolis-erő}$$

ezekkel N.II. forgó rdsz.-ben is igaz :

$$m \cdot \vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_{Co}$$

pl. : forgó rendszerben
álló test

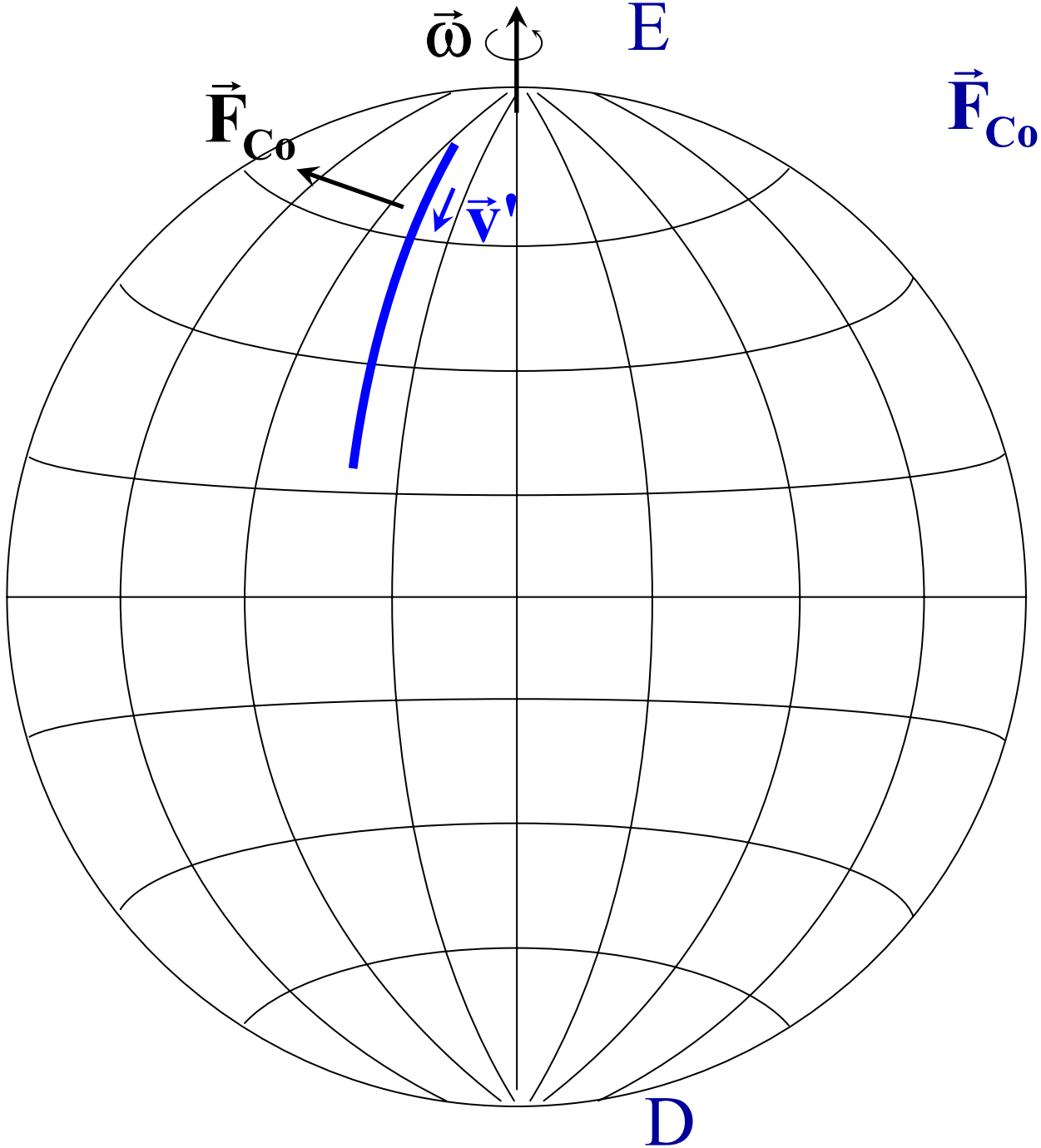
$$\vec{F}_{cf} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$$



pl. : az északi féltekén É-D irányban folyó folyók a jobb partjukat mossák, vagy
az É-D irányban haladó vonatok kerekei a jobb oldali sint jobban koptatják

$$\vec{F}_{Co} = 2m \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega}$$ miatt

a kádban lefolyó víz forog



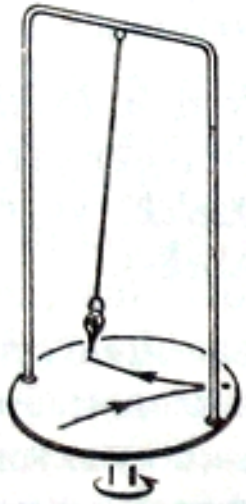
$$\vec{F}_{Co} = 2m \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega}$$

a Föld tényleg forog ? :

igen, bizonyíték a Foucault-féle ingakísérlet :

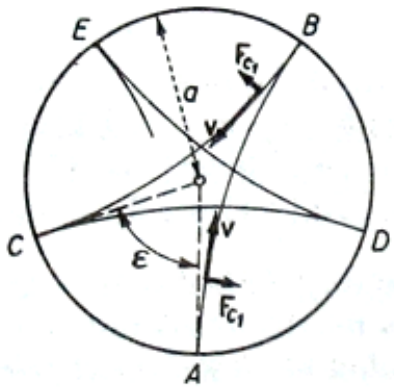
hosszú kötélen nagy tömeg leng

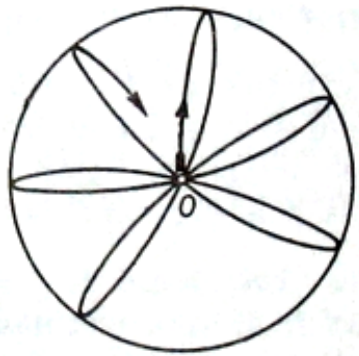
⟶ sokáig leng, kis csillapodással



kezdeti lengési síkot megjelölik, tapasztalat :

lengési sík óránként kb. 15°-t elfordul





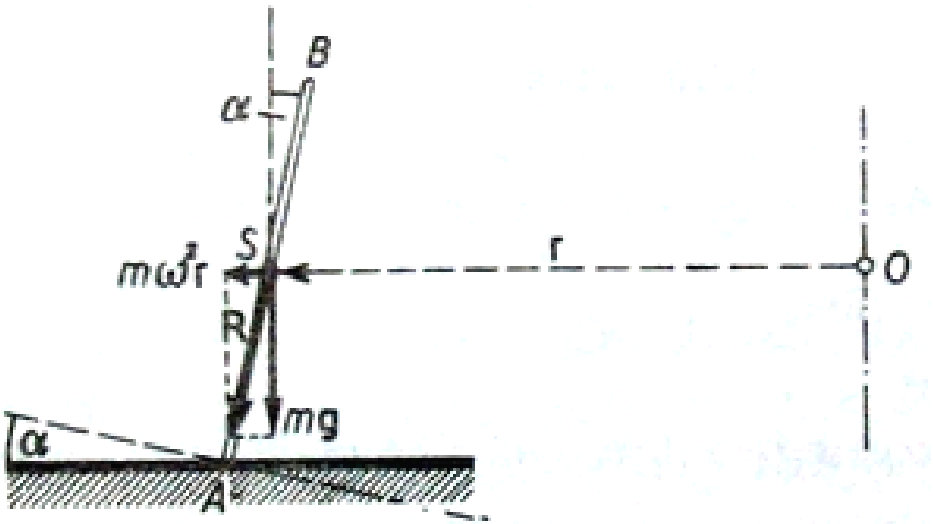
értelmezés :

forgó rdsz.-ben : a testre oldalirányú eltérítő erő hat, a pillanatnyi seb.-hez képest jobb oldal felé (= Coriolis-erő)

inerciardsz.-ben : az inga megtartja lengési síkját, csak a Föld „kifordul” alóla

példák, alkalmazások :

1. kerékpár ($\vec{v}$) bedől (α) a kanyarban :



$\omega = \frac{v}{r}$ szögseb.-el forgó rdsz-ből nézve :

a bicikli nyugalomban van :

$m\vec{g}$ és $m\vec{r}\omega^2$ eredője $\vec{R}$

$\vec{R}$ a bicikli síkjában kell, h. legyen

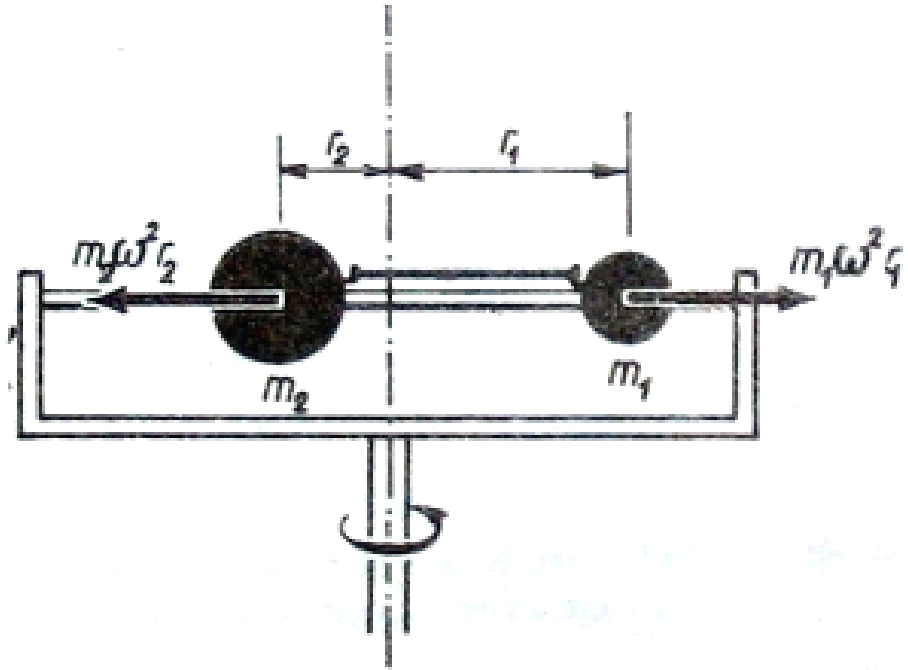
$$\rightarrow \quad tg\alpha = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{v^2}{rg}$$

a talaj síkjának $\approx \perp$ kell lenni biciklire, mert a tapadás nem tud egyensúlyt tartani $\rightarrow$ kicsúszik oldalra

$\rightarrow$ a versenypályák külsejét megemelik

kanyarban a vasúti sin külső szálát is feljebb teszik

2. két golyó centrifugális géppel megforgatva :



golyók a forgó rdsz.-ben egyensúlyban vannak, ha

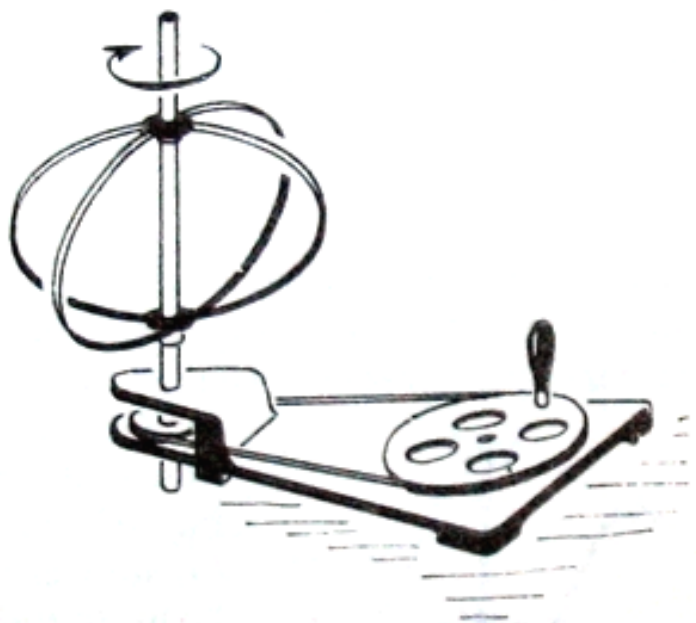
$$m_1 \vec{r}_1 \omega^2 = m_2 \vec{r}_2 \omega^2$$

$$m_1 \vec{r}_1 = m_2 \vec{r}_2$$

3. forgó abroncs belapul : ⟶

kísérlet !

kerékre kifelé ható $F_{cf} = F_{deform}$



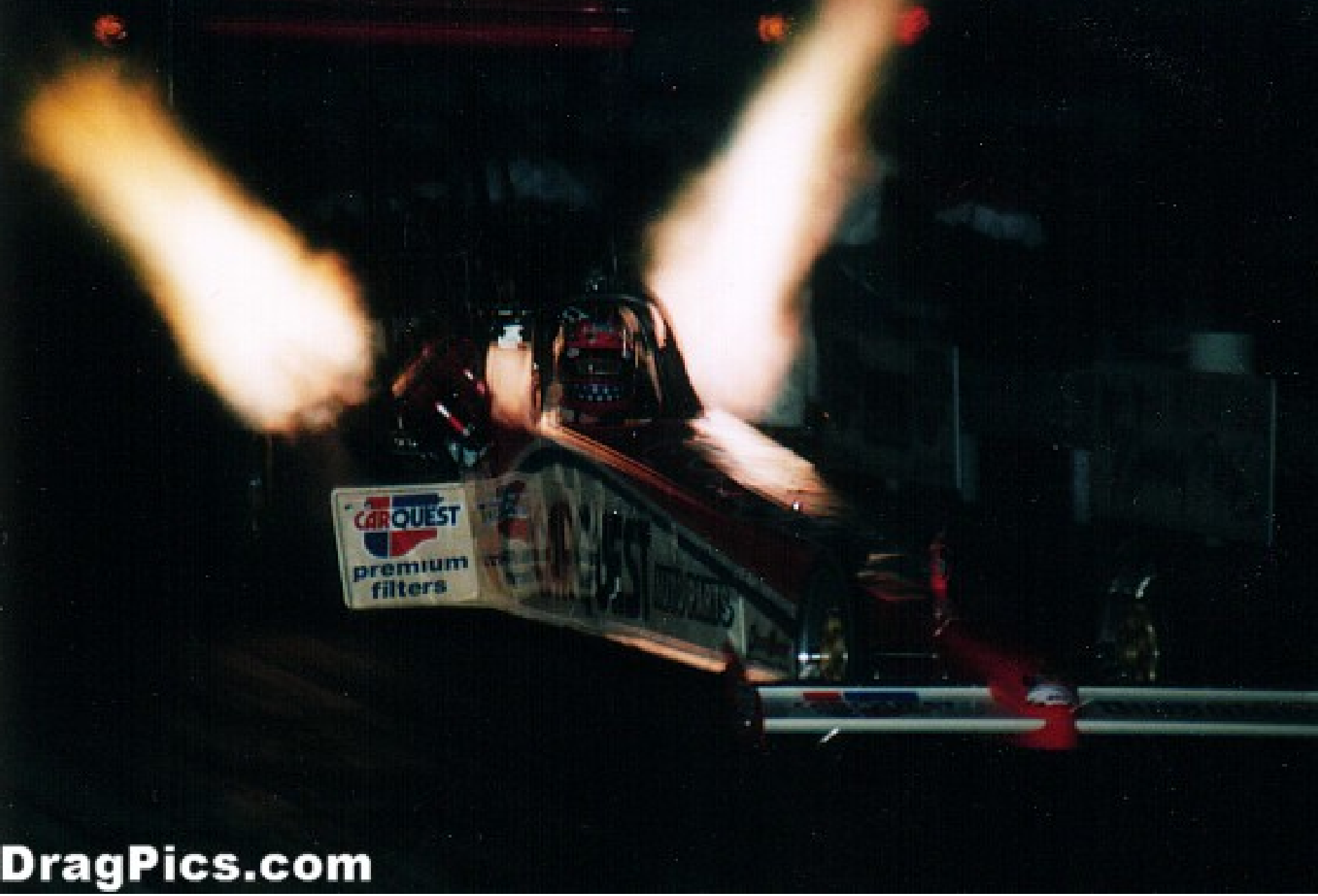
pl. gyorsulási verseny:
hátsó kerék

WIX
Castrol
DragPics.com

DragPics.com

DragPics.com

STIHL
KUBOTA
FORD
JACKSON
RACE CARS
Barry Allen
RACE ENGINES
DragPics.com


CARQUEST
premium
filters
DragPics.com

CADENCE
CADENCE
mobile audio

DragPics.com

Rock'n Roll
THUNDER
DragPics.com

GRAND BEND MOTORPLEX
Bob Motz
DragPics.com

4. dinamikus merevség :

kísérletek :

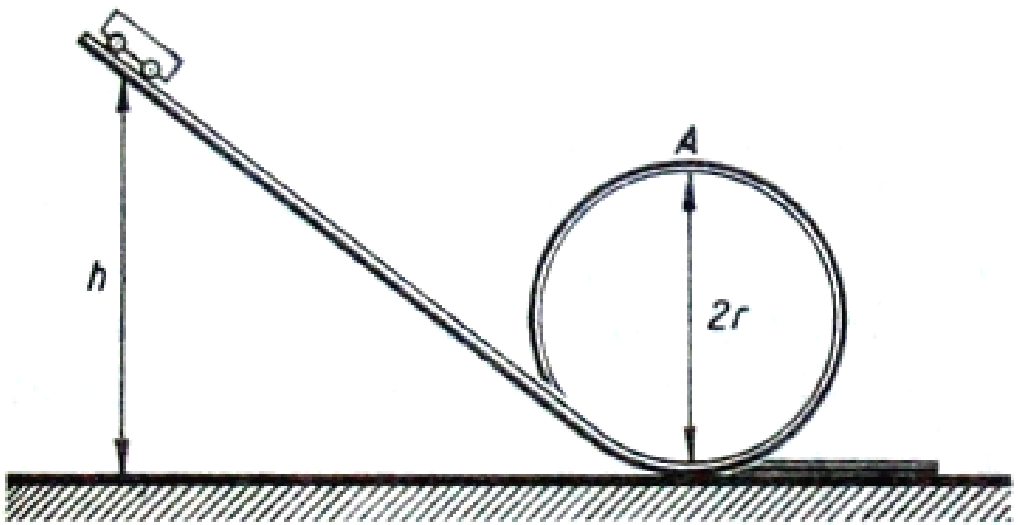
forgó lánc „kemény” → gurul, akadályokat átugrik
forgó papírlap „merev” → fűrészelni lehet vele

5. centrifuga : háztartás, biológia, élelmiszeripar,…

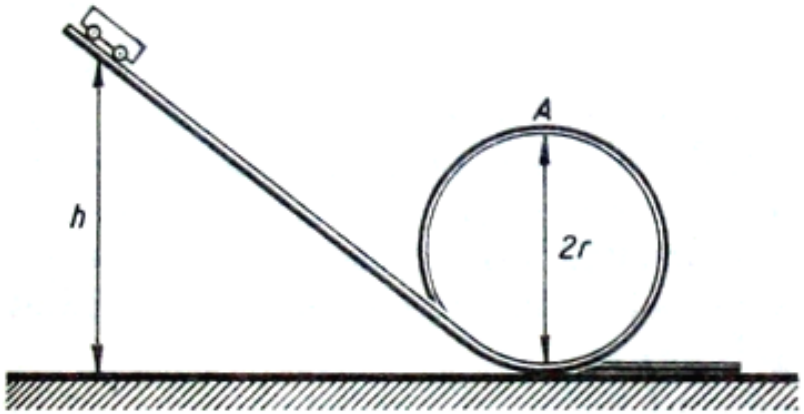
6. centrifugál szabályozó

7. szivattyúk

8. cirkusz:



h = ?



a kocsiban ülve a körpályán forgó rendszerből nézzük :

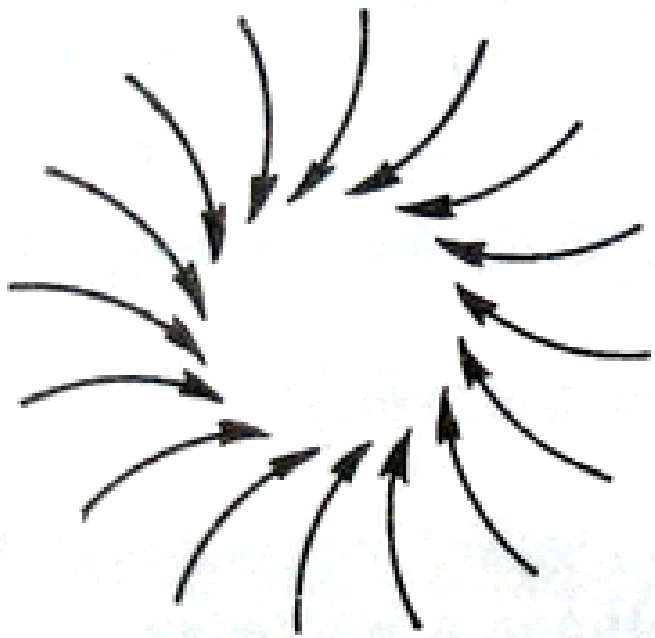
A-ban F_{cf} fölfele min. akkora legyen mint m·g lefelé :

$$\frac{mv_A^2}{r} \geq mg$$

(+ energiamegmaradás → később)

9. ciklonok : (az É-i féltekén) → (F_{Co})

passzátszelek, ÉK és DK felé, a levegő a kisebb nyomású helyekre áramlik + F_{Co}



10. a lövedékek jobbra eltérnek

11. a Föld a sarkoknál belapul

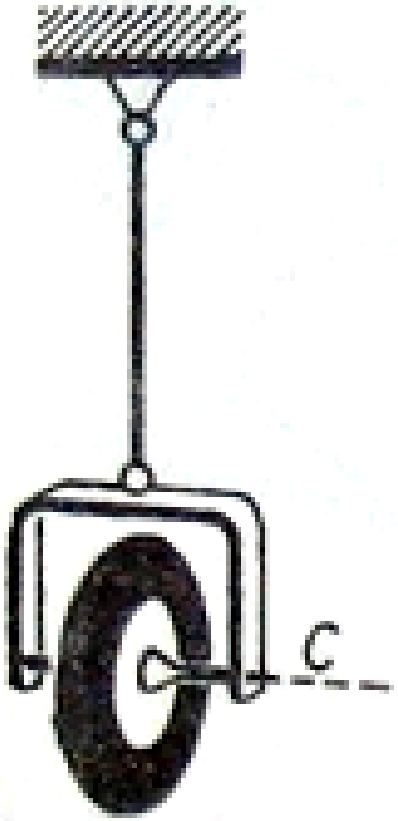
12. a szabadon eső testek K-felé eltérnek :
a 45 szélességi foknál: 100 m magasságnál 1.5 cm-t

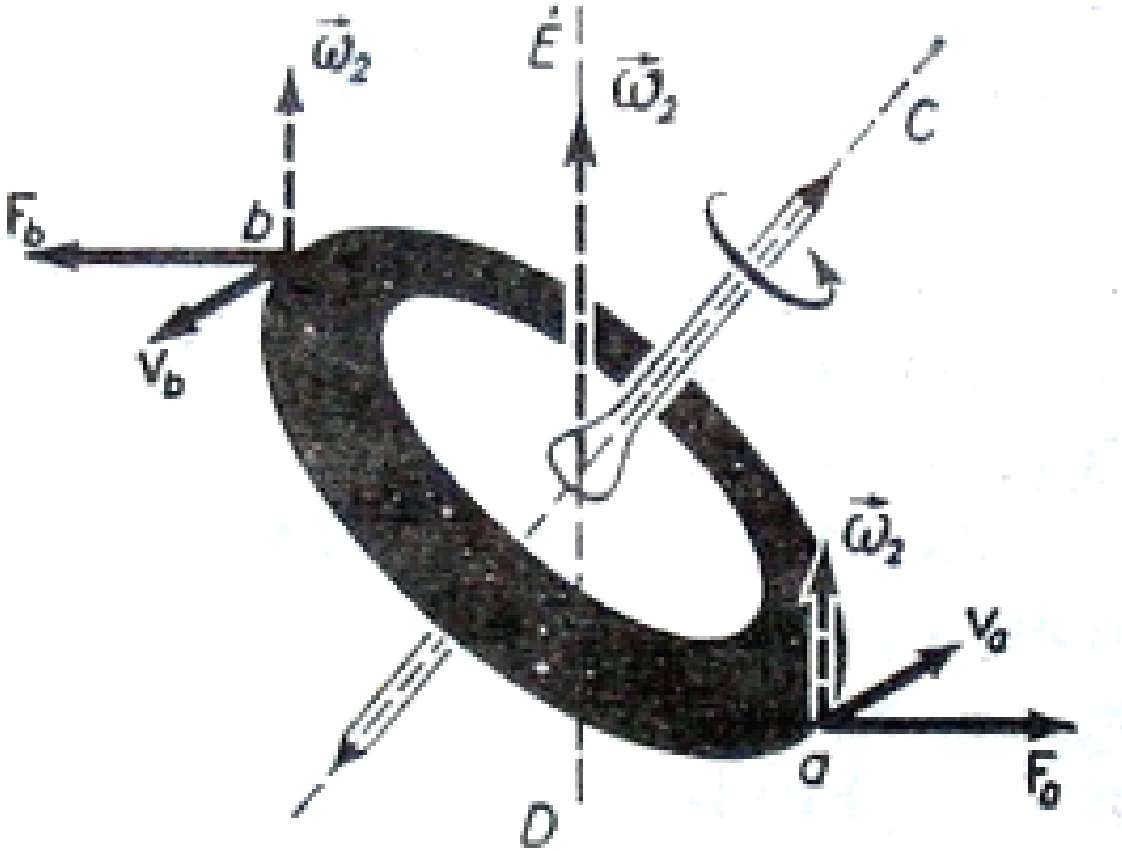
13. ha egy test K→NY irányban mozog :
F_{Co} lefelé mutat ⟶ látszólagos súlynövekedés
Eötvös-effektus

NY→K irányban fordítva

pörgettyűs iránytű :
Foucault, 1852

a C szimm.-teng. a függ. körül elfordulhat
a pörgettyű C körül gyorsan forog ⟶ a rá ható F_{Co} miatt beáll É-D irányba

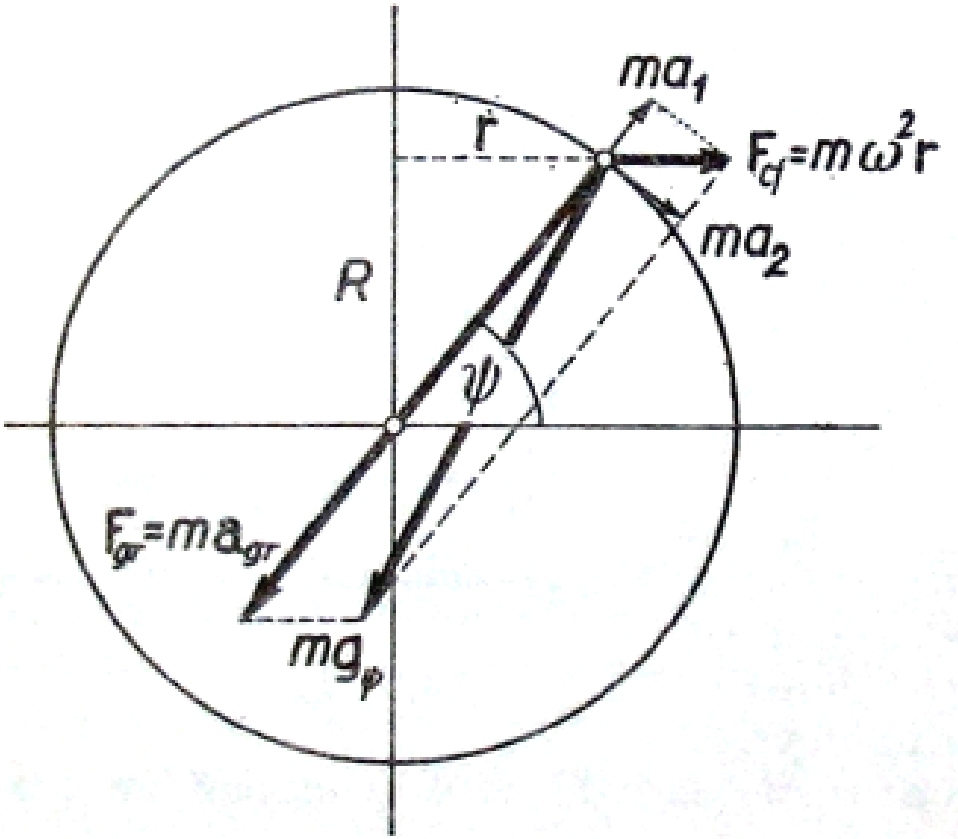




fordulatszám nagy legyen (≥20ezer/perc)

pörgettyűt ld. később

nehézségi erő, gravitációs tér :



súly = $m\vec{g}_\psi = \vec{F}_{gr} + \vec{F}_{cf}$

és $\vec{g}_\psi = \vec{a}_{gr} + \vec{a}_{cf}$

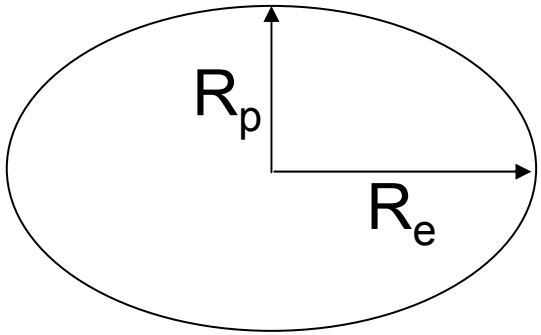
⬇

a súly nem a középpont felé mutat !!!
(csak a sarkokon)

a súly és $g = g_\psi$ a sarkokon a legnagyobb (ott $F_{cf} = 0$), az egyenlítőn a legkisebb (F_{cf} itt a legnagyobb)

de a Föld nem gömb → geoid (= forgási ellipszoid), a felülete mindenütt ⊥ a grav. és F_{cf} erők eredőjére

Föld :



$R_e = 6378$ km

$R_p = 6357$ km

számítás szerint : $g_\psi = (g_{90^o} - 3.4\cos^2\psi)$ cm/s^2

mérések szerint : $g_\psi = (983.2 - 5.2\cos^2\psi)$ cm/s^2

(nem egyeznek, mert nem gömb alakú)

de ettől van pontosabb g_ψ – formula is !

$$G_{Budapest} = 9.80852 \text{ m/s}^2$$

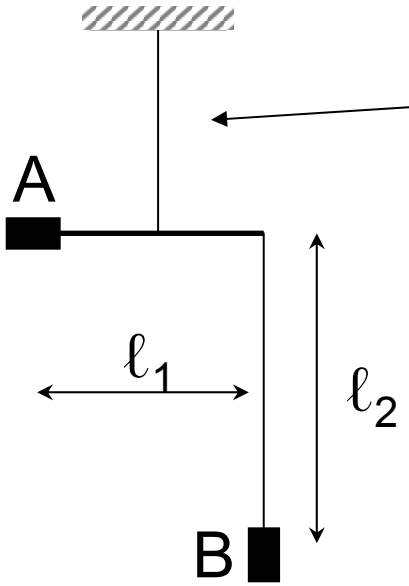
g függ a magasságtól is

g függ a helytől is :

a talaj sűrűségének lokális változásai miatt

→ ásványi anyagok, Föld szerkezetének kutatása

Eötvös Loránd : Eötvös-inga :



← $\approx 40\mu m$ Pt-Ir torziós szál

$A = B = 15\text{-}20$ g

$\ell_1 = 25\text{-}40$ cm

$\ell_2 = 50\text{-}60$ cm

torziós szálon tükör → igen precíz leolvasás

a nehézségi erőtér inhomogén → $\vec{g}_A \neq \vec{g}_B$

↓

torziós szál elfordul

Eötvös : súlyos és tehetetlen tömeg egyenlősége

ld. otthon !

g időben sem állandó :

Nap és Hold hatása

árapály : ld. otthon !

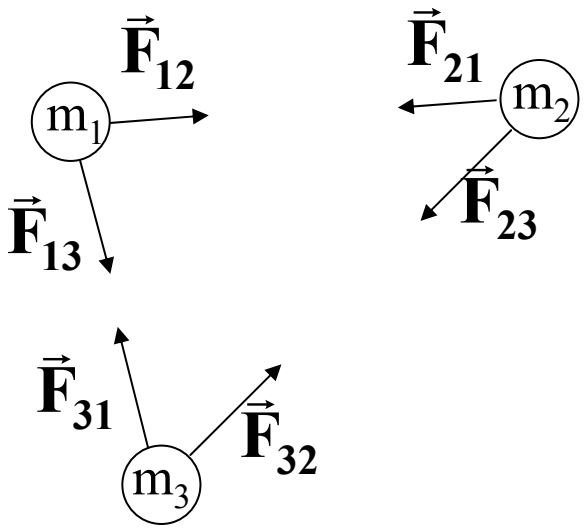
mozgástörvények pontrendszerekre és testekre :

ha nem egyetlen tömegpontról van szó

tömegpontrendszer

(pl. : szétrobbanó repeszdarabok)

zárt pontrendszer :



$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots$$

stb …

de : erőhatások függetlensége + hatás-ellenhatás
minden pontra külön-külön $\longrightarrow$ $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

$$\frac{d\vec{p}_{teljes}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \ldots = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} + \ldots$$

$$\frac{d\vec{p}_{teljes}}{dt} = 0$$

$$\vec{p}_{teljes} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots = \text{állandó}$$

ha külső erő nem hat

impulzusmegmaradás pontrendszerre

másként fogalmazva :

$$\vec{r}_{tkp} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \sum_i \frac{m_i \cdot \vec{r}_i}{m_i}$$

$$\vec{v}_{tkp} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} \longrightarrow m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots = (m_1 + m_2 + \ldots) \cdot \vec{v}_{tkp}$$

$$\vec{p}_{teljes} = m \cdot \vec{v}_{tkp}$$

a tömegkp. sebessége állandó

a tömegkp. sebessége állandó = zárt rdsz. tkp.-ja inerciamozgást végez

impulzustétel pontrendszerekre, azaz ha külső erők is hatnak :

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots$$

stb …

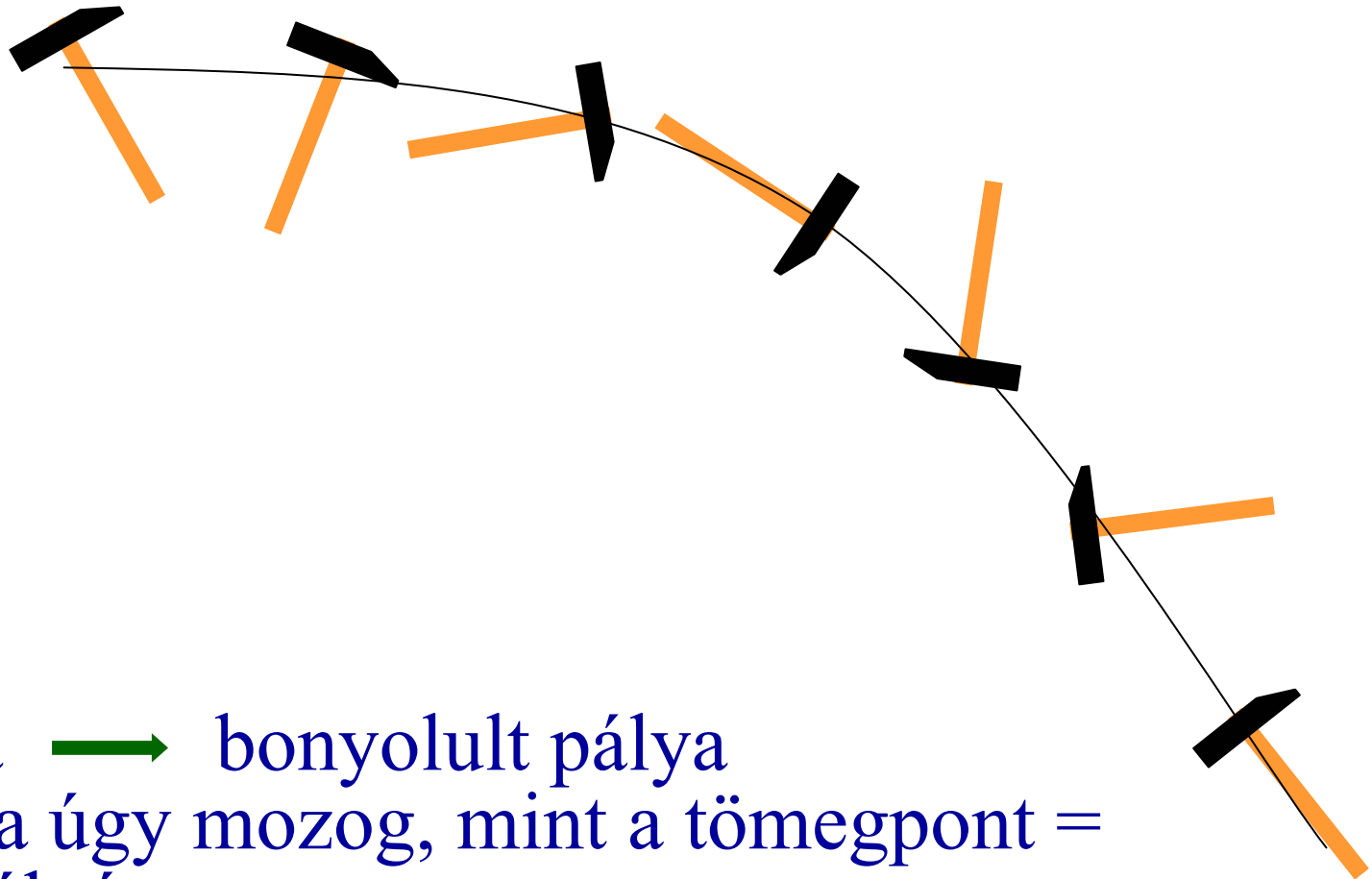
$$\frac{d\vec{p}_{teljes}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i + 0 = \vec{F}_{eredő}$$

$$\vec{F}_{eredő} = m \cdot \vec{a}_{tkp}$$

a tömegközéppont úgy mozog, mint egyetlen tömegpont, amiben a rendszer teljes tömege van és amire az összes külső erők vektori eredője hat

merev test = speciális pontrendszer

pl. eldobott kalapács :



tetsz pt.-ja ⟶ bonyolult pálya

de a tkp.-ja úgy mozog, mint a tömegpont = parabolapályán

a tkp. úgy mozog, mint egyetlen elhajított tömegpont

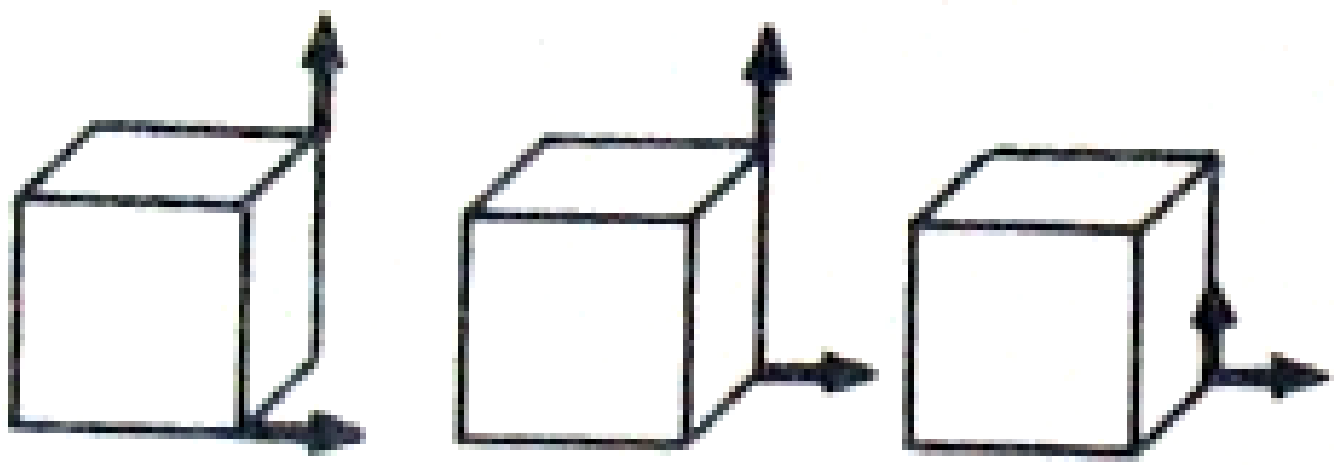
∀ test tömegpt.-nak vehető, ha haladó mozg.-t végez, vagy megelégszünk a tkp mozgásának leírásával

ekkor elég a rá ható külső erőket ismerni (még ezen erők támadáspt.-ját sem kell ismerni)

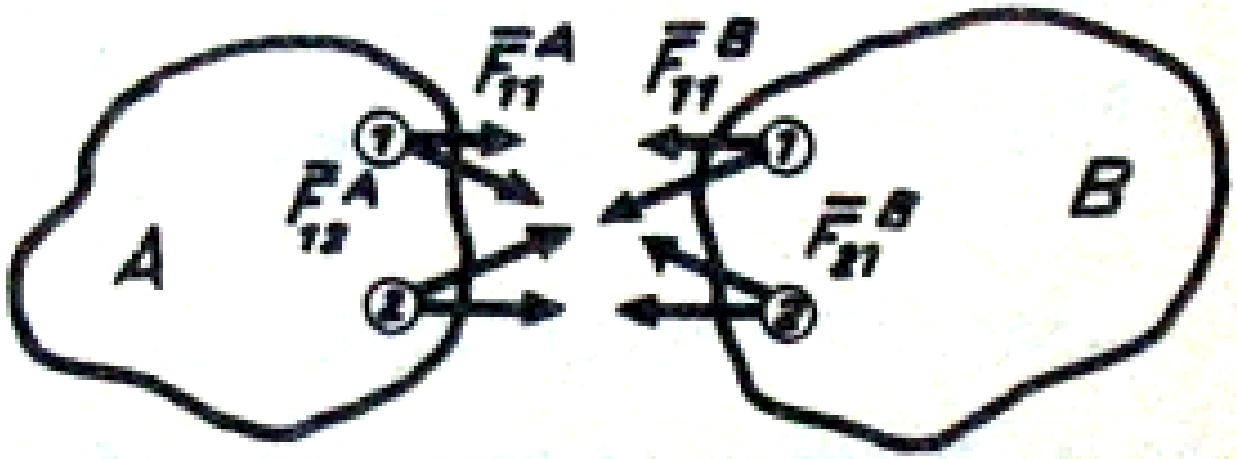
tehát :

minden test tömegpontnak tekinthető, ha haladó mozgást végez, vagy ha megelégszünk a tkp mozgásának leírásával

itt ∀3 test egyformán gyorsul, de másként forog és másként deformálódik



testrendszerek :



$\vec{F}_{ij}^{\,A} = -\vec{F}_{ij}^{\,B}$ $\forall$ tömegpontra

a 2 testre $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$

vagy ezzel egyenértékű : $\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{áll.}$

zárt testrdsz. teljes imp. = állandó
ha külső erők → impulzustétel,
egész testrdsz. tkp.-nak mozgása… (mint pontrdsz.)

TEHÁT : Newton törv.-i ezekre is érvényesek :

felületi és térfogati erők :

térf.-i erők (pl. grav. erő)

felületi erők (érintkezés)
a belső pontokra is hatnak erők, de azok már belső erők, a külső erők hatására elmozduló felületi pontok fejtik ki
(pl. súrlódás)

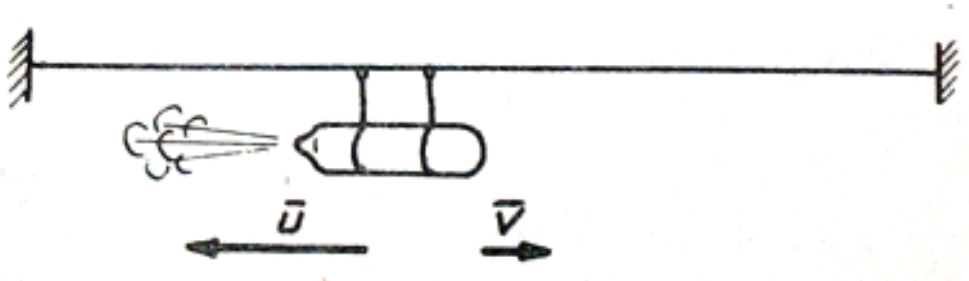
az erő felület menti eloszlására nincs ált. szabály

koncentrált erő (pontban hatónak képzeljük) az érintkezési felület igen kicsi → **támadáspont**
ilyenkor N.III. egyértelműen megfogalmazható

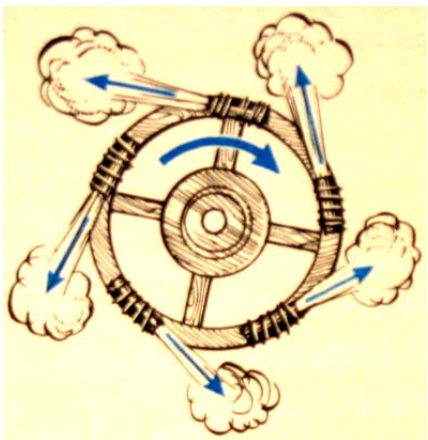
Newton törv.-i testekre :
1. tehetetlenség törv. a tkp.-ra, 2. N.II. a tkp.-ra vagy impulzustétel, 3. hatás-ellenhatás

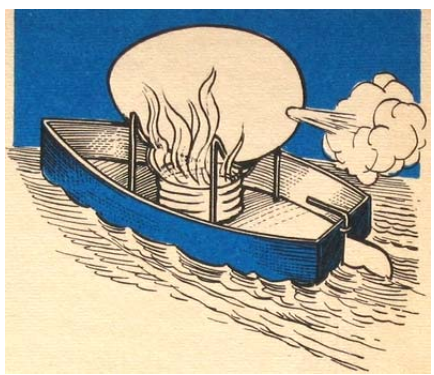
rakétamozgás :

kísérlet : patron – rakéta, vagy kocsi



a rakéta testére a kiáramló gáz fejt ki erőt





továbbá : ágyú, puska, stb… hátralökődése

pl.: a rakéta mozgása :

anyag kiáramlik belőle → csökken a tömege az idővel

t pillanatban : m=m(t) a bent lévő gázzal együtt; sebessége v(t)
a kiáramló gáz áramerőssége $\mu=-dm/dt$, relatív sebessége u(t)
F külső erő is hat (pl. gravitáció, és/vagy közegellenállás)

imp.-tétel a (rakéta+bentlévő üzemanyag)-ra :

Δt idő alatti imp.-vátl. = $F\cdot\Delta t$
a kiáramló gáz tömege $-\Delta m = \mu\cdot\Delta t$
$m+\Delta m$ a rakéta és a $t+\Delta t$ pillanatban bennlevő gáz tömege
($\Delta m = m(t+\Delta t) - m(t) < 0$)

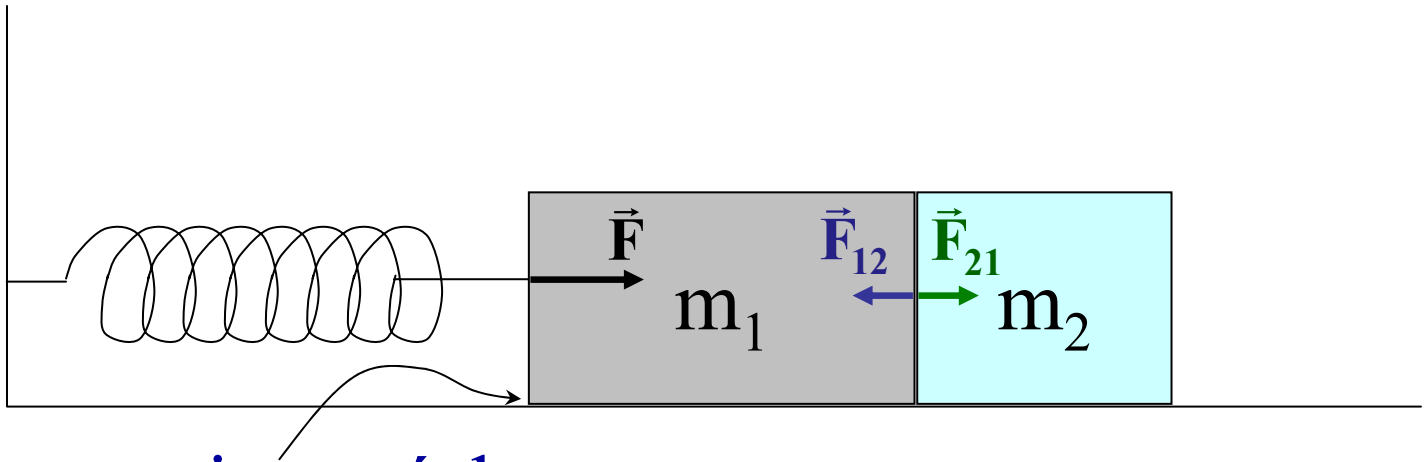
kiáramló gáz imp.vált. = $-\Delta m\cdot u$
a rakéta imp.vált. = $(m+\Delta m)\cdot\Delta v$

az imp.tétel szerint : $-\Delta m\cdot u+(m+\Delta m)\cdot v = F\cdot\Delta t$ / Δt és $\Delta t\to 0$
($\Delta m\to 0$ is !) ⟶ $\mathbf{\mu\cdot u + m\cdot a = F}$

rakéta mozgásegyenlete

megoldás numerikusan v. egyszerű esetben analitikusan

pl. : adott $\vec{F}$, m_1, m_2 ⟶ mekkora $\vec{F}_{12}$?



$\vec{F}_{21} = m_2 \cdot \vec{a}$

$\vec{a} = ?$

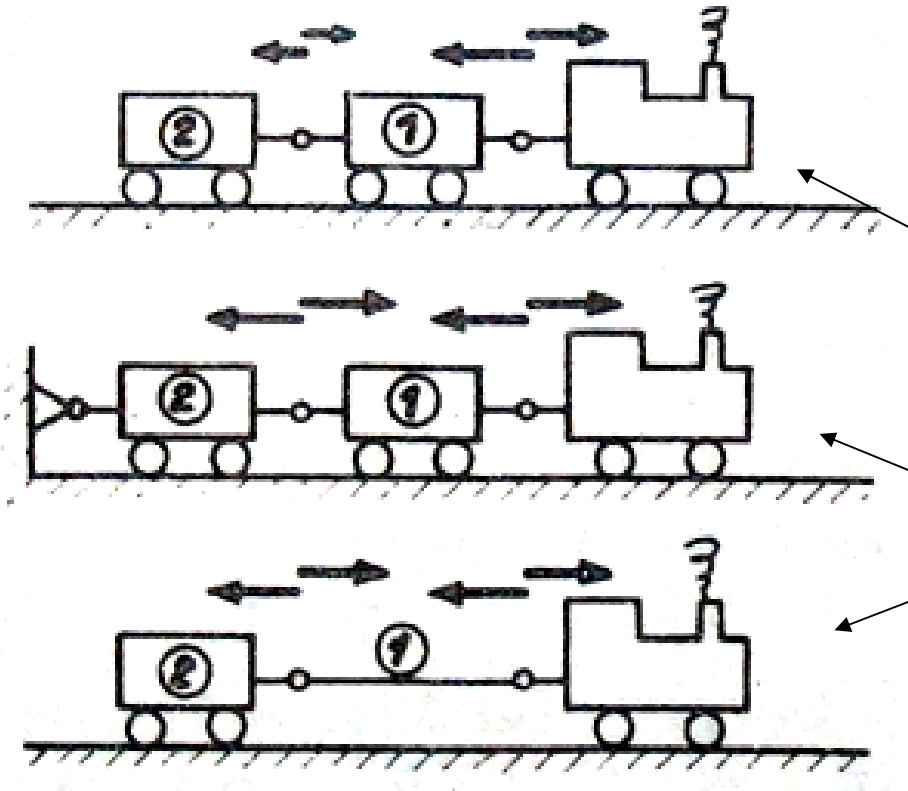
$\vec{F} = (m_1 + m_2) \cdot \vec{a}$ ⟶ $\vec{a}$

⟶ $\vec{F}_{21} = \ldots$

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \neq \vec{F}$

(ha áll, akkor $\vec{F}_{21} = -\vec{F}$, az 1. test „továbbítja” az F erőt a 2. testre)

bizonyos feltételek mellett egy testlánc tagjai „továbbítják” a szomszédjuk által rá kifejtett erőt:



„az egyik test a másikon keresztül a harmadikra hat”

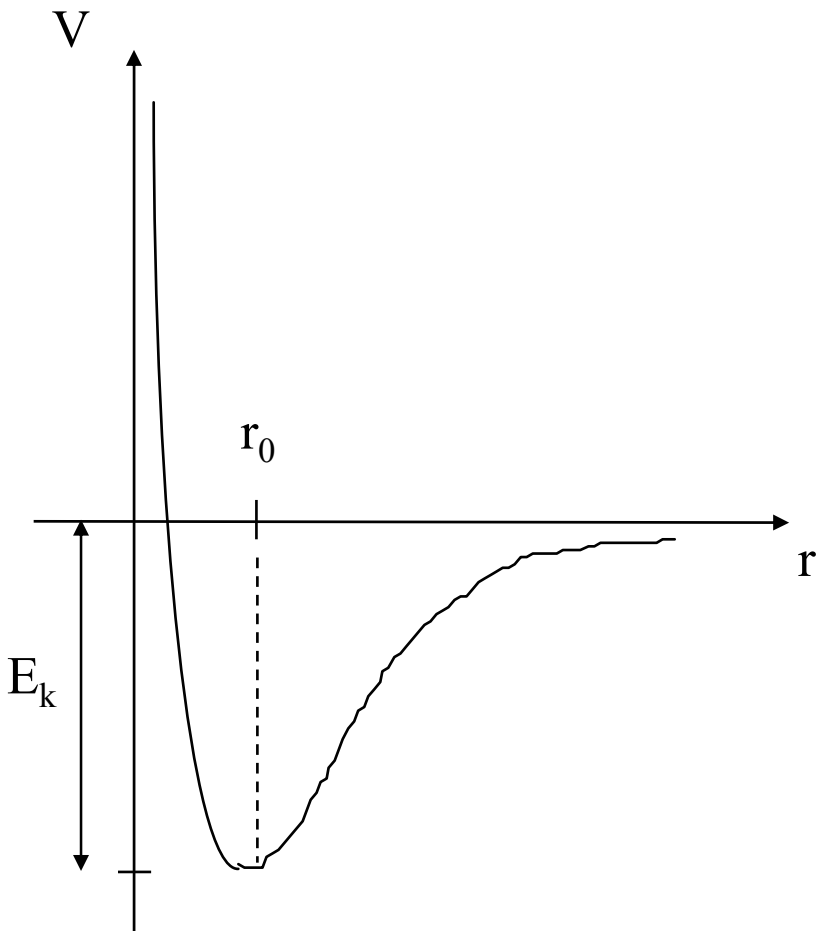
itt nem

itt igen

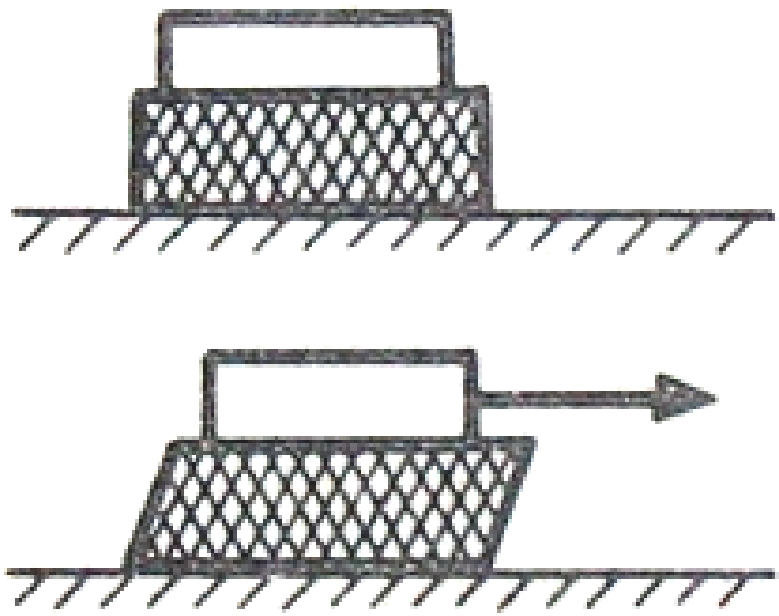
az anyag kontinuum-modellje; atomos szerkezet :

folytonos anyag: sűrűség, fajsúly → ld. korábban

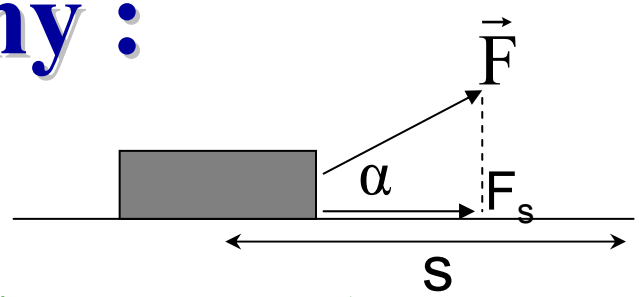
atomos szerkezet :



súrlódás:



munka, energia, teljesítmény :

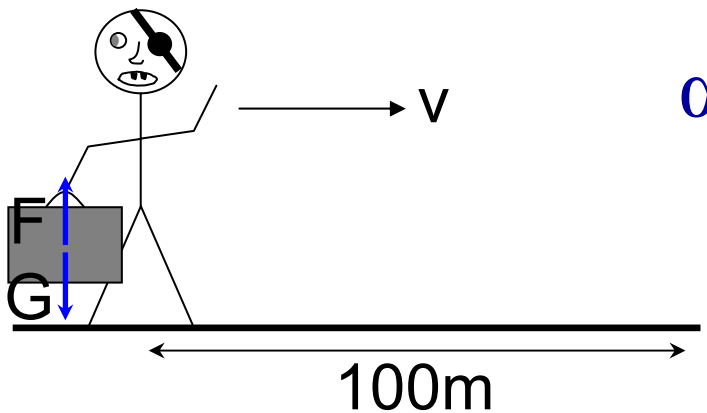


$W = F \cdot s \rightarrow W = F_s \cdot s = F \cdot \cos\alpha \cdot s =$

$= F \cdot s \cdot \cos\alpha$

(olyan, mint $\vec{F}$ és $\vec{s}$ skaláris szorzata)

pl. : mennyi munkát végez az ember, ha egy bőröndöt elvisz 100 m messzire ?



$\alpha = 90^o \rightarrow W = 0$ **!?**

akkor miért fárad el ?
(utánanézni !)

honnan jön ez, miért éppen $F \cdot \Delta s$-t választották munkának ??? → ebből :

hogyan lehetne meghat. egy tömegpont seb.-vált.-t, ha ismerjük a tp.-ra ható erőt, mint a hely fgv.-t:

hogyan lehetne meghat. egy tömegpont seb.-vált.-t, ha ismerjük a tp.-ra ható erőt, mint a hely fgv.-t:

Δv-t ki tudnánk számolni, ha ism. F(t) fgv.-t :

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F} \longrightarrow \Delta\vec{p} = \vec{F}\cdot\Delta t \longrightarrow \Delta\vec{v} = \frac{\vec{F}\cdot\Delta t}{m}$$

(ez itt idő szerinti integrálás lenne : $\vec{p} = \int \vec{F} dt$)

de ált.-ban nem F(t)-t, hanem F(hely)-t ismerjük (pl. rúgóerő, tömegvonzás,…)

pl. : mennyivel vált. egy tp. seb.-e, ha Δs egyenes úton állandó nagyságú, az úttal párhuzamos F erő hat rá :

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \frac{F}{m}\cdot\Delta t$$

$$\Delta s = \bar{v}\cdot\Delta t = \frac{v_1 + v_2}{2}\cdot\Delta t \longrightarrow \Delta t = \frac{2\Delta s}{v_1 + v_1}$$

ha F = áll. → a = áll. → $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$

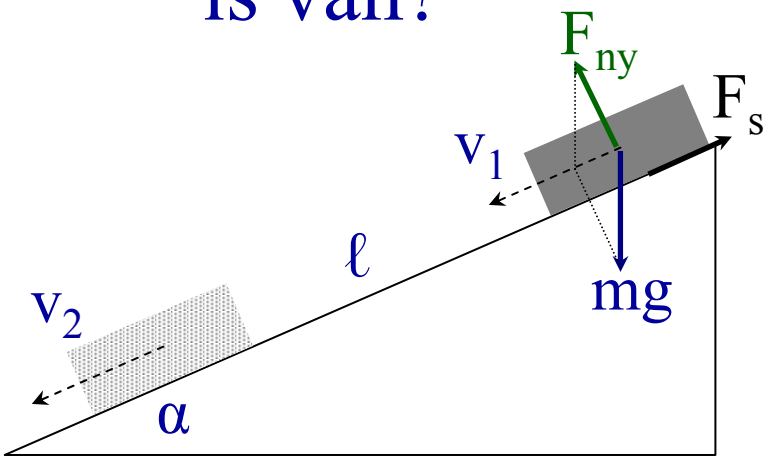
$$\Delta v = v_2 - v_1 = \frac{F}{m} \cdot \Delta t = \frac{2}{m \cdot (v_1 + v_2)} F \cdot \Delta s$$

tehát Δv függ v_1, m – től is

$$\frac{1}{2} m (v_2 + v_1)(v_2 - v_1) = \frac{1}{2} m v_2^{\,2} - \frac{1}{2} m v_1^{\,2} = F \cdot \Delta s$$

az $\frac{1}{2} m v^2$ mennyiség az, aminek vált.-t egyért. megszabja *F* és *s*

pl. : milyen sebességgel ér le egy m tömegű test egy α hajlásszögű, ℓ hoszúságú lejtő aljára, ha súrlódás is van?



$$F_{\text{eredő}} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

$$\frac{1}{2} m v_2^{\,2} - \frac{1}{2} m v_1^{\,2} = mg\ell(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$v_2 = \ldots$$

elnevezés : $E_k \equiv E_{kin} \equiv E_{mozg} := \frac{1}{2}mv^2$ = **mozg.energia (kin.energia)**

$W = F \cdot s$ állandó erő munkája, ha F és s iránya megegyezik

$$\Delta E_{mozg} = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2} = F \cdot \Delta s = W$$

= **munkatétel**

ha F $\perp$ elmozd. → egyenl. körmozgás → v nem változik → E_{mozg} sem vált.

↓

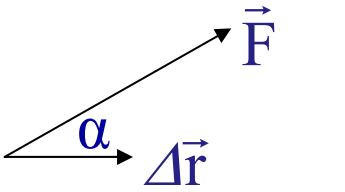
legyen az elmozd.-ra $\perp$ F munkája nulla !

általánosan : $\mathbf{F \cdot s \cdot \cos\alpha = F_s \cdot s = F \cdot s_F} = \vec{F} \cdot \vec{s}$

teljesül-e a munkatétel az ált. esetre :

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(\vec{v}_2 + \vec{v}_1)(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)m = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

$\frac{1}{2}(\vec{v}_2 + \vec{v}_1) = \vec{\bar{v}}$; $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)m = \Delta t\cdot\vec{a}$; $\vec{\bar{v}}\cdot\Delta t = \Delta\vec{r}$; $\vec{a}\cdot m = \vec{F}$



→ igen !

$$(\vec{v}_2 + \vec{v}_1)(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{v}_2\cdot\vec{v}_2 - \cancel{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1} + \cancel{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2} - \vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 = v_2^2 - v_1^2$$

munkatétel még egyszer :

a tp.-ra ható *eredő erő* által végzett munka a tp. kin. energiájának megváltozásával egyenlő

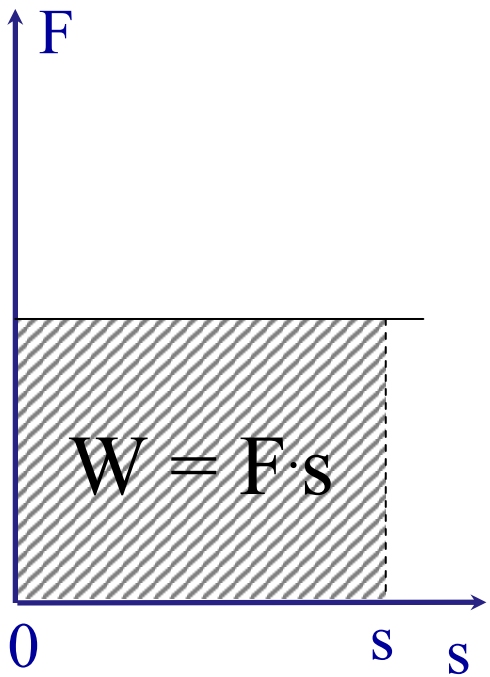
$W > 0$ és $W < 0$ is lehet !!!

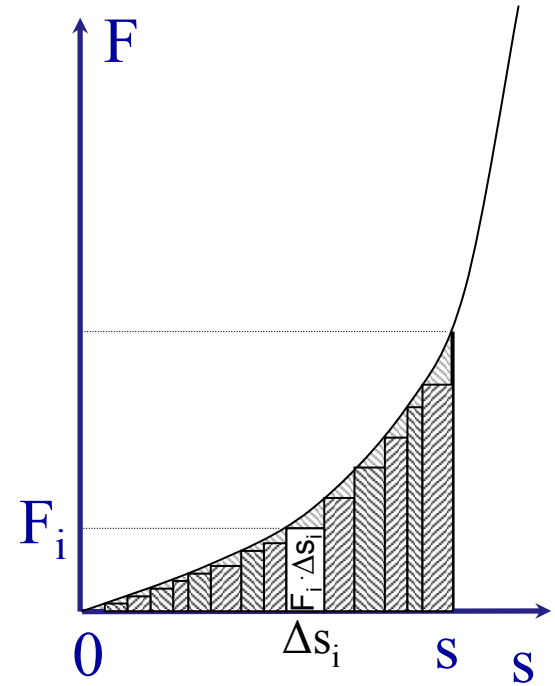
ha több erő hat a tp.-ra :

$$W = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\cdot\Delta\vec{r} = \vec{F}_1\cdot\Delta\vec{r} + \vec{F}_2\cdot\Delta\vec{r} = W_1 + W_2$$

pl. : miért könnyebb húzni egy kocsit a homokban, mint tolni ?

ha F ≠ állandó, vagy a mozgás pályája nem egyenes :





$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F_i(s_i) \cdot \Delta s_i$$

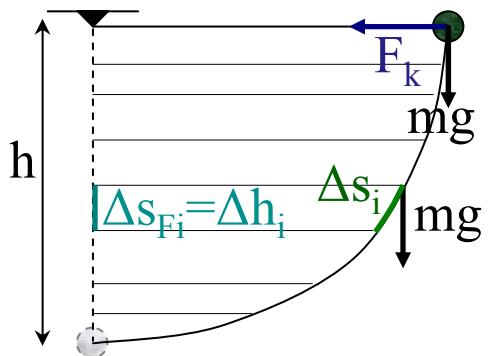
$$W = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s)ds = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}d\vec{r}$$

pl. : mennyi a vsz. helyzetből 0 kezdőseb.-el induló fonálinga sebessége a pálya legmélyebb pt.-ján ?

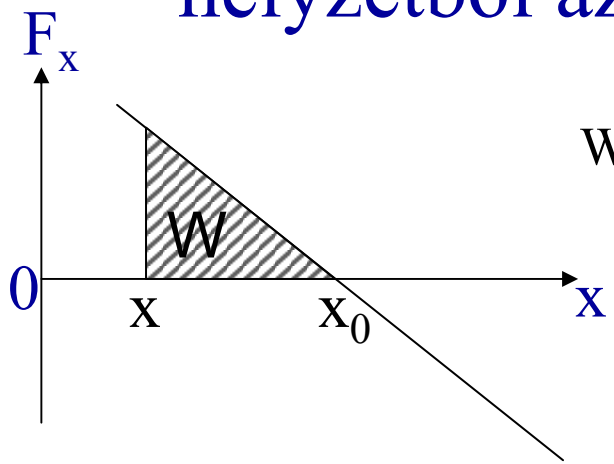
$W_{kötélerő} = 0$, mert $\perp$ a pályára

$W_{súlyerő} = \Sigma mg \cdot \Delta s_{Fi} = mg\Sigma\Delta h_i = \mathbf{mgh}$

$$\Delta E_{mozg} = \frac{1}{2}m \cdot v_2^{\,2} - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mgh + 0$$



pl. : mennyi munkát végez az egyik végén rögz. rúgó, míg a másik végéhez rögzített testet az x helyzetből az x_0 egyensúlyi helyzetbe viszi ?



$$W = \frac{F(x)\cdot(x-x_0)}{2} = \frac{k\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_0)}{2} = \frac{1}{2}k\cdot(x-x_0)^2$$

$W > 0$, akár $x<x_0$, akár $x>x_0$!

pl. : mekkora munkavégzés szükséges ahhoz, hogy egy L hoszúságú szöget teljes hosszában beüssünk fába, ha a benyomáshoz szükséges erő $F = k\cdot x$ alakban függ a szög fában levő x hosszától ?

$$\Delta W = F\cdot\Delta x = k\cdot x\cdot\Delta x \longrightarrow W \approx \sum \Delta W$$

$$W = \int dW = \int_0^L dW = \int_0^L k\cdot x\cdot dx = k\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = k\cdot\left(\frac{L^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right) = k\cdot\frac{L^2}{2}$$

munkatétel tömegpontrendszerre :

a tp.-rdsz. $\forall$ tagjára érv.-nek vesszük a munkatételt
a tp.-rdsz. kin. E-ja :

$$E_{mozg} = \sum E_{mozg,i} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

a tp.-rdsz.-en végzett összes munka : $W_{össz} = \sum \vec{F}_i \Delta\vec{r}_i$

az i-edik tp.-ra ható eredő F
(külső + belső)

$$\mathbf{W_{össz} = E_{mozg,végső} - E_{mozg,kezd}}$$

(megkapható az egyes tp.-kra vonatk. munkatételek összeadásával)
de a merev testeknél „baj” van :
a belső erőket nem ismerjük

merev testeket ld. később ...

teljesítmény, hatásfok :

$$P \approx \frac{\Delta W}{\Delta t} \longrightarrow P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} \equiv \frac{dW}{dt} \equiv \dot{W} \qquad [J/s = W]$$

W, kW, MW, mW,…
(LE)

Ws = J, Wh, kWh
(munka)

ha F ($\vec{F}$) erő → a ($\vec{a}$) gyorsulás → v ($\vec{v}$) ill. Δv ($\Delta\vec{v}$) →

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \longrightarrow P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

= pillanatnyi teljesítmény

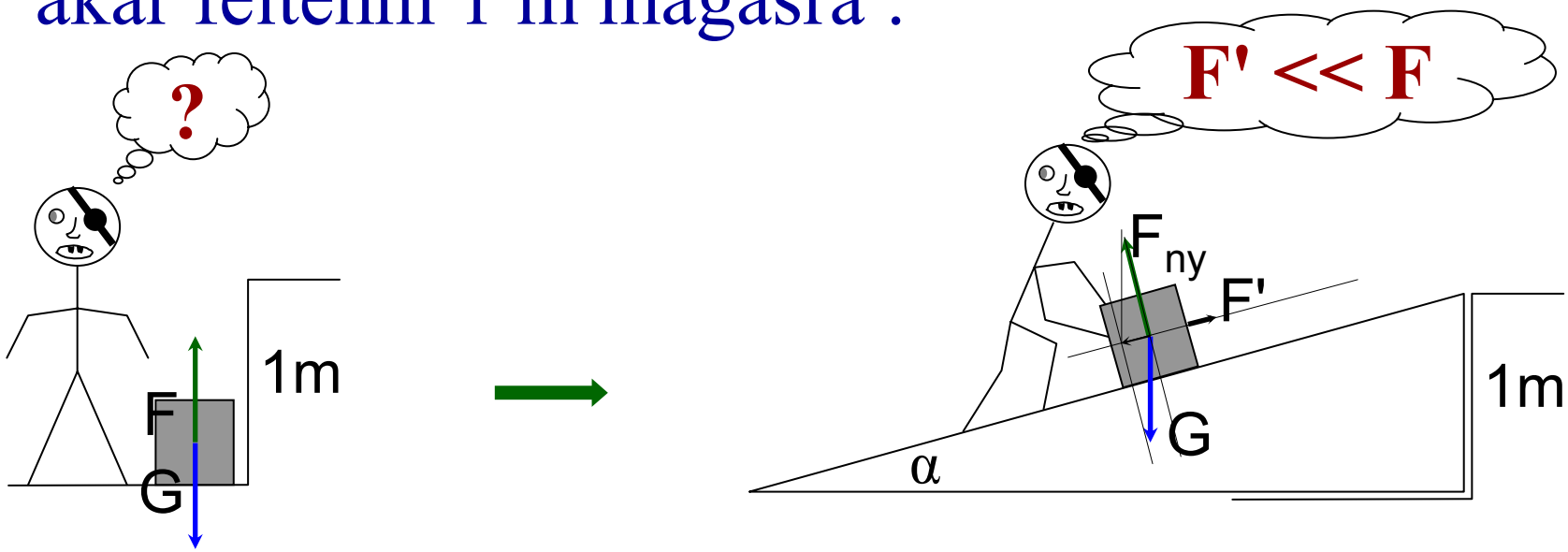
$$\eta = \frac{W_{\text{hasznos}}}{W_{\text{befektetett}}} < 1 \text{ !!!}$$

egyszerű gépek : ≈ erőátviteli eszközök

kisebb erővel („erőlködéssel”) tudjuk ugyanazt a munkát elvégezni

pl. : lejtő, emelő, ék, hengerkerék, csigák, stb …

pl. : egy 100 kg tömegű nagy ládát 1 ember egyedül akar feltenni 1 m magasra :



kvázisztatikusan emeli → F = G : F' = mgsinα :

W = F·s = **mgh** W = F'·s' = mgsinα · h/sinα = **mgh**

$W = F \cdot s = mgh$ $\qquad$ $W = F' \cdot s' = mg\sin\alpha \cdot h/\sin\alpha = mgh$

ugyanaz, ha NINCS veszteség

mivel kváziszatikusan emeli :

$\Delta E_{mozg} = 0 \rightarrow \begin{cases} W_{külső} = W_{befekt} - W_{hasznos} \\ W_{belső} \end{cases}$

csak merev, nyújthatatlan testekre,
ha pl. rúgó is van, akkor nem igaz !!!

$$\Sigma W = W_k + W_b = W_{bef} - W_h - W_{belső} = 0$$

$$W_{bef} - W_h \geq 0$$

$$\eta = \frac{W_{hasznos}}{W_{befektetett}} \leq 1$$

belső erőket az érintkező felületek fejtenek ki egymásra:

- ezek normális komponenseinek Σ munkája = 0;
- a párhuzamos komponensek Σ munkája is 0, mert a felületekre ható erők egyforma nagyságúak + ellentétes irányúak („ellenrők”); a súrl erő munkája pedig mindig **negatív**

végeredményben :

„amit nyerünk a réven,elveszítjük a vámon”, vagyis ahányszor kisebb erővel dolgozhatunk, annyiszor hosszabb úton kell a terhet mozgatni
+ ha van súrl. is, akkor még hosszabb

további egyszerű gépeket ld. később…
(merev testek után)

potenciális energia :

munkatétel tp.-rdsz.-re :

$$\Delta E_{kin,teljes} = W_{külső\ erők} + W_{belső\ erők}$$

munkatétel deformálható testekre : $\Sigma W_{belső\ erők} \neq 0$

(mert a test egyes tömegpt.-jai közeledhetnek-távolodhatnak egymáshoz)

$$\mathbf{W_{külső\ erők} \neq \Delta E_{kin}}$$

= a munkatétel nem teljesül ?!

pl. : egyik végén rögz. rúgót húzunk :

kvázisztatikusan + a húzóerő egyre nő

kvázisztatikusan ⟶ $\Delta E_{kin,rúgó} \approx 0$

de van munkavégzés !

(akkor is igaz, ha $m_{rúgó} << m_{rajta\ levő\ test}$, ekkor a rúgó 2 végére ható erők közelítőleg egyforma nagyságúak és ellentétes irányúak → a rúgó mozgása majdnem egyensúlyi állapotokon keresztül történik

ilyenkor érvényes az $F_{rúgó} = -k \cdot \Delta x$ erőtörv. !!!)

nyújtsuk ilyen feltételek mellett a rúgót :

x_0 – ról x hosszúságra : ⟶ $F_x(x) = -k \cdot (x - x_0)$

$$W^*(x_0 \to x) = \int_{x_0}^{x} [-F_x(x)]dx = k \cdot \int_{x_0}^{x} (x - x_0)dx = \frac{k}{2}(x - x_0)^2$$

mi húzzuk a rúgót, ez az általunk a rúgóra kifejtett erő

$-F_x(x) = k \cdot (x - x_0)$

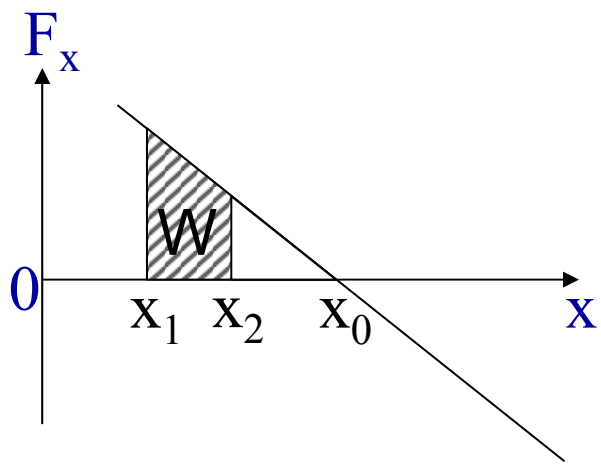
összenyomásra hasonlóan !

a kinyújtott rúgó ugyanennyi munkát tud végezni a ráakasztott **testen**, míg x_0 – ba visszaviszi :

$$W(x \to x_0) = \int_x^{x_0} F_x(x)dx = \frac{k}{2}(x - x_0)^2 = W^*(x_0 \to x)$$

a rúgó által a tömegponton (testen) végzett munka, miközben egy tetsz. x_1 helyről x_2-be viszi :

$$W(x_1 \to x_2) = W(x_1 \to x_0) - W(x_2 \to x_0)$$



$$\mathbf{U(x) := W(x \to x_0) = W^*(x_0 \to x)}$$

az a fgv., ami megadja, h. mennyi munkát végezne a rúgó a testen, míg kvázisztatikusan x-ből x_0-ba vinné

lineáris rúgóra :

$$U(x) = W(x \rightarrow x_0) = W^*(x_0 \rightarrow x) = \tfrac{1}{2}k\cdot(x-x_0)^2$$

tetsz. $x_1 \rightarrow x_2$ elmozd.-hoz szüks. munka :

$$W(x_1 \rightarrow x_2) = U(x_1) - U(x_2)$$

nem lineáris $F_x(x)$ esetére is érv. !

munkatétel ⟶ $\Delta E_{kin} = W(x_1 \rightarrow x_2) = U(x_1) - U(x_2)$

ha nincs súrl. !!!

$$E_{k,2} - E_{k,1} = U_1 - U_2$$

$$\mathbf{E_{k,1} + U_1 = E_{k,2} + U_2}$$

potenciális energia = munkavégző képessége van
(mert az alakja eltér az egyensúlyi alaktól)

összes energia = **mechanikai energia** = $E_{mozg} + E_{pot}$

energiamegmaradás törv. : csak biz. feltételekkel !

$$\underbrace{E_{mozg} + E_{pot}}_{\text{kezdeti}} = \underbrace{E_{mozg} + E_{pot}}_{\text{végső}}$$

időben állandó

tehát : munkatétel ⟶ energiamegmaradás

pl. : rúgón rezgő testre másképpen :

$$x - x_0 = A \cdot \sin(\omega t) \longrightarrow v_x = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \longrightarrow \begin{cases} E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{A^2}{2} m\omega^2 \cdot \cos^2(\omega t) \\ E_{pot} = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = \frac{A^2}{2} \cdot k \cdot \sin^2(\omega t) \end{cases}$$

$$E_{tot} = E_k + E_{pot} = \frac{A^2}{2} \cdot k \cdot \underbrace{\left[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right]}_{=1} \longleftarrow \text{és} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \longrightarrow m \cdot \omega^2 = k$$

$$E_{tot} = E_k + E_{pot} = \frac{A^2}{2} \cdot k \cdot \underbrace{\left[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right]}_{=1} \longrightarrow \underbrace{E_{tot} = E_k + E_{pot} = \frac{A^2}{2} \cdot k = \text{áll.}}_{= \text{energiamegmaradás !}}$$

pl. : két tömegpont (test) összekapcsolva egy rúgóval:
belátható, hogy

$$(E_{k1} + E_{k2} + E_{pot})_{kezd} = (E_{k1} + E_{k2} + E_{pot})_{vég}$$

a rúgó csak akkor végez munkát, ha a 2 tömegpont egymáshoz képest elmozdul, mert $F_{rúgó}$ mindig párhuzamos a 2 testet összekötő egyenessel → a rúgóerő **centrális erő**

pl. : a **gravitációs kölcsönhatás pot. energiája :**

F_{grav} is centrális erő → hasonlít $F_{rúgó}$ - hoz

F_{grav} is centrális erő → hasonlít $F_{rúgó}$ - hoz

↓

E_{pot} a gravitációra is hasonlóan felírható :

$$U(r) = W(r \to r_0) = \int_r^{r_0} \vec{F}_{grav} d\vec{r}$$

az a munka, amit a grav. erő végezne a **két** tömegponton (testen), míg azok az adott *r* relatív táv.-ból a null-helyzetnek választott r_0 relatív táv.-ra mozdulnak

↓

hol legyen a null-helyzet :

rúgónál az egyensúlyi hossznál volt :

tetsz. $x_1 \to x_2$ elmozd.-hoz szüks. munka :

$$W(x_1 \to x_2) = U(x_1) - U(x_2)$$

ha máshol választottuk volna a null-helyzetet (x_0') :

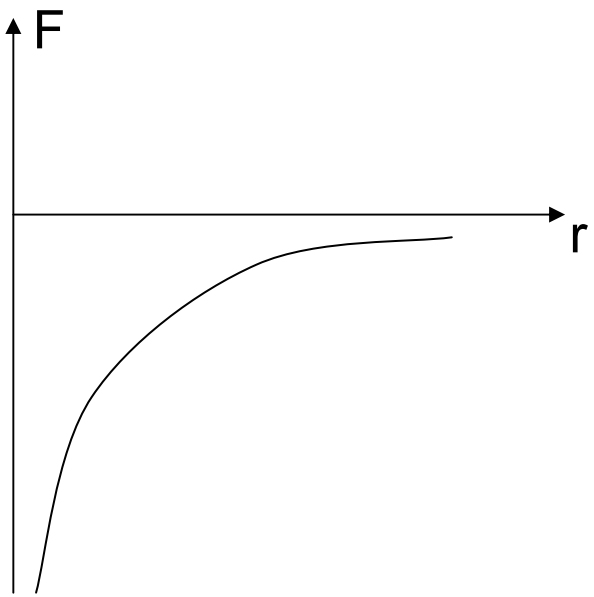
$$U'(x) = W(x \to x_0') = W(x \to x_0) + W(x_0 \to x_0') = U(x) + \text{áll.}$$

$\mathbf{U'(x)}=W(x\rightarrow x_0')=W(x\rightarrow x_0)+W(x_0\rightarrow x_0')=\mathbf{U(x)+áll.}$

a pot. energia csak egy additív konstans erejéig egyértelmű !

tetszőlegesen választható

Föld – másik test grav. kölcsönhatása esetén :
nullhelyzet célszerűen lehet - a végtelen távoli pt., v.
- a földfelszín



grav. kölcsönhatásnál nincs o. véges táv., ahol F = 0 lenne (rúgónál volt)

egyelőre függőben hagyva a null-helyzet választást

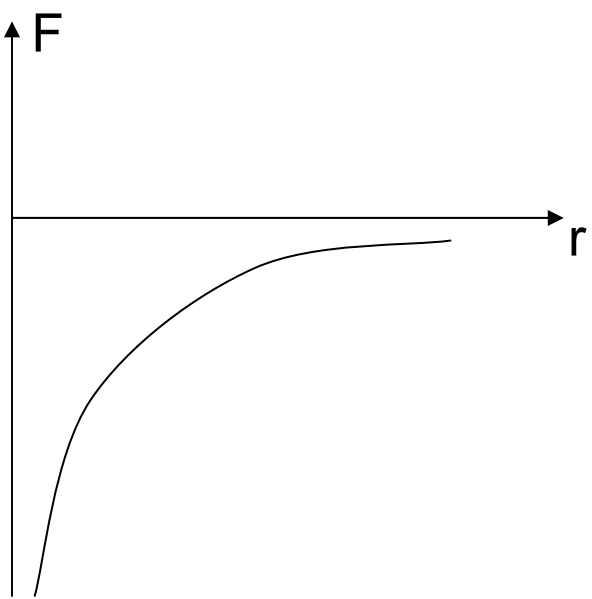
mennyi munkát végez a nehézségi erő, míg a tömeg-pontok r táv.-ból r_0-ba mozdulnak :

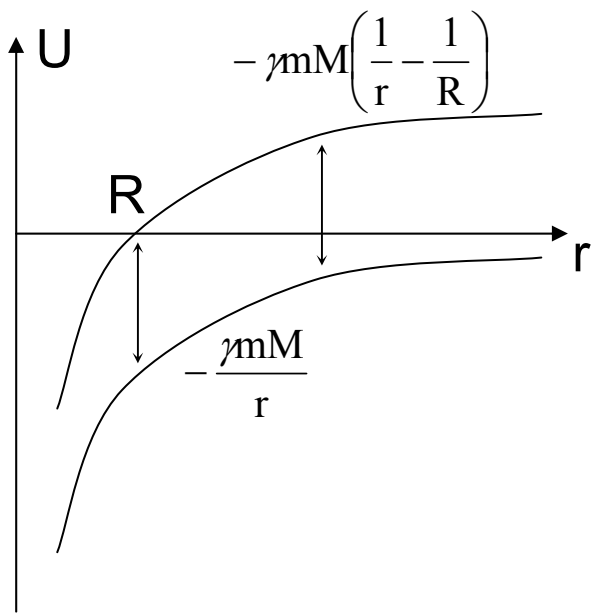
mivel vonzóerő → ha $r > r_0 \rightarrow$ pozitív munka
ha $r < r_0 \rightarrow$ negatív W

$W(x_1 \rightarrow x_2) = U(x_1) - U(x_2)$; munka = erő × elmozd.;

$F_{grav} = -\gamma mM/r^2$

$$U(r) = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum F(\rho_i)\Delta r_i = \int_r^{r_0} F\,dr = -\int_r^{r_0} \gamma \frac{mM}{r^2}\,dr = -\gamma mM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$





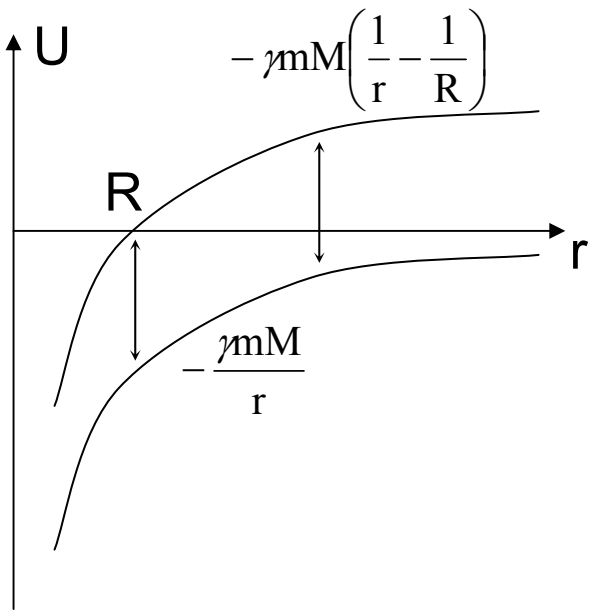
$$U(r) = -\gamma mM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$ ➡ tehát ha a nullhelyzetet r_0-ban választjuk :

$$U(r) = -\gamma mM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = -\gamma mM\frac{1}{r} + \gamma mM\frac{1}{r_0} = -\gamma mM\frac{1}{r} + \text{const.}$$

Föld – másik test grav. kölcsönhatása esetén :
a nullhelyzet célszerűen a földfelszín (a földsugár)

$$U = -\gamma mM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

(itt r-t a Föld középpt.-jától mérjük)



mivel $$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R}\cdot\frac{1}{1+h/R}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1+h/R} \quad \text{és } h \ll R \rightarrow \frac{1}{r} \approx \frac{1}{R} \cdot \left(1 - \frac{h}{R}\right) = \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2}$$

$$U = -\gamma mM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \underbrace{\frac{\gamma M}{R^2}}_{g} mh = mgh \rightarrow \mathbf{U = mgh}$$

de ezt úgy is meg lehet kapni, h a nehézségi erő az *m* tömegű testen *mgh* munkát végez, míg a test *h* magasságból *0* magasságba süllyed
(vagy mi végzünk a testen *mgh* munkát, míg *0*-ról *h* magasságra emeljük)

a Földtől nagyobb táv.-ra (ha g ≠ áll.) a nulhellyzetet inkább a végtelenben választják :

$$U = -\gamma \frac{mM}{r}$$

grav. pot. energia = **helyzeti energia**

ha a két test közül egyik a Föld (M >> m), akkor ez állónak tekinthető :

„a *m* testnek van helyzeti energiája”

de nem szabad elfelejteni :

a pot. E a KÉT test közös tulajdona

pl. : adott magasságból elejtett test mekkora sebességgel csapódik a földbe ?

pl. : mennyi lesz a h magasságú lejtőről súrlódás-mentesen lecsúszó test végsebessége, ha a kezdőseb.-e 0 volt?

pl. : a Föld felszínéről egy testet nagy v_0 kezdőseb.-el függ.-en fellövünk. Milyen magasra jut ?

a Föld felszínéről egy testet nagy v_0 kezdőseb.-el függ.-en fellövünk. Milyen magasra jut ?

$$U = -\gamma\frac{mM}{r} \quad \text{és } r = R \rightarrow \quad -\gamma\frac{mM}{R} + \frac{1}{2}mv_0^{\,2} = -\gamma\frac{mM}{R+h}$$

$$\downarrow$$

$$h = \ldots$$

pl. : mekkora kezdőseb.-el kell fellőni, hogy ne essen vissza ?

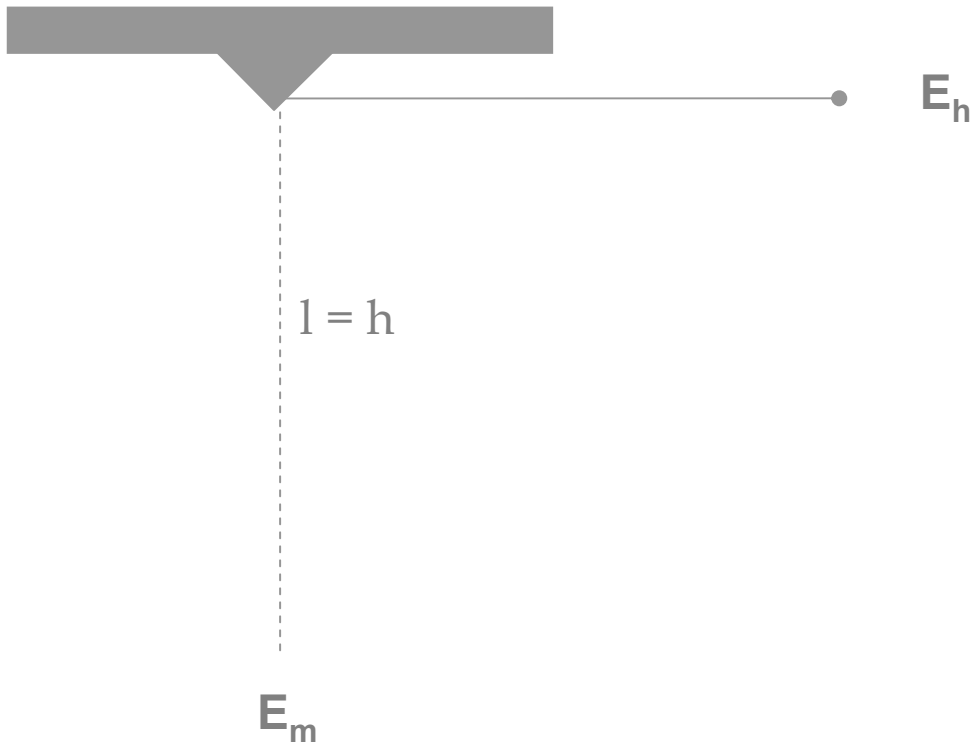
ha az össz E a kilövés pillanatában < 0, akkor lesz o. táv., ahol a test seb.-e 0 lesz → hogy ne forduljon vissza :

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{2gR} \approx 11\frac{km}{s} \quad \leftarrow \quad -\gamma\frac{mM}{R} + \frac{1}{2}mv_0^{\,2} \geq 0$$

$$\uparrow$$

második kozmikus sebesség

pl. : fonálinga :



a pot. E általános def.-ja; konzervatív erők :

2 tp. közötti kölcs.hatáshoz csak akkor lehet E_{pot}-t def., ha a tp.-k között ható erő CSAK a 2 tp. relatív helyzetének fgv.-e, ekkor :
E_{pot} = az a W, amit az egyik tp. végez a másikon ÉS a másik az egyiken, míg adott helyzetből a nullhelyzetnek megfelelő rel. helyzetbe mozdulnak :

$$U(\vec{r}) = W(\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r}$$

relatív helyzet !

(rúgónál volt : ugyanez a W megkapható úgy is, h. ha az egyik tp.-ra ülünk és onnan nézzük a másik hozzánk visz. elmozd.t)

az $U(\vec{r}) = W(\vec{r} \to \vec{r}_0) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$ def. csak akkor egyért.,

ha a kölcs.h. erő munkáját egyért. megszabja a kezdő és végső helyzet, fgtl. attól, h. milyen úton jut $\vec{r}$ -ből $\vec{r}_0$ -ba

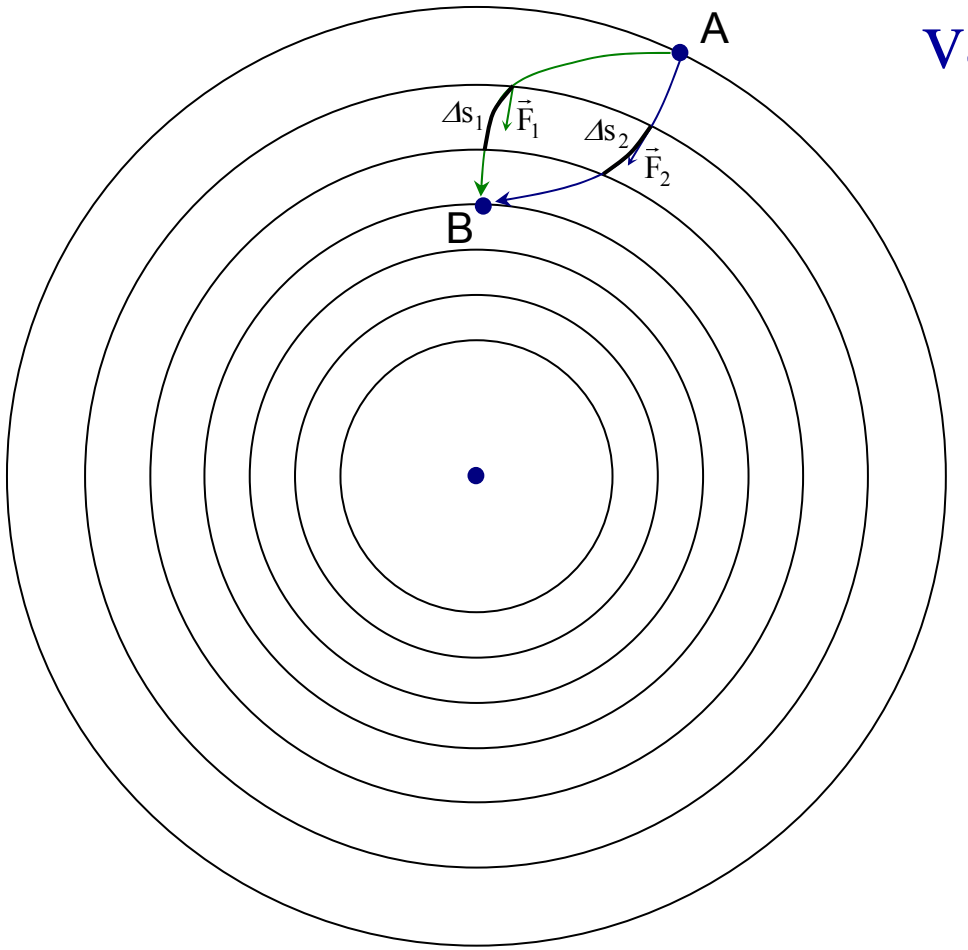
ha ez telj. $\longrightarrow$ $\exists\ E_{pot}$!

$$W(\vec{r}_1 \to \vec{r}_2) = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$$

a munkatételből : $U_1 - U_2 = E_{k2} - E_{k1}$

$$U_1 + E_{k1} = U_2 + E_{k2}$$

teljesül a mech. E megm. tétele !



valóban fgtl. a W az úttól ?

rúgóra; grav. kölcs.h.-ra:

$\forall$2 esetben F csak a 2 tp. táv.-tól függ
és F centrális

az utakat kis Δs elmozdulásokra bontva:
az elmozd.-k erő-irányú komponense megegyezik

↓

a végzett munka a két úton megegyezik

↓

$\forall$ centrális erőhöz rendelhető pot. energia (pl. Coulomb-erőhöz is), de más kölcs.hatáshoz is lehet !!

(pl. torziós inga esetén, ahol forgatónyomaték végez munkát, ami csak a test kezdő- és véghelyzetétől függ)

konzervatív kölcsönhatás :
ha a végzett munka csak a kezdő- és véghelyzettől függ, azaz o. kölcs.h. amihez $\exists E_{pot}$
az ilyen erőket **konzervatív erők**-nek nev.

pl. $F_{súrl.}$ nem konz. !

tömegpontrendszerre :
ha a tagjai között (páronként) konz. kölcs.h. van :

energiatétel : $\sum_i E_{mozg,i} + \sum_{i<j} E_{pot,ij} = \text{állandó}$

egyes tp.-k mozg.E-ja

az i,j páros kölcsönhatási pot E-ja

E_{pot}-t úgy is szokták def., mint azt a munkát, amit kell végezni a kölcsönhatási erő „ellenében”, míg a nullhelyzetből az adott helyre visszük:

$$W_{én} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_{én}\, d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_{kölcsönhatási}\, d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F}_{kölcsönhatási}\, d\vec{r} = U(\vec{r})$$

az erő meghatározása a pot. E-ból :

előbb F(r) ⟶ U(r)

most U(r) ⟶ F(r)

↑

ismerni kell a tömegpontok (testek) kölcs. helyzetét, ill. egy adott, kiszemelt tp. helyzetét : $\vec{r}$

a tp.rdsz.-re $U(\vec{r})_{teljes}$ = a tp.-k közötti pot.E-k összege; értékét a tp.-k relatív helyzete egyért. megszabja egy

additív konstans erejéig !!! (ld. korábban)

de : $U(\vec{r})_{\text{teljes}}$ - ben $\vec{r}$ a kiválasztott tp. helyzetét jelöli , viszont U a rdsz. többi tagjának helyzetétől is függ !

mozdítsuk el gondolatban a tp.-t $\delta\vec{r}$ -el (= virtuális elmozdulás) ⟶ $U(\vec{r}) \to U(\vec{r}+\delta\vec{r})$

a pot. E csökkenése = a rdsz. többi tagja által a tp.-on végzett munkával ⟶ $U(\vec{r}) - U(\vec{r}+\delta\vec{r}) \approx \vec{F}\delta\vec{r} = F_{\delta\vec{r}}\left|\delta\vec{r}\right|$

pozitív, ha U(r+δr) < U(r)
és negatív fordítva

$$F_{\delta\vec{r}} = -\lim_{\delta\vec{r}\to 0}\frac{U(\vec{r}+\delta\vec{r}) - U(\vec{r})}{\left|\delta\vec{r}\right|}$$

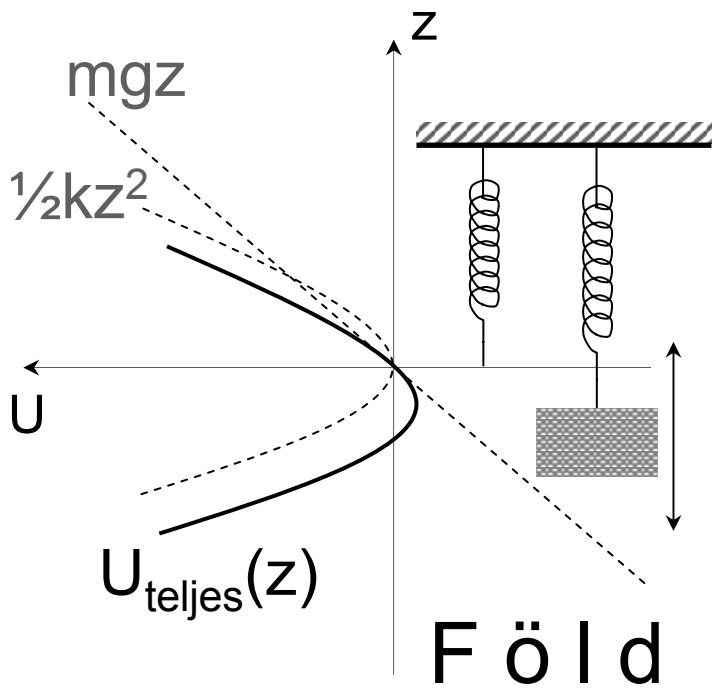
ha végigpróbáljuk az összes lehetséges δr elmozdulásokat, megkapjuk az F-nek tetsz. irányú komponensét

az erőkomponens < 0, ha az elmozd. U növekedésével jár, és fordítva

az az irány, amerre mozdulva a legnagyobb **pozitív** erőkomponenst kapjuk, az **erővektor iránya**

→ az erő abba az irányba mutat, amerre mozdítva a pontot, a leggyorsabban csökken a rdsz. pot. E-ja

pl. : mekkora a testre ható erő egy adott z-helyen ?



a rúgó pot. E-ja :

$$U_1 = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}kz^2$$

a test helyzeti E-ja : $U_2 = mgz$

(nullhelyzet az origóban)

$$U_{teljes}(z) = \frac{1}{2}kz^2 + mgz$$

a tp.-ra ható $F_{eredő}$ z-komponense:

$$F_z(z) = -\lim_{\delta z \to 0} \frac{U(z+\delta z) - U(z)}{\delta z} = -\frac{dU}{dz} = -kz - mg$$

merev test egyensúlya, forgatónyomaték, impulzusmomentum (= perdület) :

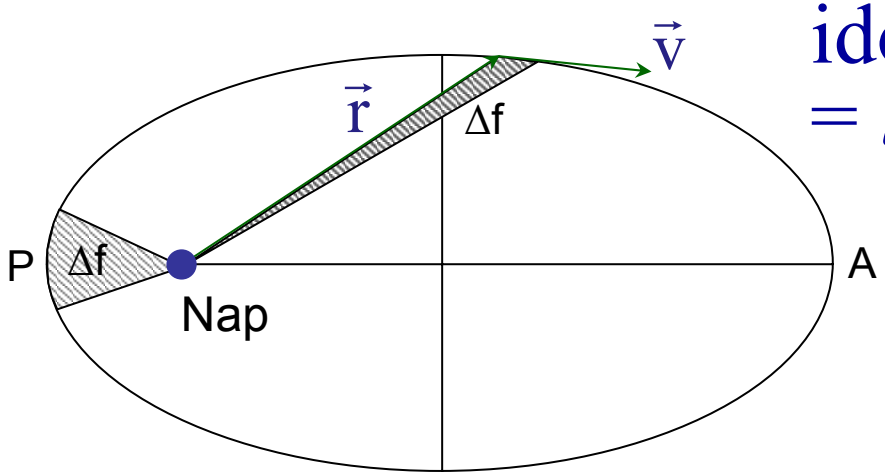
vektormennyiség **momentuma** :

impulzusmomentum = $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

forgatónyomaték = $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

tömegpont perdülete :

Kepler I. : a bolygók ellipszispályán mozognak …
Kepler II. : a Naptól a bolygóhoz húzott vezérsugár = időközök alatt = területeket súrol :



időegység alatt súrolt terület =
= *területsebesség* =

$$= \frac{df}{dt} = \dot{f} \approx \frac{\Delta f}{\Delta t} = \text{állandó}$$

a Föld sebessége legnagyobb P-ben (január 3-án), legkisebb A-ban

$\vec{f} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}$ merőleges a pályasíkra

▲ területe = ½·a·b·sinγ, + irány a jobbkéz-szabály szerint

ha adott a tp.-ra (bolygóra) ható erő → mennyi $\dot{\vec{f}}$ változási gyorsasága ? :

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(\vec{r}+\Delta\vec{r})\times(\vec{v}+\Delta\vec{v})-\vec{r}\times\vec{v}}{\Delta t}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left[\vec{r}\times\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}+\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\times\vec{v}+\frac{\Delta\vec{r}\times\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\vec{r}\times\vec{a}+\cancel{\vec{v}\times\vec{v}}+0\right] = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{a} =$$

$$= \frac{1}{2m}\vec{r}\times\vec{F}$$

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ (N.II.)

vektori szorzatot deriválva :

$$\frac{d}{dt}\dot{\vec{f}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{v}+\vec{r}\times\dot{\vec{v}}\right) = \frac{1}{2}(\vec{v}\times\vec{v}+\vec{r}\times\vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{a}$$

vagyis : $\frac{d\dot{\vec{f}}}{dt} = \frac{1}{2m}\vec{r}\times\vec{F}$

vagyis : $\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{1}{2m}\vec{r}\times\vec{F}$

$\vec{F}$ a Nap felé mutat, így $\vec{F} \parallel \vec{r} \rightarrow \vec{r}\times\vec{F} = 0 \rightarrow \dot{\vec{f}} = \text{áll.}$

ez éppen Kepler II. törv.

$\dot{\vec{f}}$ iránya is const. → a pálya síkja is állandó

centrális erő = a tp.-ra ható erő hatásvonala mindig átmegy a koord.rdsz. egy adott pt.-ján (pl. a Földre ható grav. erő mindig a Nap felé mutat)

↓

így Kepler II. másképpen : **centrális erő hatása alatt mozgó tömegpont területsebessége állandó**

egyúttal megkaptuk az **impulzusmomentum tételt tömegpontra :**

$$\left(\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{1}{2m}\vec{r}\times\vec{F}\right) \rightarrow \frac{d}{dt}\left(2m\cdot\vec{f}\right) = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M}$$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$$

perdülettétel : $\longrightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

ebből visszakapjuk a perdületmegmaradást :

ha $M = 0 \rightarrow L =$ állandó

(pl. centrális erőnél)

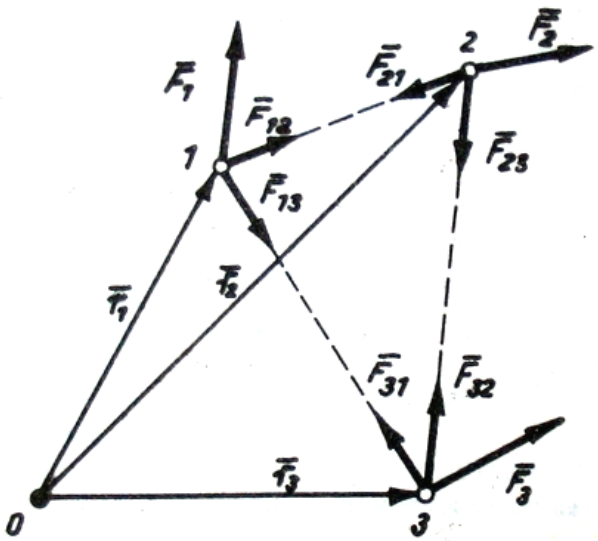
perdülettétel pontrendszerre :

tp.rdsz. perdülete = az egyes tp.-k perdületeinek összege :

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

az egyes tömegpontokra :



$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{M}_1 + \vec{M}_{12} + \vec{M}_{13} + \ldots$$

$$\frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{M}_2 + \vec{M}_{21} + \vec{M}_{23} + \ldots$$

stb…

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i$$

külső forgatónyomatékok

belső forgatónyomatékok

(mint impulzustétel)

zárt tp.rdsz. : $\forall M_i = 0$

ha még a belső erőkre $F_{ij} = -F_{ji}$ (N.III.törv.) mellett az is teljesül, h. közös hatásvonalúak, akkor $M_{ij} = -M_{ji}$ is teljesül

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M} = 0$$

$$\vec{L} = \text{állandó}$$

vagyis zárt tp.rdsz. teljes perdülete állandó

pl. : naprendszerre igaz

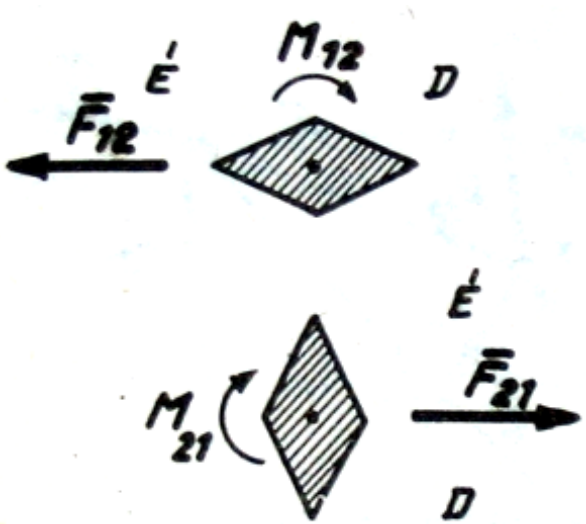
pontszerű, elektromosan töltött testekre is igaz

de :

nem zárt tp.rdsz.-re hatnak külső forgatónyomatékok :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i$$

ha a belső forgatónyomatékok nem ejtik ki egymást páronként : pl. egymásra ⊥ mágnesek, ekkor nem centrális erők a belső erők



↓

??? → ld később…

pl. : fonálinga még egyszer :

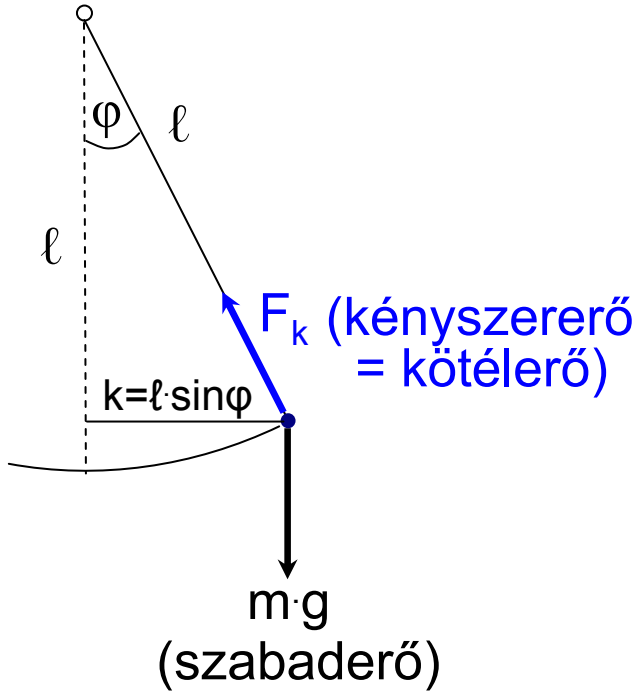
perdülettétel

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad \text{és} \quad L = \left|\vec{L}\right| = m \cdot \ell \cdot v \;;\; v = \ell \cdot \omega$$

$$\frac{d}{dt} m\ell v = \frac{d}{dt} m\ell \cdot \ell\omega = m\ell^2 \frac{d\omega}{dt} = m\ell^2 \ddot{\varphi} = M$$

$$M = \left|\vec{M}\right| = -m\left|\vec{g}\right| \cdot \left|\vec{\ell}\right| \cdot \sin\varphi = -mg \cdot k$$

$$m\ell^2 \ddot{\varphi} = -mg \cdot \ell \sin\varphi$$



ugyanaz a diff. egyenlet, mint amit korábban kaptunk a N.II.-nél !
(megoldást ld. ott)

pl. : bizonyítsuk be Kepler III.-t :

(a bolygópályák nagytengelyeinek köbei úgy aránylanak egymáshoz, mint a keringési idők négyzetei)

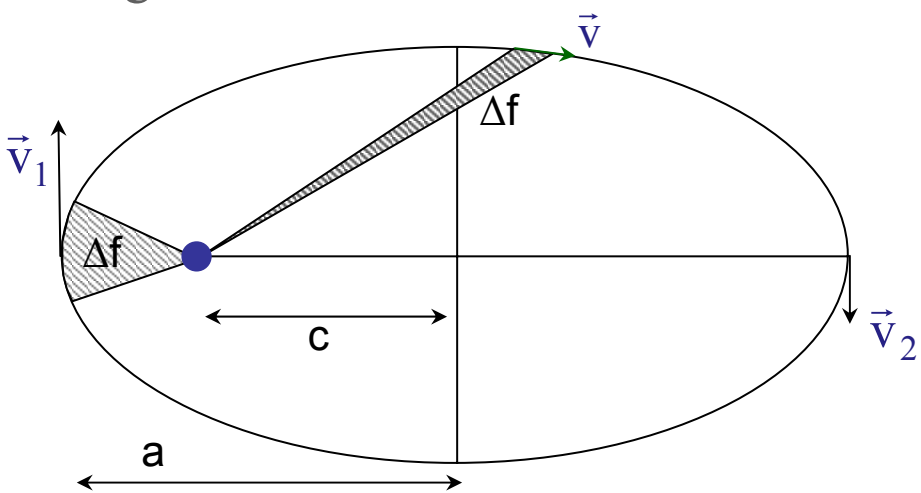
E_{mech} = állandó → napközelben ugyanannyi, mint naptávolban

$$\frac{1}{2}m\left(v_1^{\,2}-v_2^{\,2}\right)=\gamma mM\left[\frac{1}{a-c}-\frac{1}{a+c}\right]=\gamma mM\frac{2c}{a^2-c^2}$$

+ felületsebesség állandó :

T = ellipszis területe osztva területsebességgel :

keringési idő



$$T=\frac{ab\pi}{\frac{1}{2}(a-c)v_1}\quad\rightarrow\quad v_1=\frac{2ab\pi}{(a-c)T}$$

$$T=\frac{ab\pi}{\frac{1}{2}(a+c)v_2}\quad\rightarrow\quad v_2=\frac{2ab\pi}{(a+c)T}$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{4a^2b^2\pi^2}{T^2}\underbrace{\left[\frac{1}{(a-c)^2}-\frac{1}{(a+c)^2}\right]}_{4ac(a^2-c^2)^{-2}} = \gamma M\frac{2c}{a^2-c^2}$$

és ellipszisre : $b^2 = a^2-c^2$

$$\downarrow$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{1}{4\pi^2}\gamma M = \text{állandó}$$

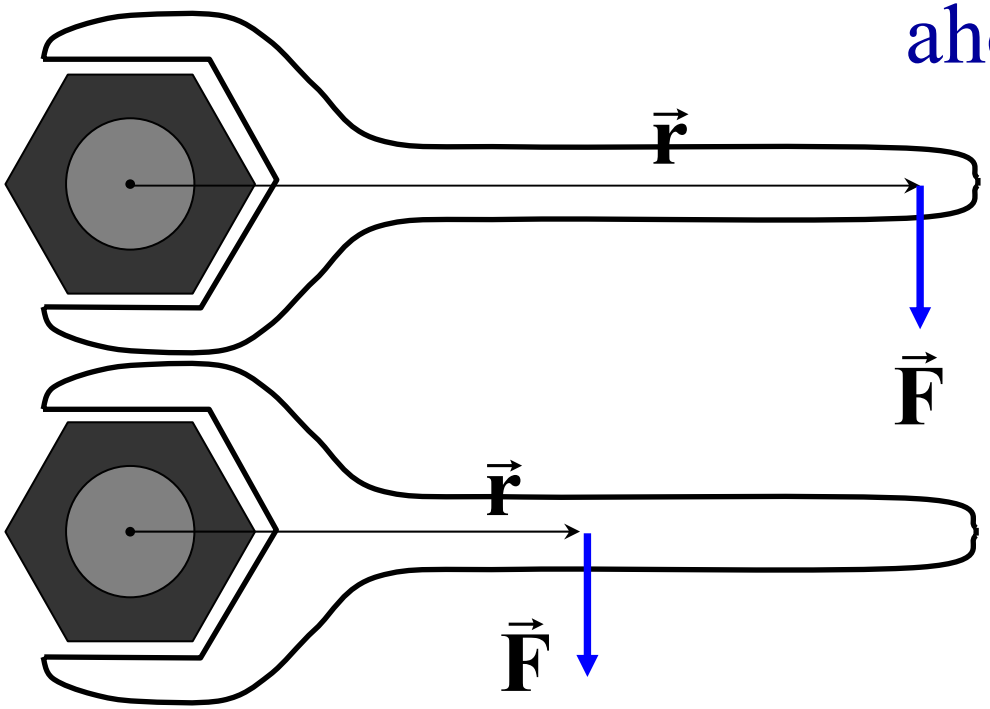
Kepler III.

merev test egyensúlya, forgatónyomaték :

egyensúlyban van ⟷ nyugalomban van

$\vec{v} = \text{áll.}$ $\vec{v} = 0$

$\sum_i \vec{F}_i = 0$ → de foroghat ! → $\sum_i \vec{M}_i = 0$



ahol M = **forgatónyomaték**

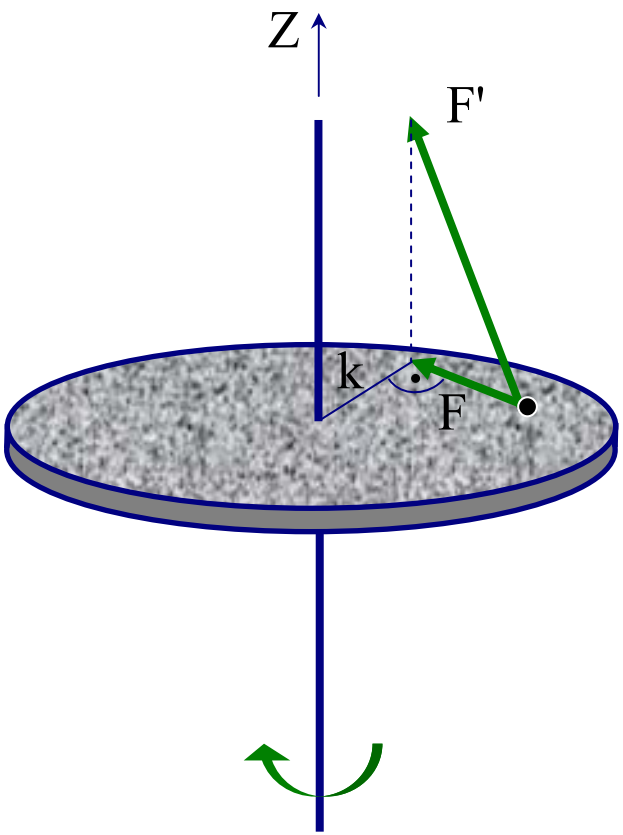
= „forgató hatás”

M = „erő×erőkar” = F·r

tengelyre vonatk. !!

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

tengely körüli forgás :



pl: ajtó nyitása

csak akkor van forgás, ha F hatásvonala nem megy át a tengelyen

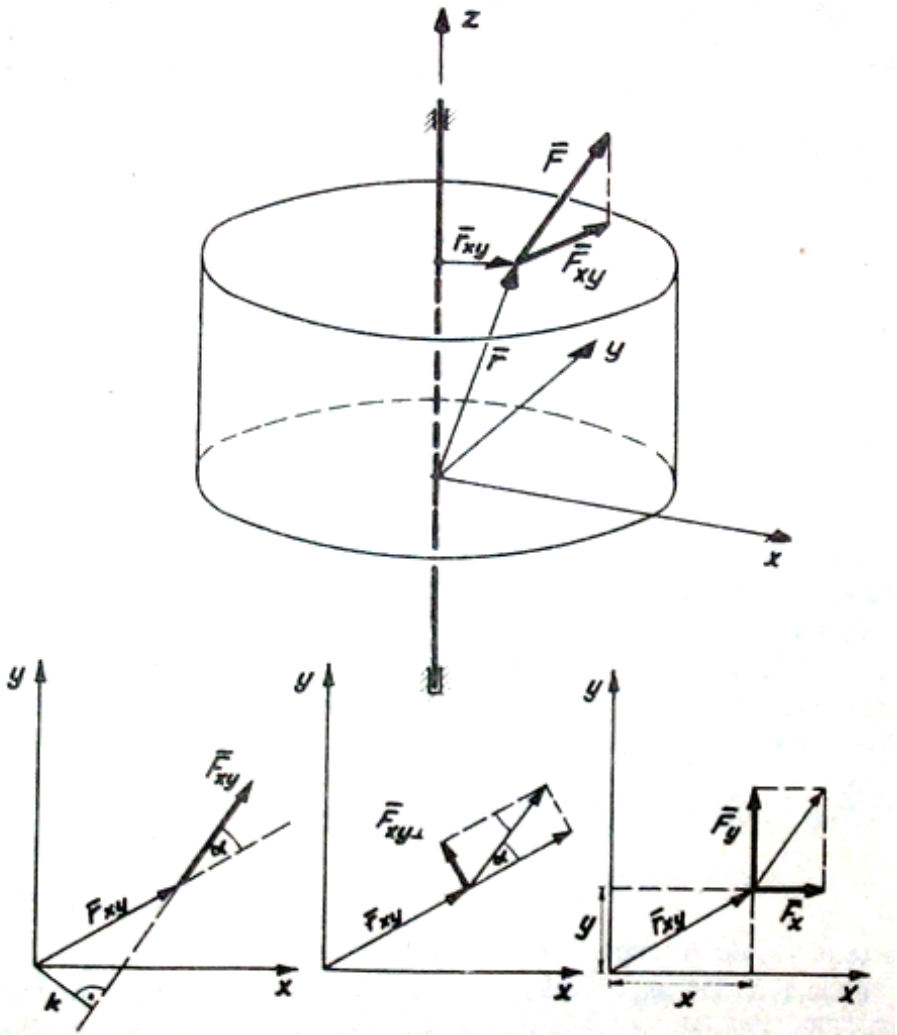
$$\mathbf{M_Z = F \cdot k}$$

erőkar

rögzített teng. körül forgó merev test a tengelyre merőleges síkban ható erők esetén akkor van egyensúlyban, ha a teng.-re vonatkozó forgatónyomatékok algebrai összege nulla

rögzített tengely, tengelyre vonatkozó forgatónyomaték :

egyetlen F erő hatására akkor és csakis akkor jön forgásba, ha F-nek van a tengelyre ⊥ komponense; és hatásvonal nem megy át a tengelyen



az okozott β nem egyértelmű :

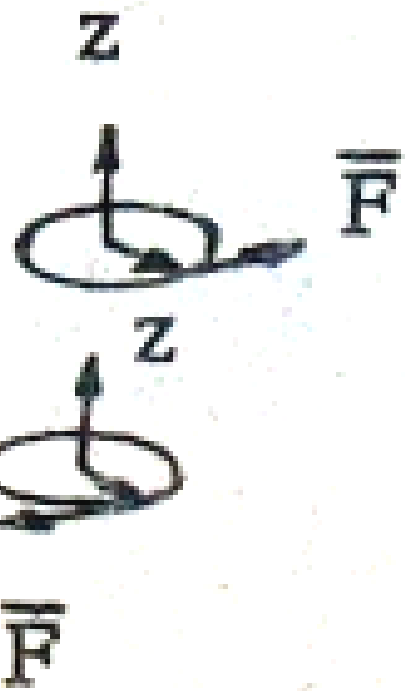
ugyanakkora, ugyanolyan irányú erő másként forgat, ha hatásvonala messzebb van a tengelytől

nagysága :

$$M_z = k \cdot F_{xy}$$

forgatónyomaték előjele :

$$M_z = \begin{cases} k\,F_{xy}, & \text{ha} \\ -k\,F_{xy}, & \text{ha} \end{cases}$$



M_z pozitív

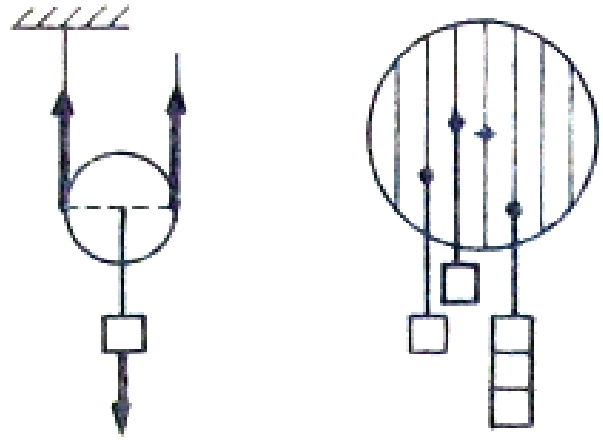
M_z negatív

pl. : kétkarú mérleg, lipityóka,
benzinmotor, fogaskerék,
hengerkerék, …

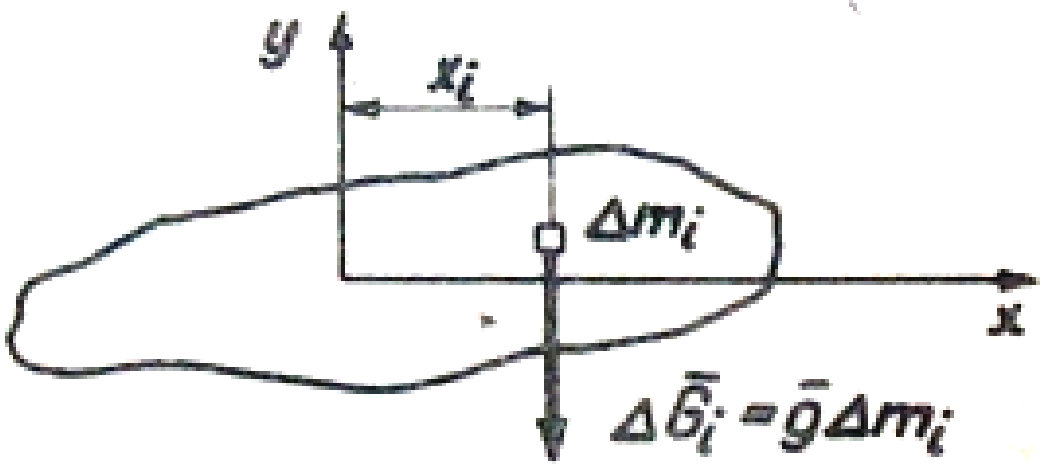
teng. körül forgatható testek **egyensúly**ban vannak, ha :

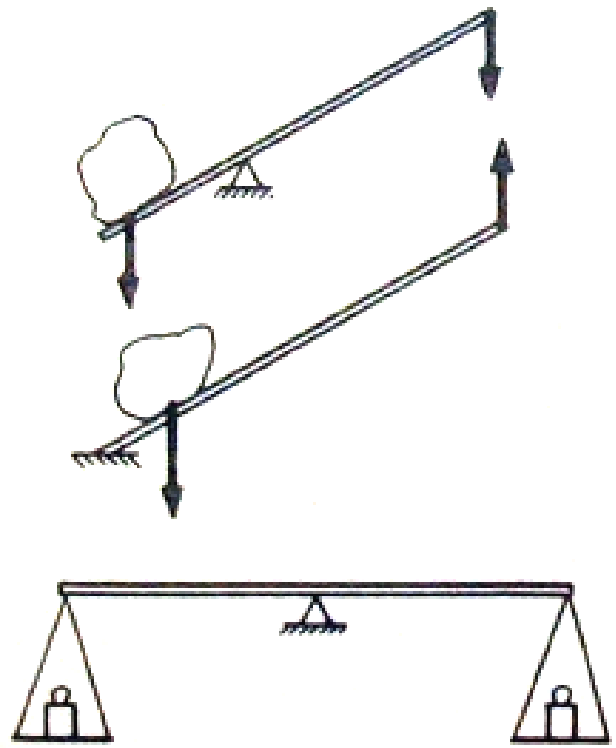
$$\sum_i M_{iz} = 0$$

(a jobbra és balra forgató nyomatékok összege egyenlő)



térfogati erők forgatónyomatéka:





$$\sum_i M_{iz} = \sum_i \Delta G_i \cdot x_i = \sum_i g \cdot \Delta m_i \cdot x_i = g \cdot \sum_i \Delta m_i \cdot x_i = g \cdot m \cdot x_{tkp}$$

pl. : vsz. teng. körül forgatható test hogyan áll be egyensúlyba ?

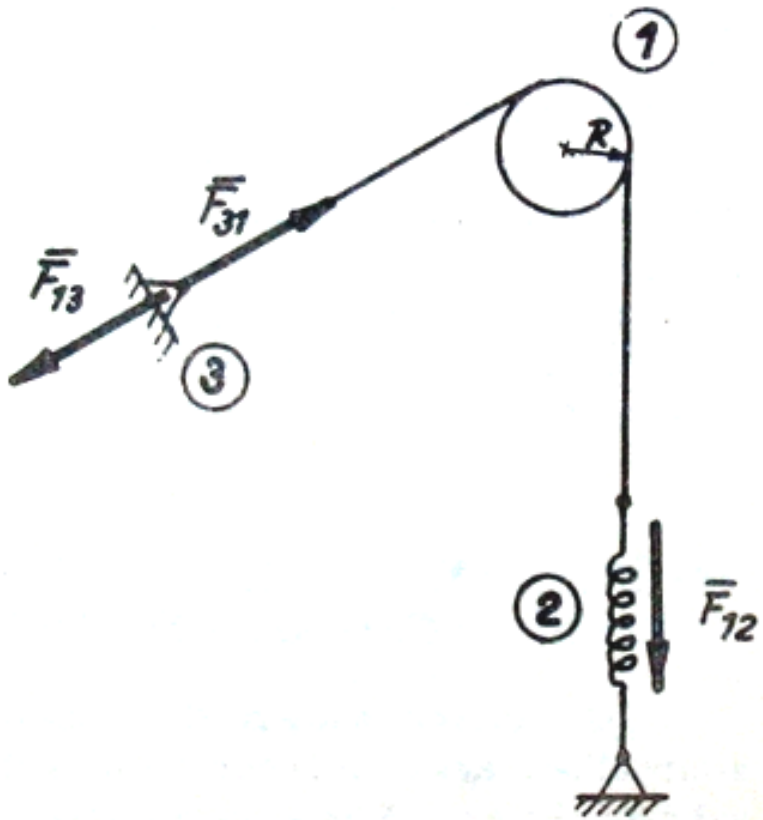
ha a tkp-ban van felfüggeszztve, akkor a súlyerő forgatónyomatéka a tkp.-on átmenő vsz. teng.-re nézve nulla

pl. : a fonal megváltozott iránnyal, de azonos nagysággal továbbítja az egyik végére ható erőt :

$$F_{12} \cdot R = F_{13} \cdot R$$

$$F_{12} = F_{13}$$

$$F_{31} = -F_{13}$$



emelő-tipusú egyszerű gépek : emelő, csiga, henger-kerék, fogaskerék- és szíj áttétel (pl. sebességváltó)

pl. : karos mérleggel **tömeget** mérünk :

$$m_1 g \ell_1 = m_2 g \ell_2 \longrightarrow m_1 \ell_1 = m_2 \ell_2$$

egyensúly esetén:

ha a karok egyenlők, akkor a tömegek is egyenlőek

a súlyáról nem tudunk biztosat, mert az függ a földrajzi helytől !!!

merev test egyensúlyának általános feltétele, pontra vonatkozó forgatónyomaték :

ha a merev test egyetlen pt.-ban van rögz.ve, akkor egyetlen koncentrált erő hatására akkor marad egyensúlyban, ha a hatásvonal átmegy a ponton

ekkor az erőnek tetsz., a forgásponton átmernő teng.-re vonatk. forgatónyomatéka nulla

erőhatás → elmozdulás, ha F hatásvonala átmegy a forgástengelyen (erőkar = 0)

erőhatás → elfordulás, ha nem megy át (van erőkar)

ha több erő hat → egyensúly van, ha az erők forgatónyomatékainak eredője nulla

ez tömören megfogalmazható a pontra vonatkozó forgatónyomaték vagy **forgatónyomaték vektor** segítségével :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

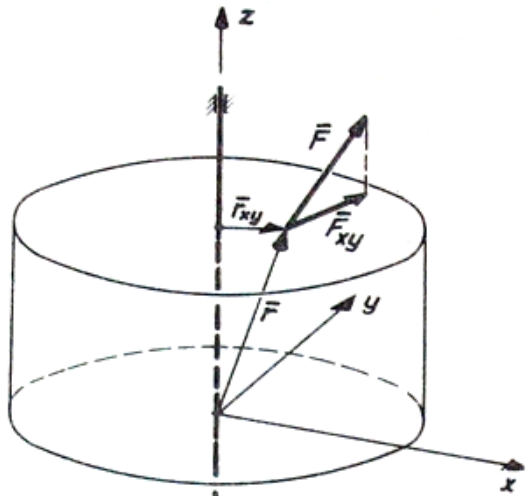
az $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ vektor komponensei az egyes tengelyekre vonatkozó forgatónyomatékokat adják
pl. a z-tengelyel párhuzamos komponense:

$$\vec{M}_z = \vec{r}_{xy} \times \vec{F}_{xy}$$

ennek nagysága:

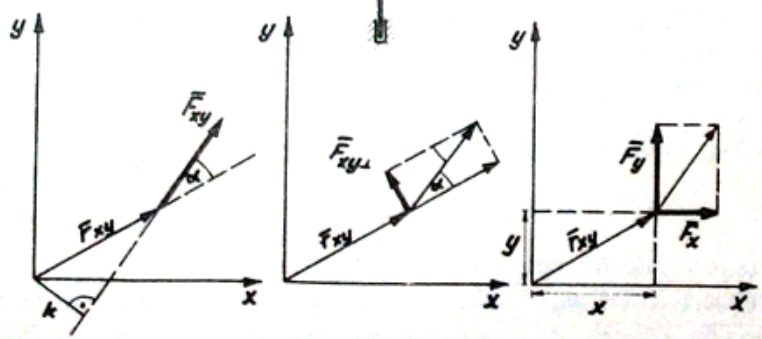
$$M_z = \left|\vec{M}_z\right| = r_{xy} \cdot F_{xy} \cdot \sin\alpha = k \cdot F_{xy} = r_{xy} \cdot F_{xy\perp}$$

$\vec{M}_z$ a z-teng. irányába mutat, ha $\vec{r}_{xy}$, $\vec{F}_{xy}$ és a z-teng. ebben a sorrendben jobbsodrású;
és ellentétes irányú egyébként



skalárkomponensekkel:

$$M_z = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$



(hasonlóan a többi komponens is)

ha $\vec{M} = 0$, akkor bárm. irányú teng.-re vonatk. vetülete is nulla $\longrightarrow$ $\forall$ i-re $M_i = 0$ (i = x, y, z)

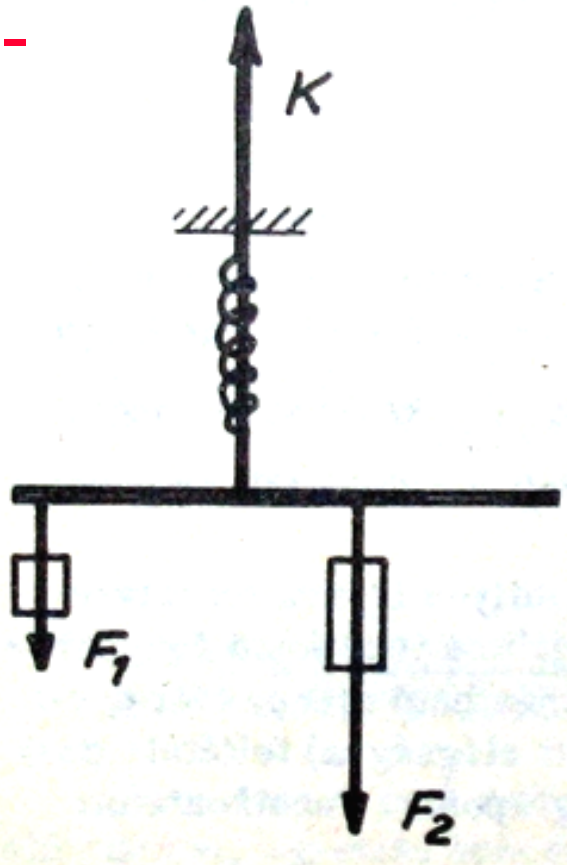
rögz. pont körül tetsz. forgatható merev test egyensúlyának szükséges és elégséges feltétele:

a testre ható külső erőknek a forgáspt.-ra vonatk. eredő forgatónyomatéka nulla legyen :

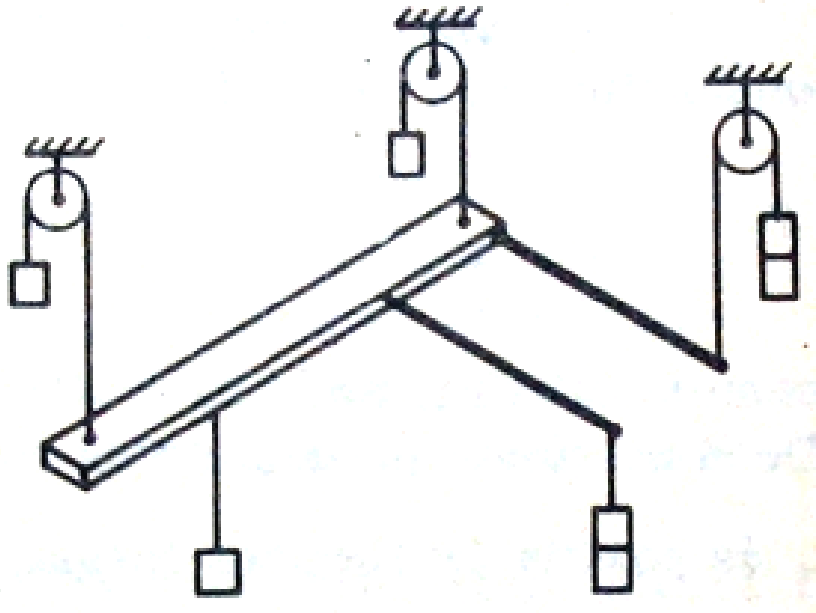
$$\sum \vec{M}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

és persze $F_{\text{eredő}} = 0$ is !

egyensúlyban van;
$\forall$ F-t tudunk mérni



egyensúlyban van; ∀ F-t tudunk mérni :

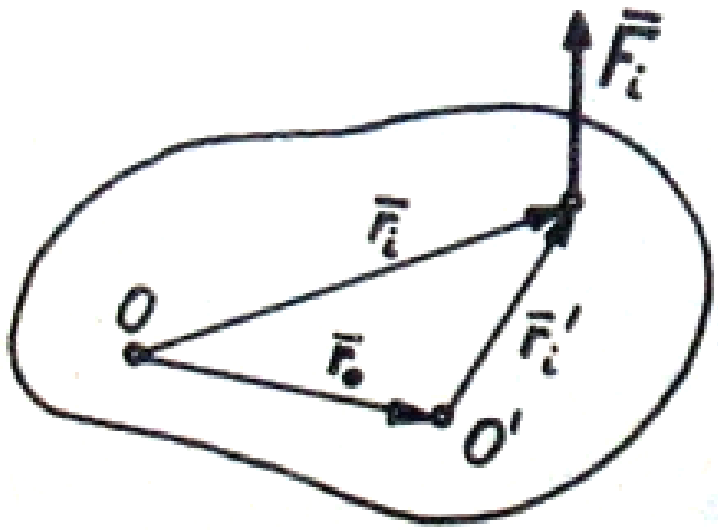


nincs kényszerekkel előírt forgáspont v. tengely, de

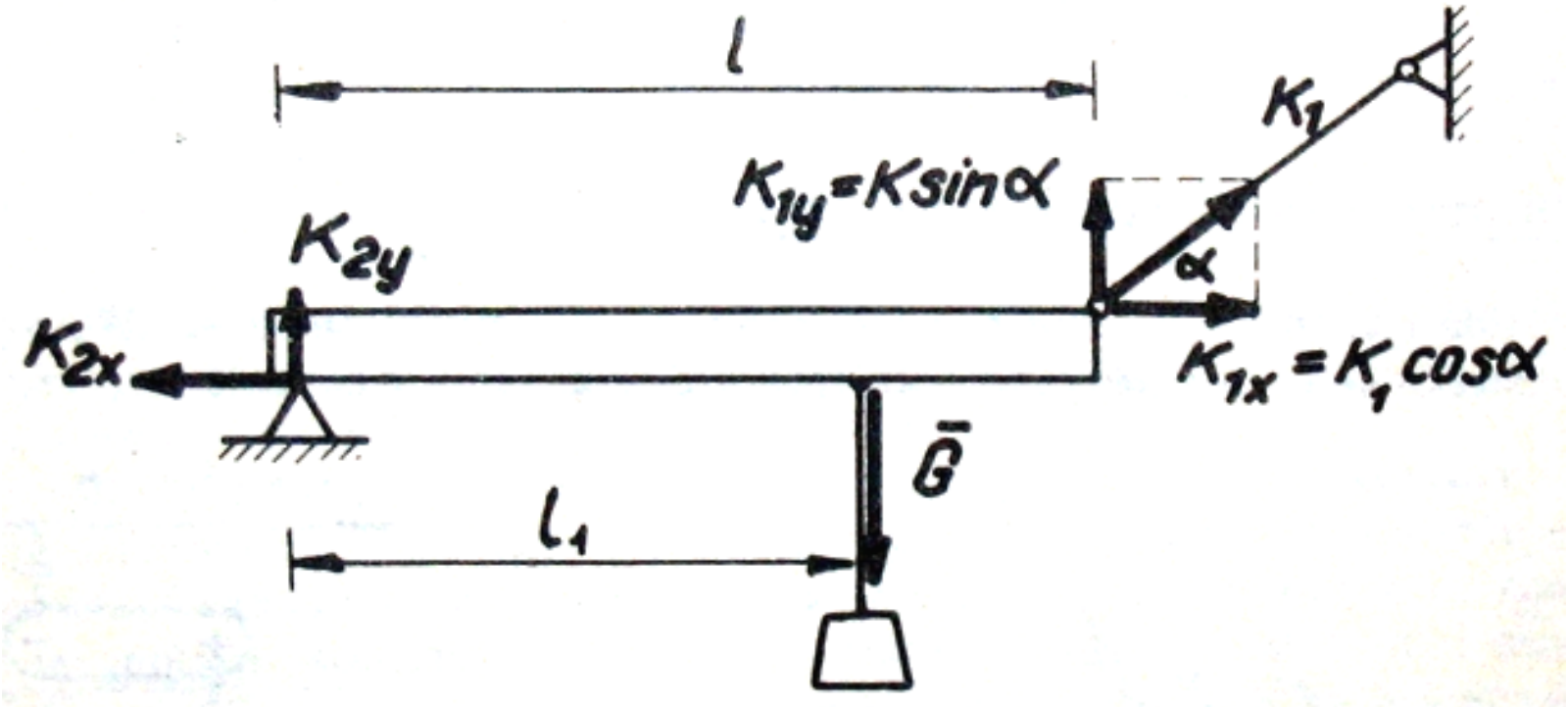
$$\sum \vec{M}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

ekkor is igaz, mert ha a testre ható erőknek vmely O pt.-ra vonatk. $\sum \vec{M}_i = 0$ akkor bárm. más O' pt.-ra vonatk. $\sum \vec{M}_i = 0$ is telj.

bizonyítás: HF



pl. :



milyen erővel nyomja a rúd a támaszt és milyen erővel húzza a kötelet?

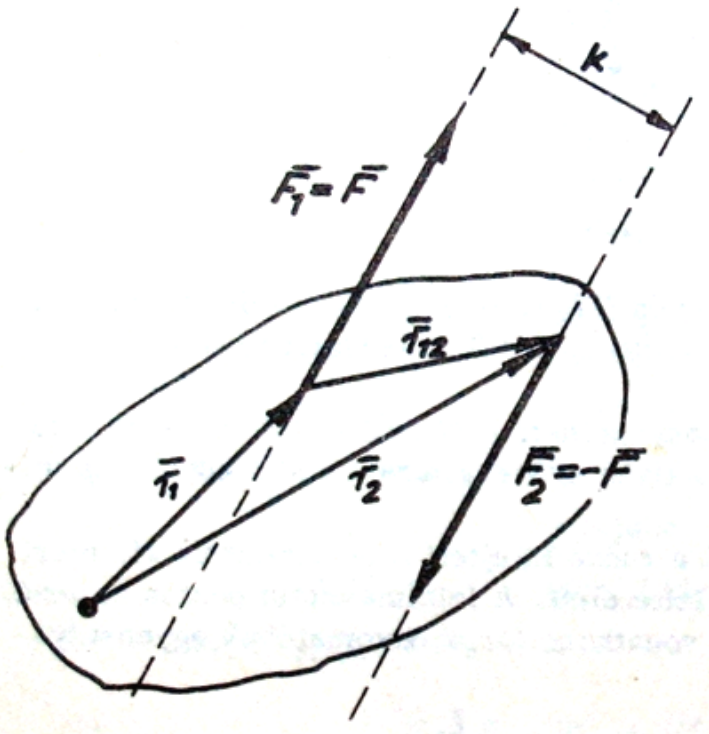
erőpár, koncentrált forgatónyomaték :

$\longrightarrow \vec{F}$

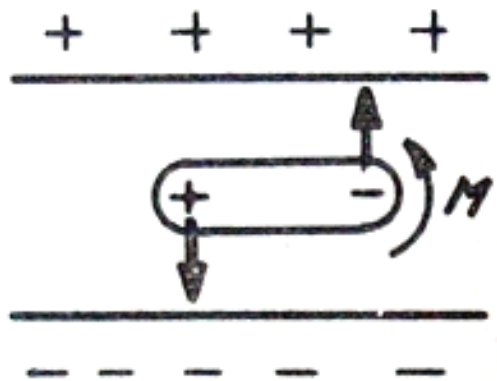
$-\vec{F} \longleftarrow$

$$\sum \vec{F} = 0$$

$\sum \vec{F} = 0$ ⟶ csak forgatónyomatéka van (csak forgatni tud)



pl. :



az erőpár forgatónyomatéka ∀ pontra ugyanannyi:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \left(-\vec{F}_1\right) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 =$$
$$= \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{F}_1 = \vec{r}_{21} \times \vec{F}_1 = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_2$$

a nagysága : $M = \left|\vec{M}\right| = F \cdot k$ iránya: jobbkézszabály

másik pl. : mágnestű homogén mágn. térben elfordul

de a mágn.tűre ható forgatónyomatékot nem lehet felbontani erőpárra: ha a mágnestűt ketévágjuk, akkor megint nulla eredő erőt és véges forgatónyomatékot kapunk
a mágn. töltéseket nem lehet szétválasztani, a mágnestű ∀ kis darabjára is csak forgatónyomaték hat, nem pedig erő

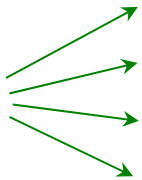
= **koncentrált forgatónyomaték**
(nem lehet erőpárra visszavezetni)

pl. a torziósszál is csak forgatónyomatékot fejt ki a ráakasztott testre

erőrendszerek ekvivalens helyettesítése :

ismétlés:

merev testre ható erők



térfogati erők
felületi erők
vonalmenti eloszlású erők
pontban koncentrált erők

- *térfogati erők*: a teljes térfogatban hatnak, a „terek” által kifejtett erők (gravitáció, elektrosztatikus, mágneses erők). Ezen belül a tömeggel arányos a ***tömegerő*** (grav. és nehézségi erők)

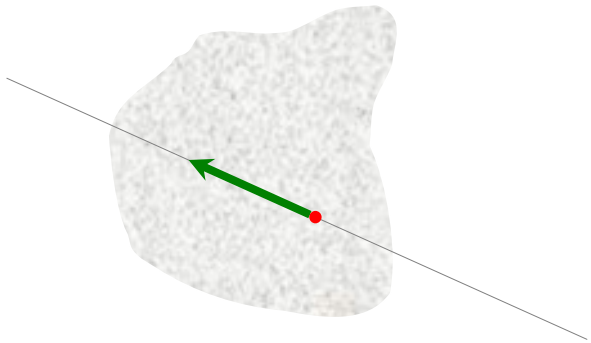
- *felületi erők*: rövid hatótáv., felületi érintkezés útján fejtik ki hatásukat (kényszererők, súrlódási erő, közegellenállás)

- *vonalmenti eloszlású erők*: igen kis felületen (vonal mentén) érintkező testek között (pl. kés éle)

- *pontban koncentrált erők*: igen kis felületen (egyetlen pontban) ható rövid hatótáv.-ú erők.

támadáspont: a testnek az a pontja, ahol a pontban koncentrált erő hat („érintkezik” a testtel)

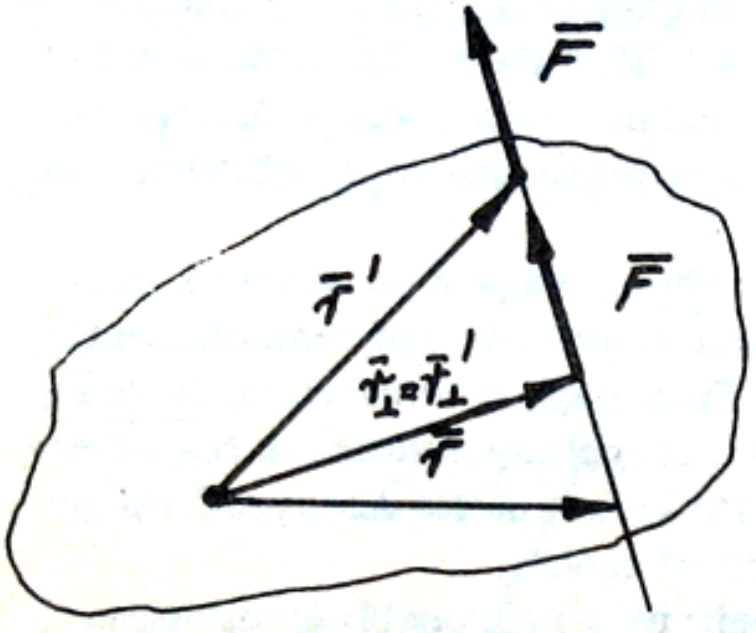
hatásvonal: a támadásponton átmenő, a pontban koncentrált erő vektorral párhuzamos egyenes



erőrendszerek redukálása, összetevése:

ekvivalens helyettesítés = a helyettesítő erőnek „ugyanaz a hatása”, az erő egyenlő az erőrendszer eredőjével és a forgatónyomatéka is ugyanaz → hatására a merev test ugyanúgy fog mozogni

1. pontban koncentrált erő helyettesíthető ugyanolyan irányú, nagyságú és hatásvonalú erővel
   [hétköznapi nyelven: pontban koncentrált **erő a hatásvonala mentén eltolható**]
   (nem változik a merev testre gyakorolt hatása: se a tkp. gyorsulása, sem a forgatónyomatéka)

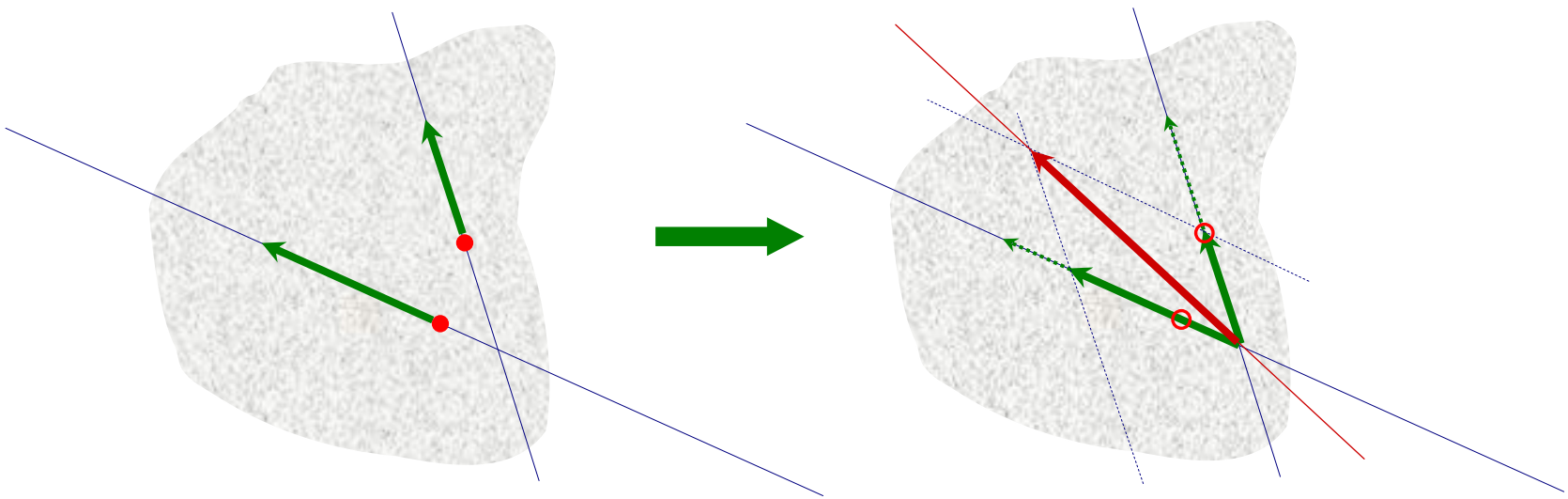


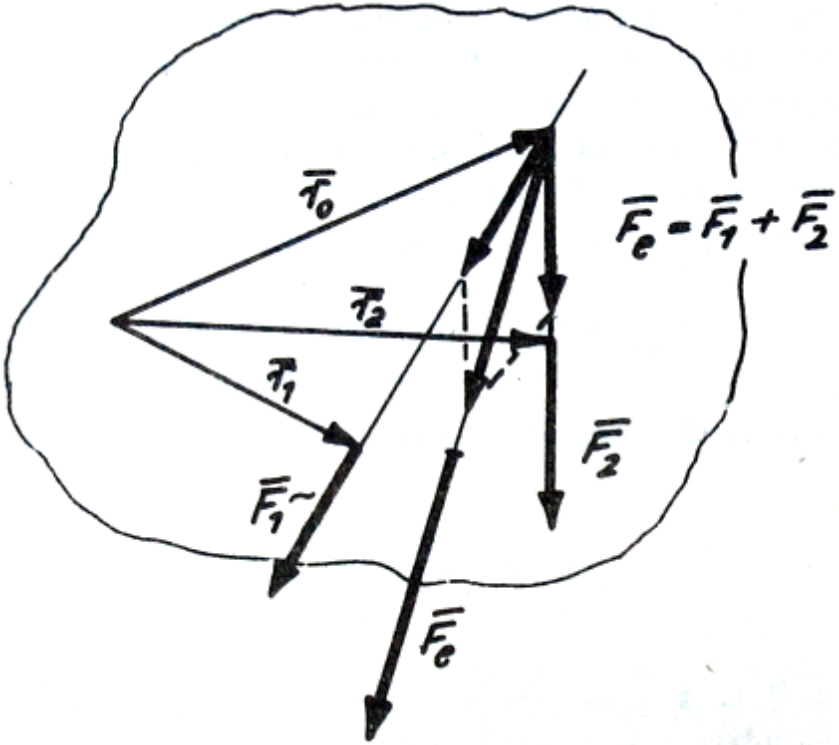
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}' = \vec{r}' \times \vec{F} = \vec{r}'_{\perp} \times \vec{F}$$

$$\text{de} \quad \vec{r}_{\perp} = \vec{r}'_{\perp} \quad \Rightarrow \quad \vec{M} = \vec{M}'$$

2. **2 erő eredője:** két koncentrált erő helyettesíthető egy olyan erővel, amely a 2 erő összege és amelynek támadáspontja a két eredeti erő hatásvonalainak metszéspontjába esik





$$\vec{M}' = \vec{r}_0 \times \vec{F}_e = \vec{r}_0 \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) =$$

$$\vec{r}_0 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_0 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

felhasználtuk az 1. szabályt

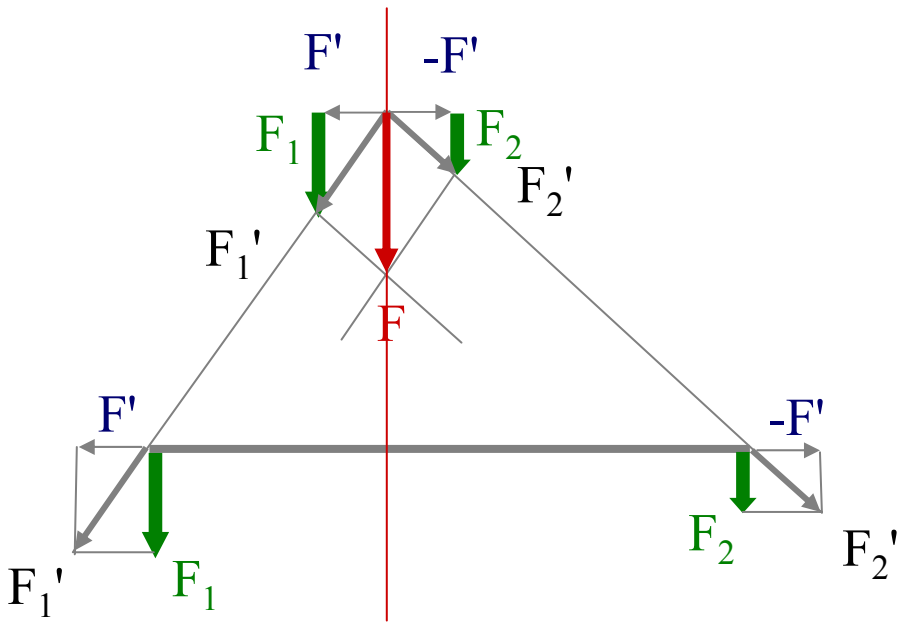
2/a. több erő eredője: a merev testre ható több erő helyettesíthető egyetlen pontban koncentrált erővel. Az eredő erő hatása ugyanaz, mint a többi erő együttes hatása

több erő eredőjét az előző pont szerint lehet megkereseni, lépésről lépésre, de ez az eljárás nem használható párhuzamos vagy kitérő hatásvonalú erők esetén

3. párhuzamos erők eredője:

ellentétes irányú, egyforma nagyságú, közös hatásvonalú erők eredője: 0

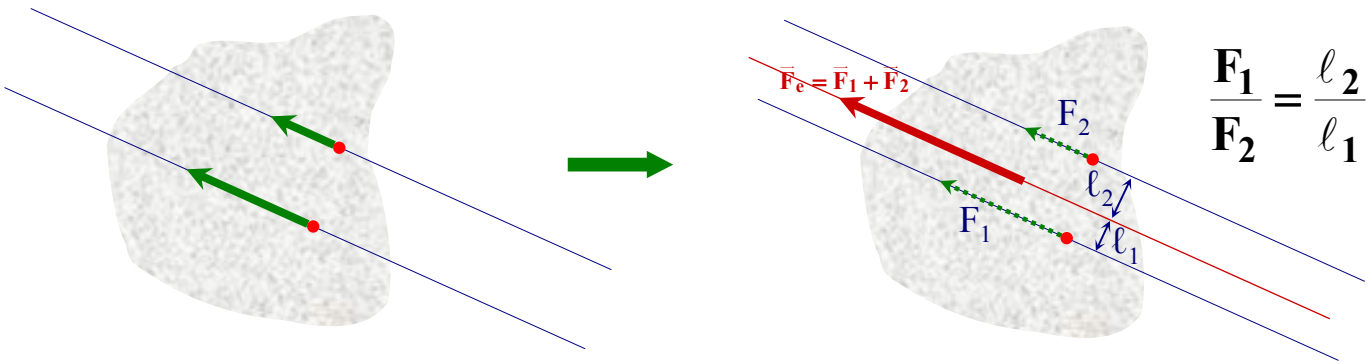
bármely erőrendszerhez hozzáadhatunk egy $\vec{F}'$ és $-\vec{F}'$ segéderőkből álló rendszert



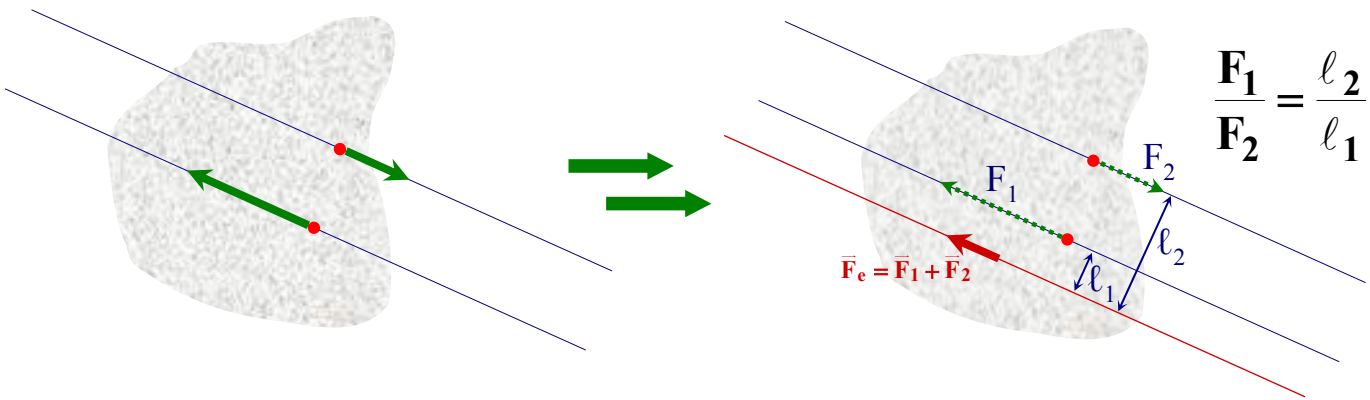
F_1' és F_2' eredőjének megszerkesztéséhez felhasználtuk a 2. szabályt

erőpár esetén nem használható !

párhuzamos, egyirányú erők eredője:



párhuzamos (nem közös hatásvonalú) ellentétes irányú erők eredője:

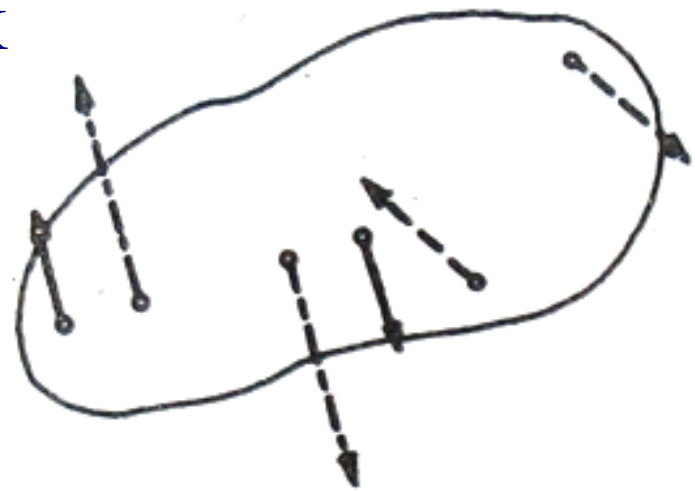


párhuzamos, nem közös hatásvonalú, ellentétes irányú, egyforma nagyságú erők:

→ **erőpár**

közös pontban ható, tetszőleges irányú erőkből álló erőrendszer mindig helyettesíthető egyetlen, pontban koncentrált erővel.

erőpárnak nincs ekv. eredője, csak másik erőpárral helyettesíthető : ugyanabban a síkban fekvő erőpár, ugyanolyan forgásirányú és k'F' = kF

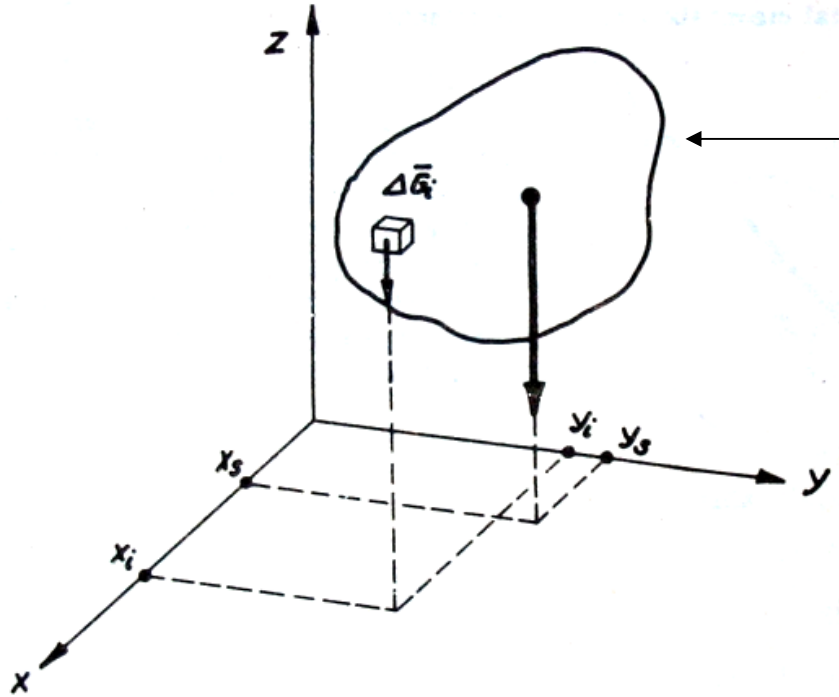


legáltalánosabb erőrendszer ekv. helyettesíthető egy **erőcsavar**-ral = 1 erőpár + 1 rá ⊥ erő

nem közös pontban ható, tetszőleges irányú erőkből álló erőrendszer mindig helyettesíthető egyetlen erőcsavarral

súlypont :

keressük a test súlyának (térfogati erő!) ekv. eredőjét



vizsgált test

x és y teng.-k a vsz. síkban,
a z-teng. függőleges

a testet kis Δm_i darabokra bontjuk, az i-edik db súlyának forgatónyomatéka a 3 tengelyre :

$$M_{ix} = -\Delta m_i \cdot g \cdot y_i, \qquad M_{iy} = \Delta m_i \cdot g \cdot x_i, \qquad M_{iz} = 0$$

az eredő forgatónyomaték komponensei :

$$M_x = -g \cdot \Sigma \Delta m_i \cdot y_i, \qquad M_y = g \cdot \Sigma \Delta m_i \cdot x_i, \qquad M_z = 0$$

az ekv. eredő = G = m·g, ennek forgatónyomatéka :

$M_x = -g \cdot m \cdot y_s$, $M_y = g \cdot m \cdot x_s$, $M_z = 0$

az ekv. eredő keresett támadáspontjának koord.-i

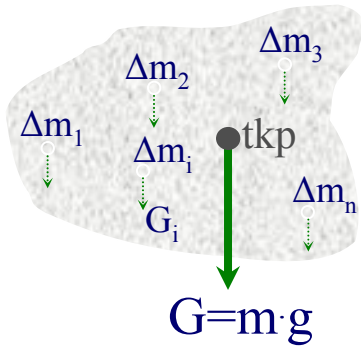
$$x_s = \frac{\sum x_i \cdot \Delta m_i}{m}, \quad y_s = \frac{\sum y_i \cdot \Delta m_i}{m}$$

z_s határozatlan marad, ami természetes, mert az ekv. eredő hatásvonalának $\forall$ pt.-jába helyezhető

ha a testet más helyzetbe hozzuk, az ekv. eredő hatásvonala más lesz → a testnek végtelen sok súlyvonala van

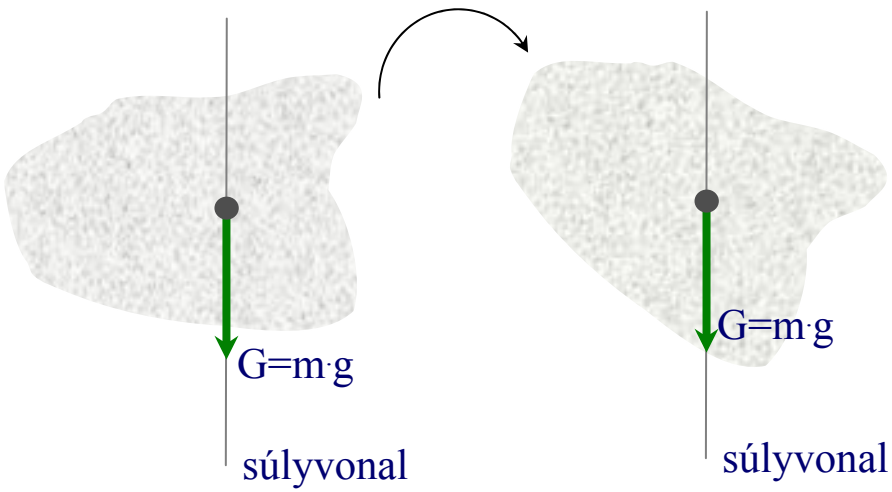
ezek egyetlen pt.-ban metszik egymást, a tkp.-ban = **súlypont**

ha a test nem túl nagy, vagyis a térfogatán belül g nagysága és iránya mindenhol egyforma, akkor a grav. erő helyettesíthető a test tkp-ban ható egyetlen (pontban koncentrált) erővel:



$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{n} \Delta \mathbf{m_i} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{g}$$

súlypont: az a pont, ahol a nehézségi erő koncentrált eredője támad (homogén grav. térben egybeesik a tkp-al)
súlyvonal: a pontban koncentrált nehézségi erő hatásvonala (mindig függőleges), átmegy a súlyponton:



súlypont meghatározása:

- kísérletileg
- szerkesztéssel

pl. : test (vonalzó) súlypt.-nak megkeresése felfüggesztéssel

tömegpont impulzusmomentuma : $\mathbf{L = r \cdot m \cdot v}$ ($= r \cdot p$)

= „forgási impulzus” ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$)

perdülettétel : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M} = 0$

$\vec{L}$ = állandó = perületmegmaradás

ha a tp. körpályán mozog: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v} = m \cdot \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = mr^2 \vec{\omega}$$

ekkor a perdülettétel : $\dot{\vec{L}} = mr^2 \vec{\beta} = \vec{M}$

(analóg a tp. mozgását leíró N.II.-vel)

az mr^2 mennyiség „felel meg” a tömegnek:

tehetetlenségi nyomaték: $\Theta = mr^2$

tengelyre vonatk.-va: $\mathbf{M_z = \Theta \cdot \beta_z}$

perdülettétel pontrendszerre :

tp.rdsz. perdülete = az egyes tp.-k perdületeinek összege :

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

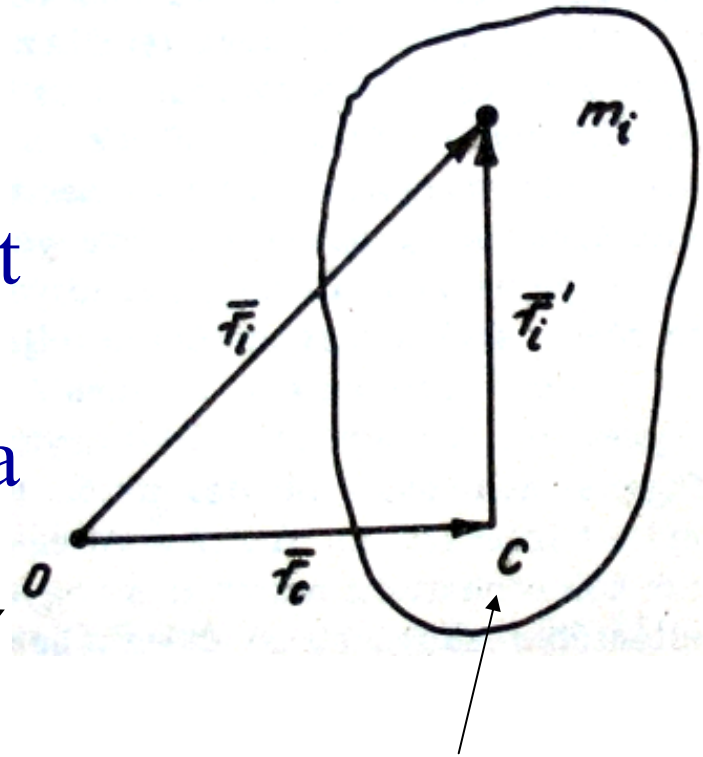
az egyes tömegpontokra :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_1}{dt} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_{12} + \vec{M}_{13} + \dots \\ \frac{d\vec{L}_2}{dt} &= \vec{M}_2 + \vec{M}_{21} + \vec{M}_{23} + \dots \\ &\text{stb…} \end{aligned}\right\} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i$$

pálya- és sajátperület :

a perdülettétel áttekinthetőbb alakba írható, ha a teljes perdületet két tag összegére bontjuk :

egyik a tkp.-ra vonatk. perdülete, a másik pedig a tkp.-nak az eredeti pontra vonatkozó perdülete



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i' \longrightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i'$$

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = m_i \cdot (\vec{r}_c + \vec{r}_i') \times (\vec{v}_c + \vec{v}_i') =$$

$$= \vec{r}_c \times m_i \vec{v}_c + \vec{r}_c \times m_i \vec{v}_i' + m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_c + \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

a tp.-nak a tkp.-ra vonatk. perdülete

a teljes perdület =

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \vec{r}_c \times \underbrace{\left(\sum m_i\right)}_{m} \vec{v}_c + \vec{r}_c \times \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i{}'}_{0} + \underbrace{\left(\sum m_i \vec{r}_i{}'\right)}_{0} \times \vec{v}_c + \sum \vec{r}_i{}' \times m_i \vec{v}_i{}'$$

$$\frac{\sum m_i \vec{v}_i{}'}{m} \uparrow, \quad \frac{\sum m_i \vec{r}_i{}'}{m} \uparrow$$

a tkp. sebessége ill. helyvektora a tkp.-hoz képest

$$\vec{L} = \vec{r}_c \times m \cdot \vec{v}_c + \sum \vec{r}_i{}' \times m_i \vec{v}_i{}' = \vec{L}_{\text{pálya}} + \vec{L}_{\text{saját}}$$

a perdülettétel külön érv. mindkét tagra :

$$\frac{d\vec{L}_p}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_c \times m\vec{v}_c\right) = \underbrace{\vec{v}_c \times m\vec{v}_c}_{0} + \vec{r}_c \times m\vec{a}_c = \vec{r}_c \times \sum \vec{F}_i$$

= a tkp.-ba, mint támadáspt.-ba képzelt külső erők forgatónyomatékával

$$\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'\right) = \underbrace{\sum \vec{v}_i' \times m_i \vec{v}_i'}_{0} + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i'$$

ha $F_{\text{külső, eredő}} \neq 0$, a tkp. gyorsulva mozog

a_i' az i-edik tp.-nak a tkp.-hoz rögz. von.redsz.-beli gyorsulása azaz a tkp.-al együtt haladó von.rdsz.-beli gyorsulása ⟶ tehetetlenségi erőket is figyelembe kell venni : ezek a tp.-k tömegeivel arányosak és egymással ∥-k, mint a nehézségi erő. Az ilyen erődsz. ekv. eredője a tkp.-n átmenőhatásvonalú koncentrált erő, aminek a tkp.-ra vonatk. forgatónyomatéka 0, így

$$m_i \cdot \vec{a}_i' = \vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{i,\text{teh}}$$ -t helyettesítve oda

a teh. erők forgatónyomatékai összesen 0-t adnak, és felt. h. a belső erők forgatónyomatékai is kiejtik egymást

$$\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'\right) = \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i' \quad \text{és} \quad m_i \cdot \vec{a}_i' = \vec{F}_i$$

így marad :

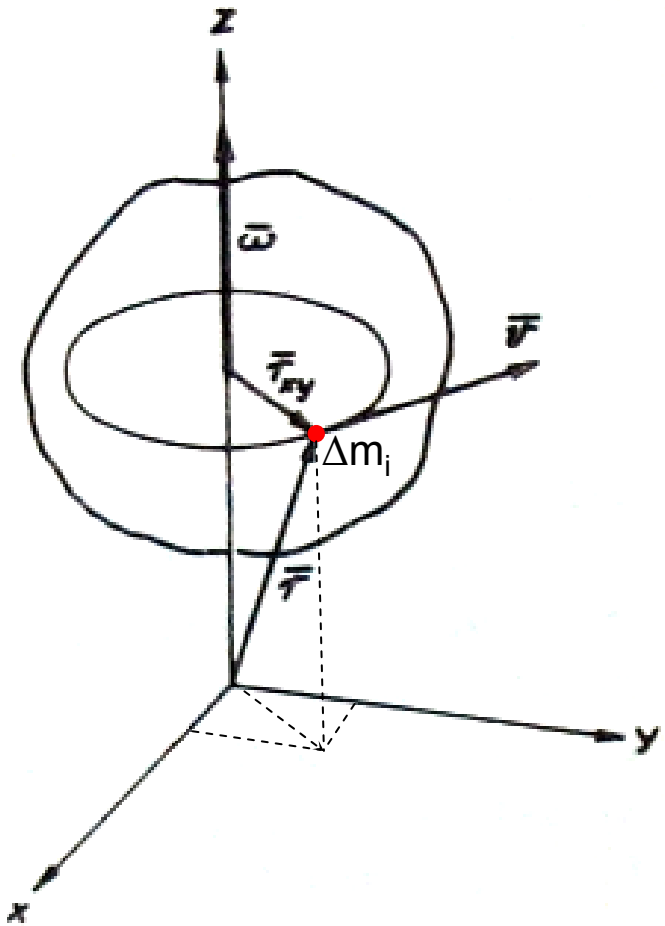
$$\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i$$

vagyis:
a bárhogyan gyorsuló tkp.-ra vonatk.perdület vált. gyorsaságát megadja a testre ható valódi külső erőknek a tkp.-ra vonatk. eredő forgatónyomatéka

merev test forgása rögzített teng. körül, a forgómozgás alapegyenlete, tehetetlenségi nyomaték :

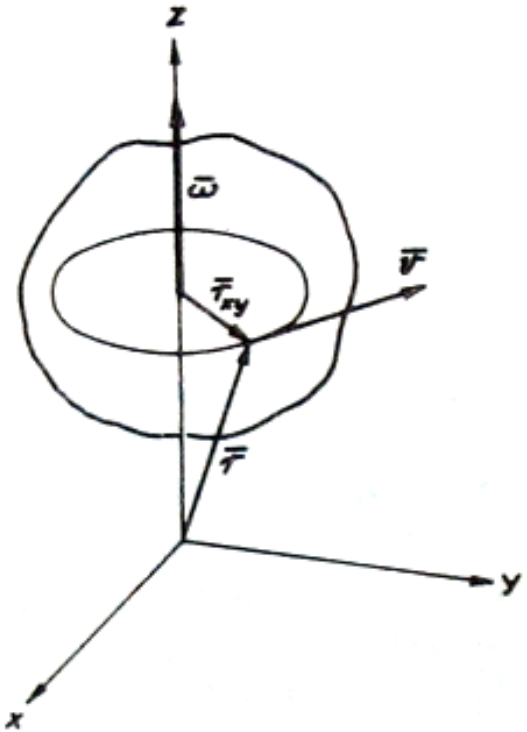
rögz. teng. ⟶ elegendő a perdület teng.-irányú komponensével foglalkozni

ez elég a merev test forgásának leírásához, ha a teng. irányának megtartásához szüks. külső forgatónyomaték nem érdekel minket ⟶ pörgettyűk (ld később)



legyen z-teng. = forgásteng.

$$\vec{L}_{i,z} = \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^{\,2} \cdot \vec{\omega}$$



$$\vec{L}_{i,z} = \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^{\,2} \cdot \vec{\omega}$$

nagysága :

$$\left|\vec{L}_{i,z}\right| = \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^{\,2} \cdot \left|\vec{\omega}\right| = \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^{\,2} \cdot \omega$$

skalárkomponense :

$$L_{i,z} = \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^{\,2} \cdot \omega_z = \pm \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^{\,2} \cdot \omega$$

+, ha $\vec{\omega}$ és z-teng. $\uparrow\uparrow$, és

-, ha $\vec{\omega}$ és z $\uparrow\downarrow$

a teljes perdület : $\vec{L}_z = \sum \vec{L}_{i,z} = \sum \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^{\,2} \cdot \vec{\omega}$

vagy a kontinuum-modell szerint a felosztást végtelenül finomítva :

$$\vec{L}_z = \lim_{\Delta m_i \to 0} \left(\sum \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^{\,2} \cdot \vec{\omega} \right) = \left(\underbrace{\lim_{\Delta m_i \to 0} \sum \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^{\,2}}_{} \right) \cdot \vec{\omega} = \Theta \cdot \vec{\omega}$$

$$\Theta = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^{\,2} = \int r_{i,xy}^{\,2} \, dm$$

$$\vec{L}_z = \Theta \cdot \vec{\omega}$$

$$L_z = \Theta \cdot \omega_z \quad \text{és} \quad \left|\vec{L}_z\right| = \Theta \cdot \omega$$

Θ a test tömegeloszlásától függ

kísérlet : tömör és üres karika legurulása a lejtőn

hasonlít a haladó mozg.-nál def. lendülethez :

m ⟶ tehetetlenség

Θ ⟶ tehetetlenség a forgó mozgásra

Θ = tehetetlenségi nyomaték

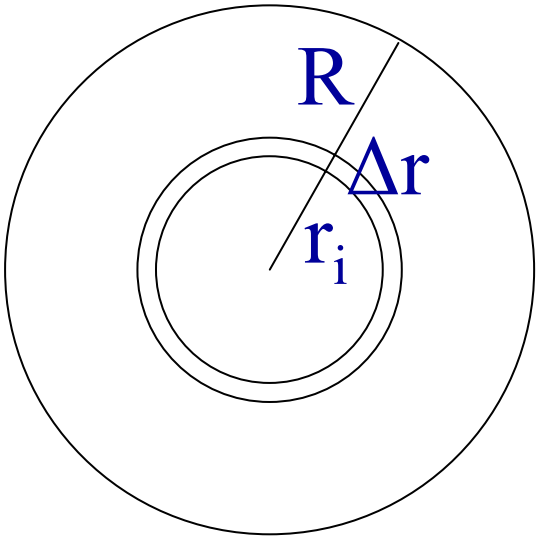
(z-teng.re vonatk. teh. nyomaték)

mivel merev test rögz. teng. körüli forg. esetén Θ = állandó

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\Theta \cdot \vec{\omega}\right) = \Theta \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \Theta \cdot \vec{\beta}$$

$$\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\beta} = \text{forgó mozg. alapegyenlete}$$

pl. : tömör korong tehetetlenségi nyomatéka :

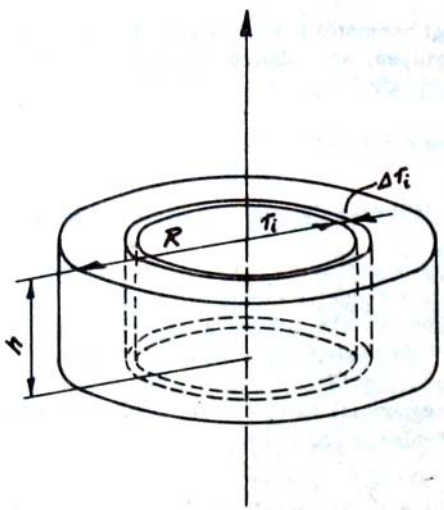


$$\Theta = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 =$$

$m=\rho \cdot V = \rho \cdot R^2 \pi \cdot h$

$\Delta V = 2r\pi \cdot dr \cdot h \quad (=dV)$

$$= \sum_i \rho V_i \cdot r_i^2 = \sum_i \rho \Delta V \cdot r_i^2 =$$



$$= \int_V \rho \cdot r^2 dV = \int_0^R \rho r^2 2r\pi h dr = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr =$$

$$= \rho 2\pi h \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \rho 2\pi h \frac{R^4}{4} - 0 = \underbrace{\rho R^2 \pi h}_{m} \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

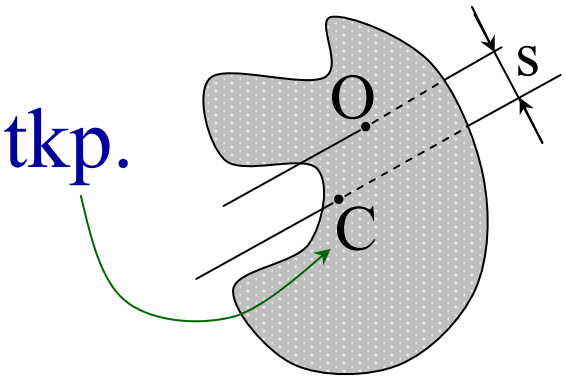
üres gyűrű : $\Theta = mR^2$, gömb : $2/5mR^2$, ℓ hosszúságú pálca kp.-jára : $1/12m\ell^2$ és végére $1/3m\ell^2$, stb…

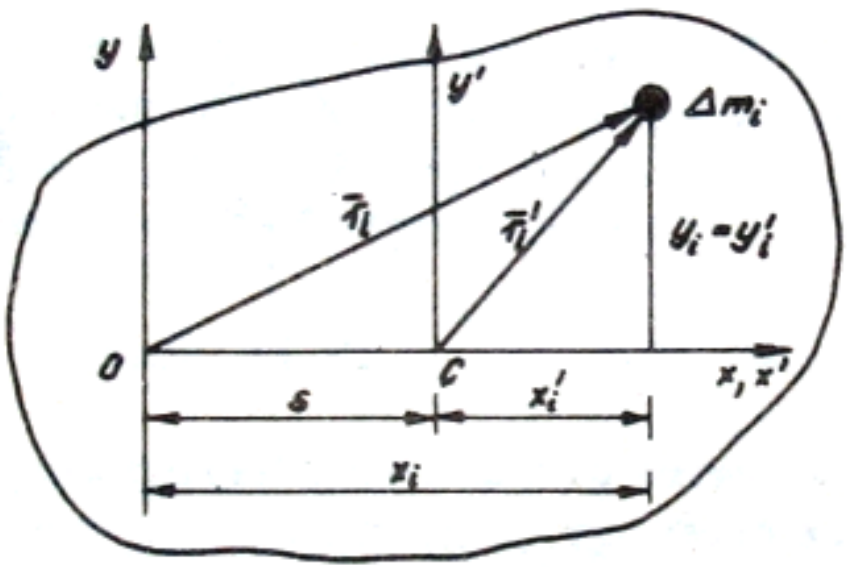
Θ = a forgató hatással szembeni „ellenállás”, tehetlenség mértéke

(mint a tömeg a mozgató hatással szembeni tehetetlenség mértéke)

Steiner tétele : $\Theta_O = \Theta_C + m \cdot s^2$

= tkp.

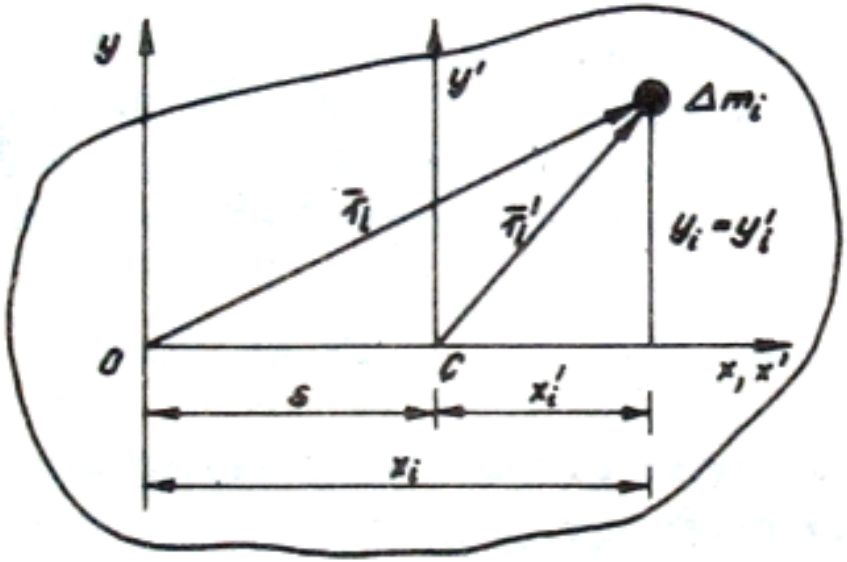




a K-koord.-rdsz. z-teng. essen egybe az új forg.teng.-el, az x-teng.-e menjen át a tkp.-on (⟶ a forg.teng az ábra síkjára ⊥)

a K' koord.-rdsz. origója pedig essen a tkp.-ba és teng.-i legyenek ∥ a K teng.-ivel.

ekkor $\forall$ Δm_i tömegpontjának az új és a régi tengelyektől mért távolságai között



$$\mathbf{r_i^2} = x_i^2 + y_i^2 = (x_i'+s)^2 + y_i'^2 =$$
$$= x_i'^2 + y_i'^2 + 2sx_i' + s^2 =$$
$$= \mathbf{r_i'^2 + 2sx_i' + s^2}$$

összefüggés olvasható le

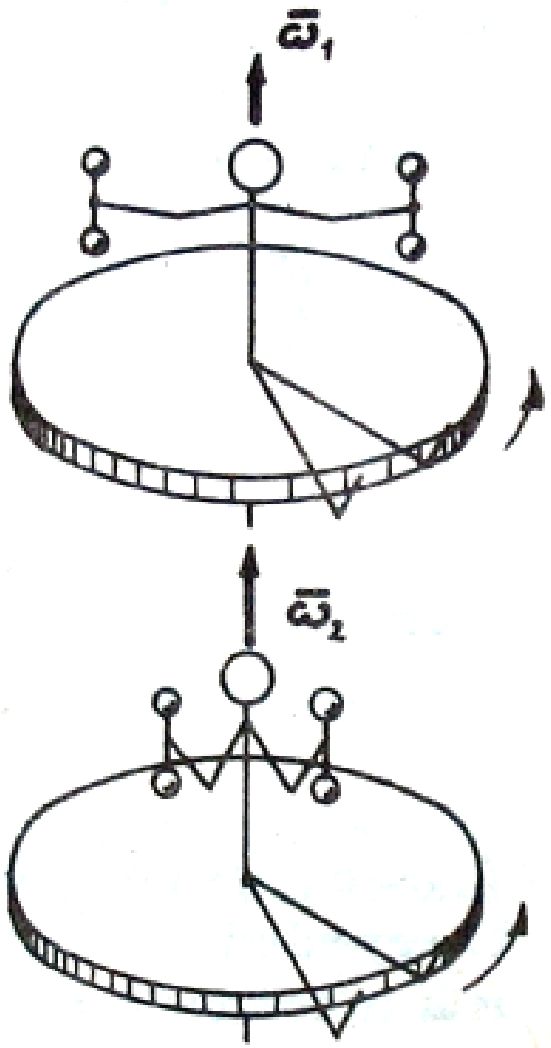
$$\underline{\Theta_O} = \sum r_i^2 \cdot \Delta m_i = \sum \left((r_i'^2 + 2sx_i' + s^2) \cdot \Delta m_i \right) =$$
$$= \sum r_i'^2 \cdot \Delta m_i + 2s \cdot \sum x_i' \cdot \Delta m_i + s^2 \cdot \sum \Delta m_i =$$
$$= \Theta_C + 0 + m \cdot s^2 = \underline{\Theta_C + m \cdot s^2}$$

$$\frac{\sum x_i' \cdot \Delta m_i}{m}$$ = a tkp.-nak a tkp.-tól mért x-koord.-ja ⟶ nulla

⟶ $\mathbf{\Theta_O = \Theta_C + m \cdot s^2}$ igaz

az impulzusmomentum megmaradása forgásnál :

kísérlet : forgózsámoly súlyzókkal ↔ piruettező korcsolyázó



$M = 0 \longrightarrow \Theta \cdot \omega = \text{áll.}$

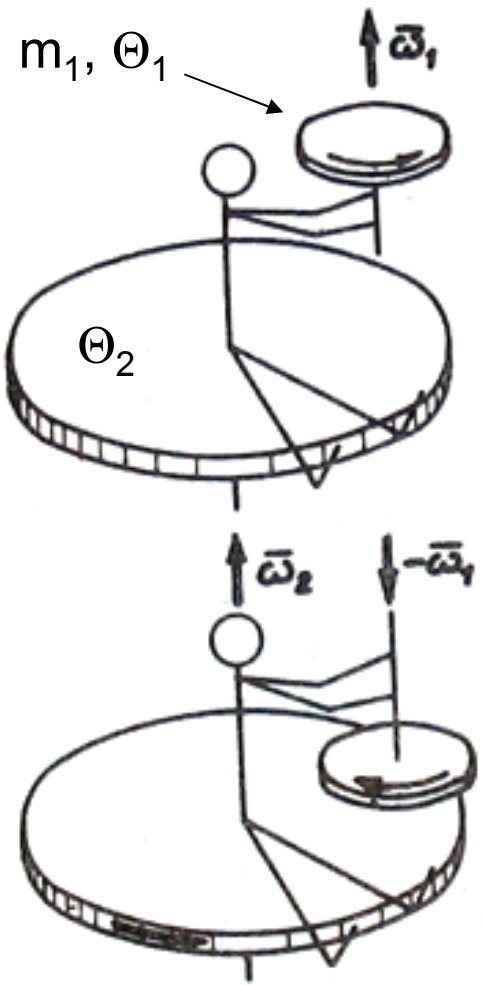
összehúzza a karjait ⟶ Θ csökken

ω növekszik !

$\omega_2 > \omega_1$

és fordítva

kísérlet : forgózsámolyon ülő ember forgó bicikli-kereket kap :



kezdetben nyugvó zsámoly + a keréknek felfelé mutató perdületvektora van

⟶ továbbra is nyugalomban marad

de ha a kerék tengelyét 180°-al elfordítja, a zsámoly fogásba jön

ha visszafordítja a kereket, megint megáll

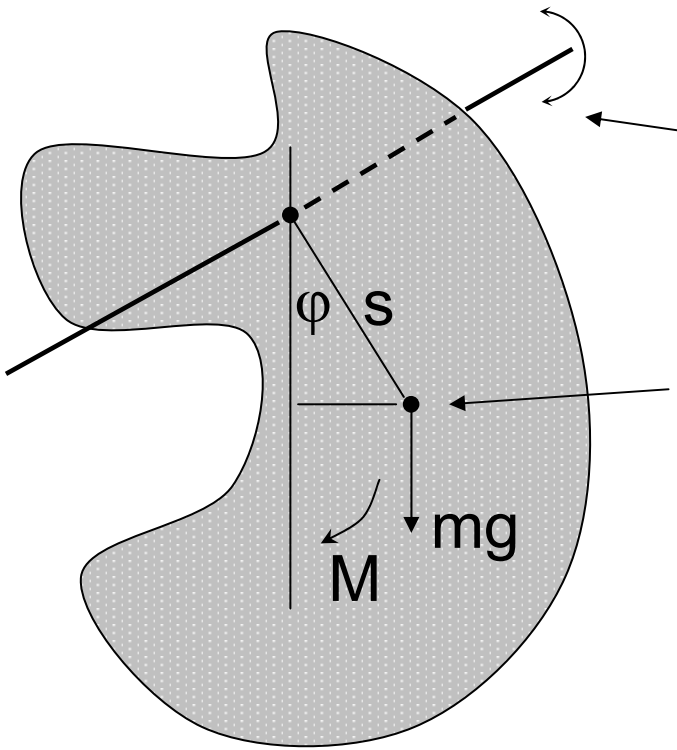
értelmezés :

perdületmegmaradás :

$$L_{kezd} = \Theta_1\omega_1 = L_{vég} =$$
$$= (\Theta_2+m_1s^2)\vec{\omega}_2 - \Theta_1(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2)$$

valamint : tornász a nyújtón, földön v. forgó-zsámolyon ülő ember forgásba tudja hozni magát

fizikai inga : korábban volt : $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{m \cdot g \cdot s}}$



erre a teng.-re a forgó mozgás alap-egyenlete :

$$M = \Theta \cdot \beta$$

$$M = -mg \cdot s \cdot \sin\varphi$$

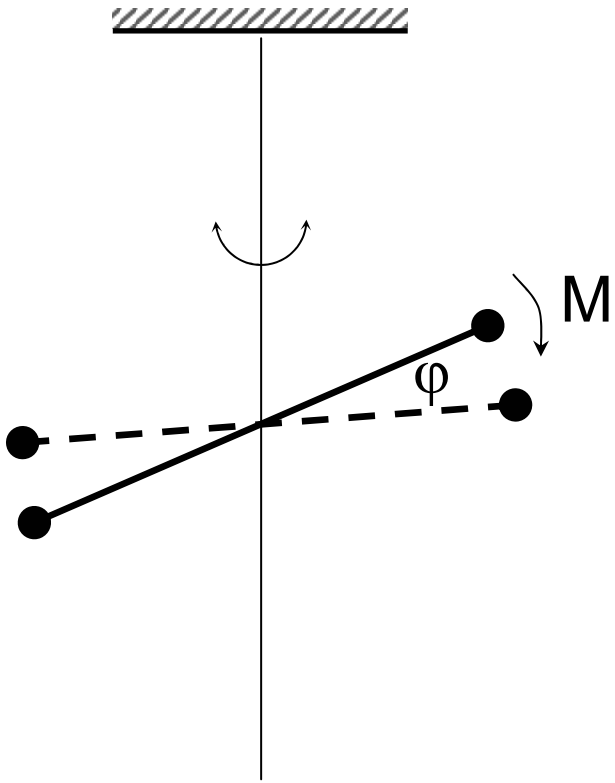
$$\Theta \cdot \beta = -mg \cdot s \cdot \sin\varphi \approx -mg \cdot s \cdot \varphi$$

$$\Theta \cdot \ddot{\varphi} = -mg \cdot s \cdot \varphi$$

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + \delta) \quad \text{ahol} \quad \omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot s}{\Theta}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{m \cdot g \cdot s}}$$

torziós inga :



$$M = -k \cdot \varphi$$

hasonlóan az előbbihez

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{k}}$$

részletesebben : ld. tankönyvekben…

merev testek síkmozgása :

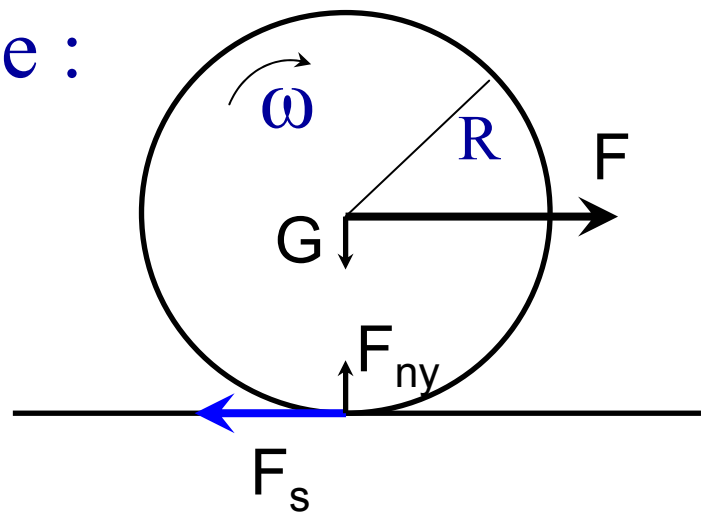
síkmozgás ⟶ 3 szab. fok ⟶ az elmozdulás 3 adattal megadható, pl. a szögelfordulással és a tkp.-nak ω-ra ⊥ 2 elmozduláskomponensével :

$$m \cdot a_{tkp,x} = F_x$$
$$m \cdot a_{tkp,y} = F_y$$
$$\Theta_C \cdot \beta_z = M_{C,z}$$

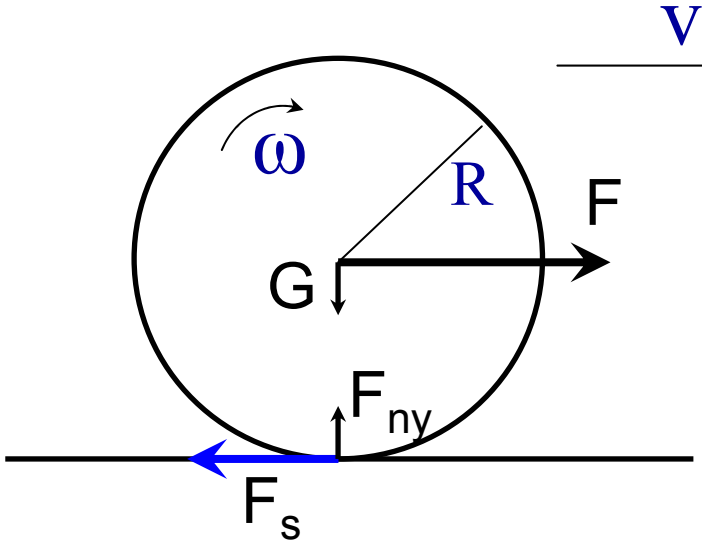
vagy pedig :

a pillanatnyi forgástengelyre nézve :

$$\Theta_O \cdot \beta_z = M_{O,z}$$



gördülés, gördülési ellenállás :



halad → N.II. :

$$\mathbf{F - F_s = m \cdot a}$$

forog → forgó mozg. alapegy. :

$$\mathbf{F_s \cdot R = \Theta \cdot \beta}$$

és :

$$\mathbf{a = R \cdot \beta}$$

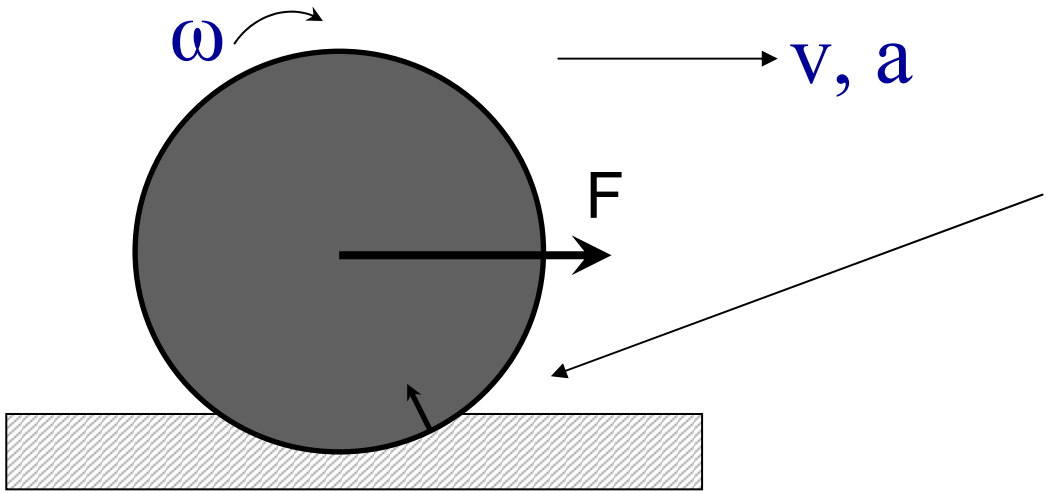
tapadás vagy csúszás

tiszta gördülés vagy csúszva gördülés

vagy pedig a pillanatnyi forgástengelyre nézve :

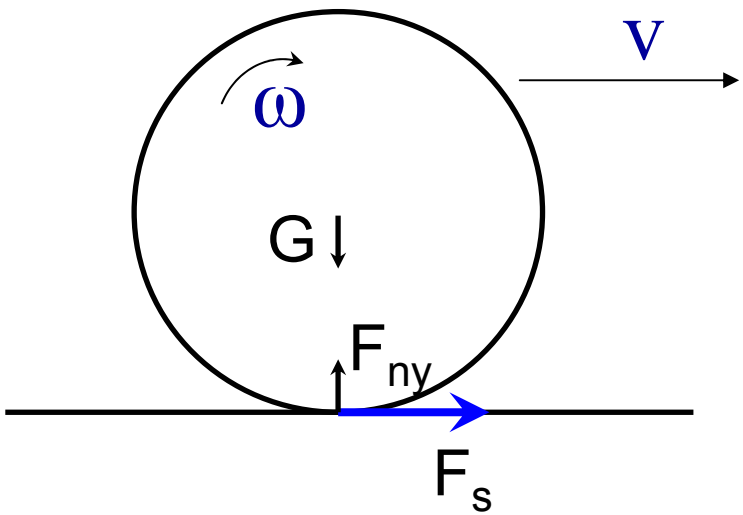
HF !

a gördülés a valóságban :



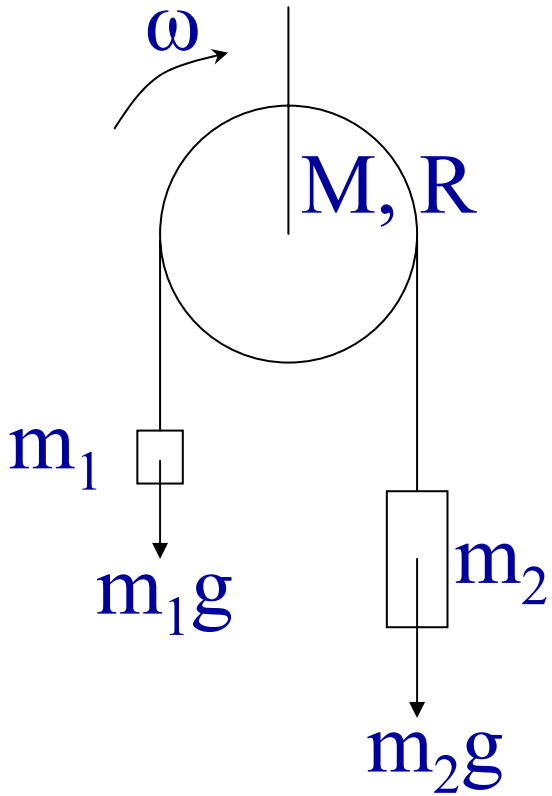
ott behorpad =
gördülési ellenállás

gépjárművek haladása :



a tapadási súrlódási
erő viszi előre a kocsit !

pl. :



a) perdülettétel-lel:

z-teng.-re vonatk. teljes perdület=

$L_z=m_1Rv_1+m_2Rv_2+\Theta\omega=$

$=(m_1R^2+m_2R^2+\Theta)\omega=$

$=(m_1+m_2+\Theta/R^2)\omega R^2$

a külső erők forgatónyomatékának z-komponense=

$=M_z=m_1gR-m_2gR=(m_1-m_2)gR$

→ a perülettétel szerint:

$(m_1-m_2)gR=(m_1+m_2+\Theta/R^2)\beta R^2$

és $a=R\beta$

$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

ideális csiga esetén ←

$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \Theta/R^2}$$

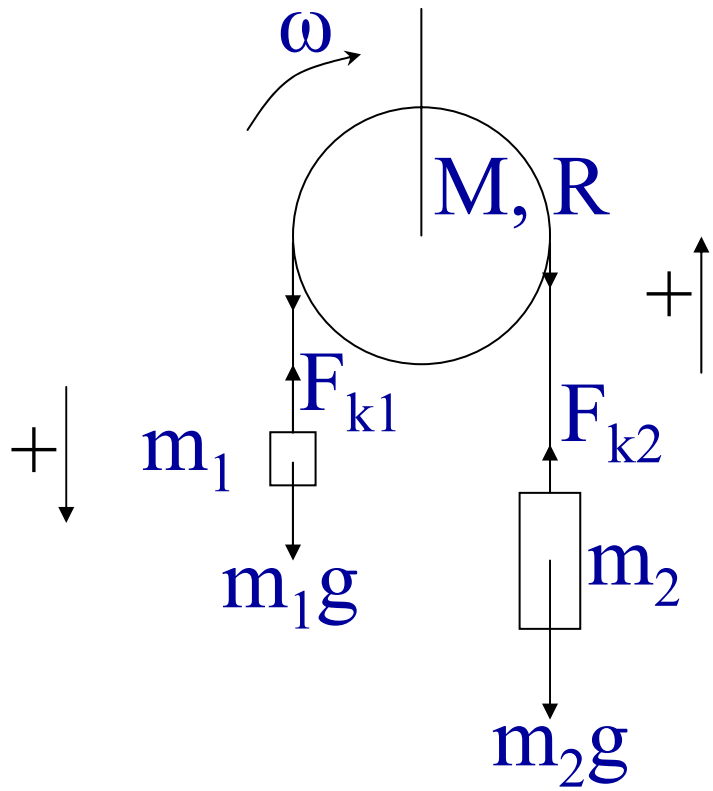
a) a dinamika alaptörvényével:

m_1 test: $m_1a=m_1g-F_{k1}$

m_2 test: $m_2a=-m_2g+F_{k2}$

M test: $\Theta\beta=F_{k2}R-F_{k1}R$

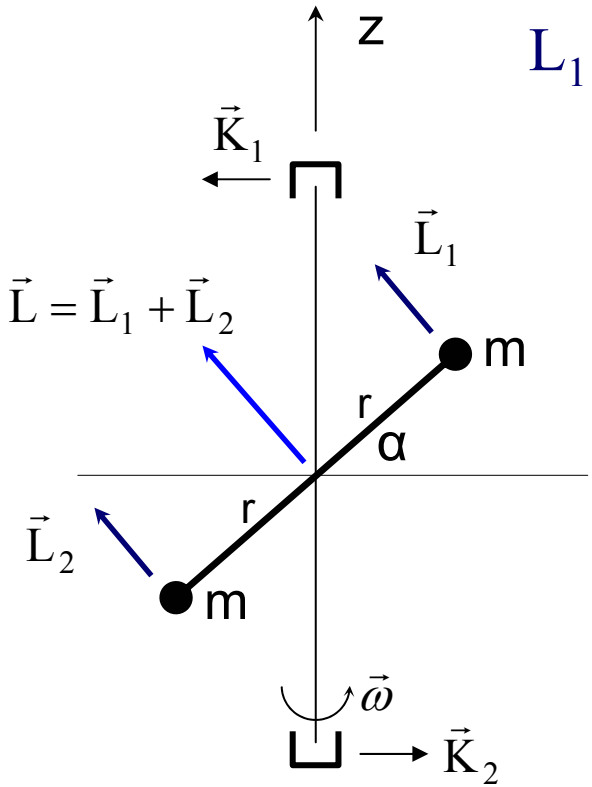
kényszerfeltétel: $a=R\beta$



ugyanaz a megoldás adódik

ha ideális csiga → $F_{k1}=F_{k2}$

csapágy-kényszererők, szabad tengely :



$$L_1 = L_2 = |\vec{r}_1 \times \vec{p}_1| = |\vec{r}_2 \times \vec{p}_2| = m \cdot r \cdot v = mr^2 \cos\alpha \cdot \omega$$

$$L = L_1 + L_2$$

az $\vec{L}$ egy α szögű kúp mentén körbejár

perdülettétel szerint ehhez állandó forgatónyomaték kell :
a z-teng. és a szúlyzó által megszabott síkra $\perp$ irányú

ilyen forgatónyomatékot (erőpárt) a csapágyak által kifejtett kényszererők tudnak kifejteni

ha a súlyzó $\perp$ vagy $\parallel$ a teng.-el, akkor a kényszererők eltűnnek → **szabad tengelyek** átmennek a test tkp.-ján

forgásszimmetrikus homogén test szimm.-teng.-i egyúttal szabad tengelyek is
a szimm.teng. körül megpörgetett és eldobott test repülés közben is megőrzi a tengelyirányát
pl. : diszkosz, megpörgetett pénzdarab

kísérlet: fonálon megpörgetett testek, lánc

pörgettyű :

egyetlen pt.-ja van rögzítve, e körül szabadon elfordulhat ∀ irányban (a teng. függőleges)

erőmentes pörgettyű :

a testre ható külső erők forgatónyomatéka a forgáspt.-ra nézve 0
pl. : ha a testet a sulypt.-jában támasztjuk alá, vagy ilyen a szabadon eső és forgó test is

ha egy erőmentes pörg.-t úgy indítunk el, h. ω ‖ vmelyik szabad teng.-el ⟶ ω is és a forg.teng. is állandó lesz

stabil a forgás a legnagyobb és legkisebb tehetetlenségi nyomatékú tengely körül;
labilis a forgás a középső tehetetlenségi nyomatékú tengely körül

ha nem ⟶ forgatónyomaték kellene az állandó teng.-hez ⟶ **a forg.teng. nem lesz állandó**

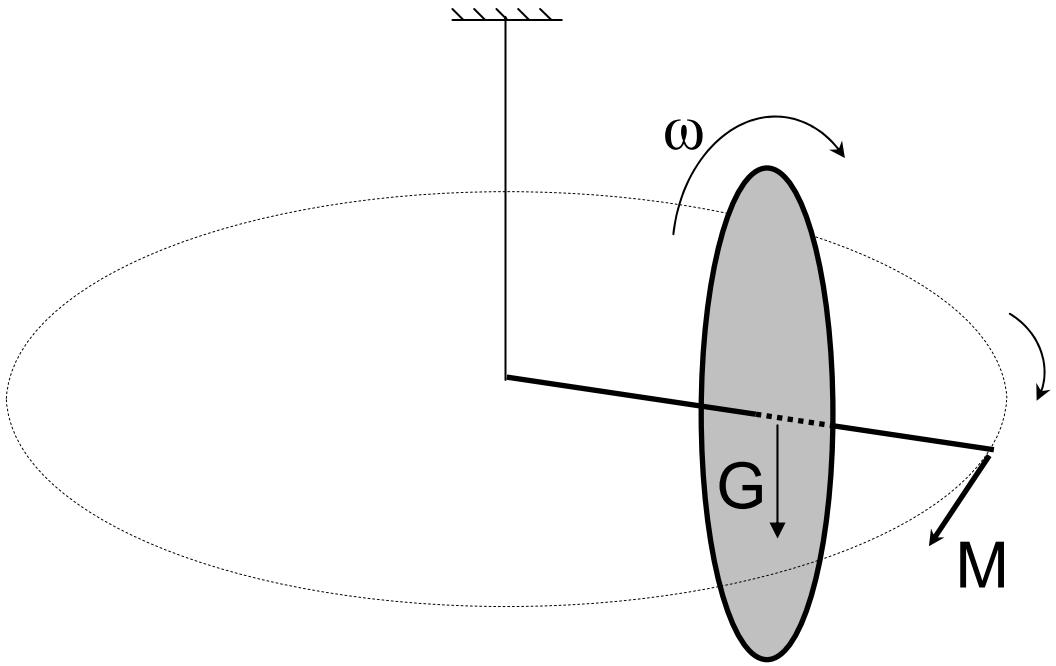
pörög a szimmetriatengelye körül (szabad tengely) és a tengely is „körbejár” → **nutáció**

pörgettyű mozgása forgatónyomaték hatása alatt :

ha a pörgettyű nem a súlypontjában van alátámasztva :

a súlyerőnek forgatónyomatéka van

kísérlet : megpörgetett biciklikerék madzagon

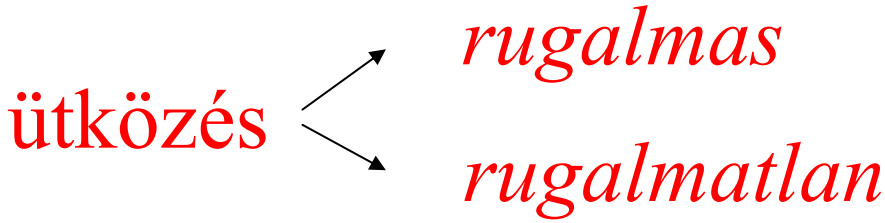


a tengely „körbejár”
a vsz. síkban
↓
precesszió

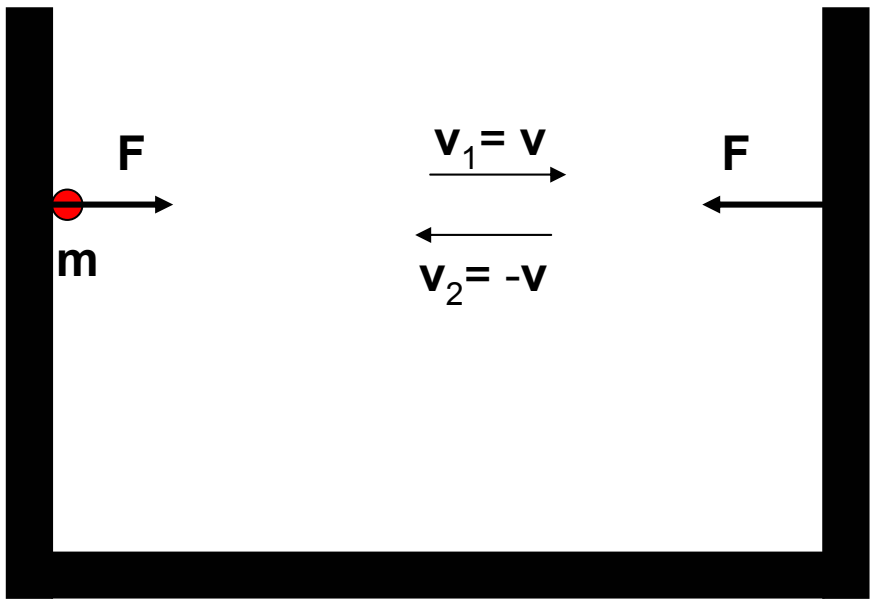
pörgettyű alkalmazása: pl. pörgettyűs iránytű

a perdület megmaradása ütközésekben :

ld. a gyakorlaton…

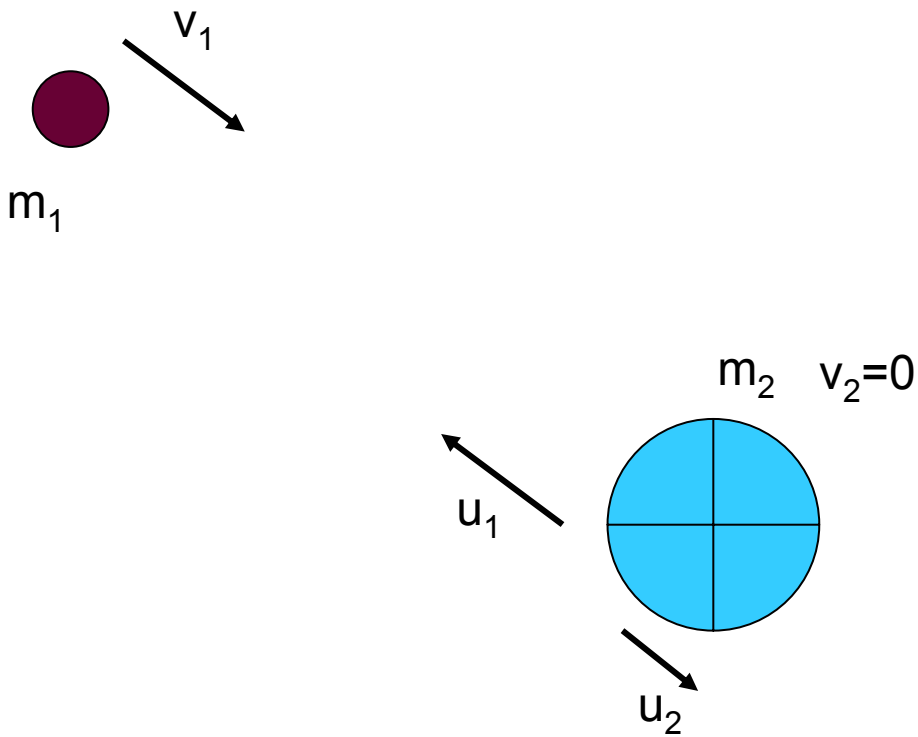


Golyó dobozban

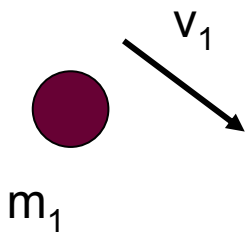


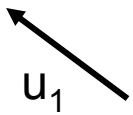
Visszalépés: ← Kilépés: Esc.

Rugalmas egyenes ütközés 1.

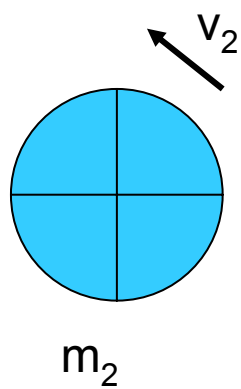


Rugalmas egyenes ütközés 2.



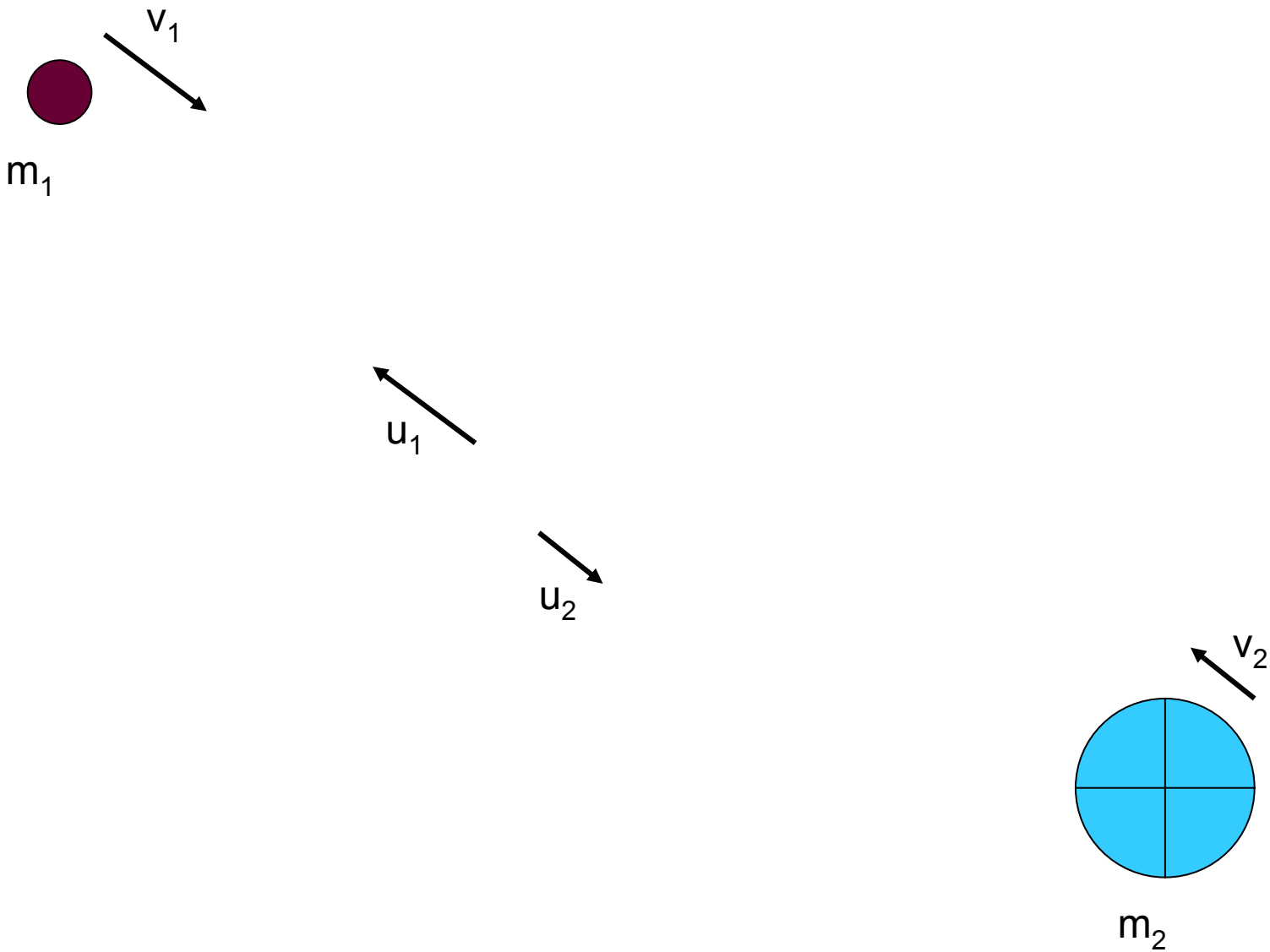


$u_2=0$



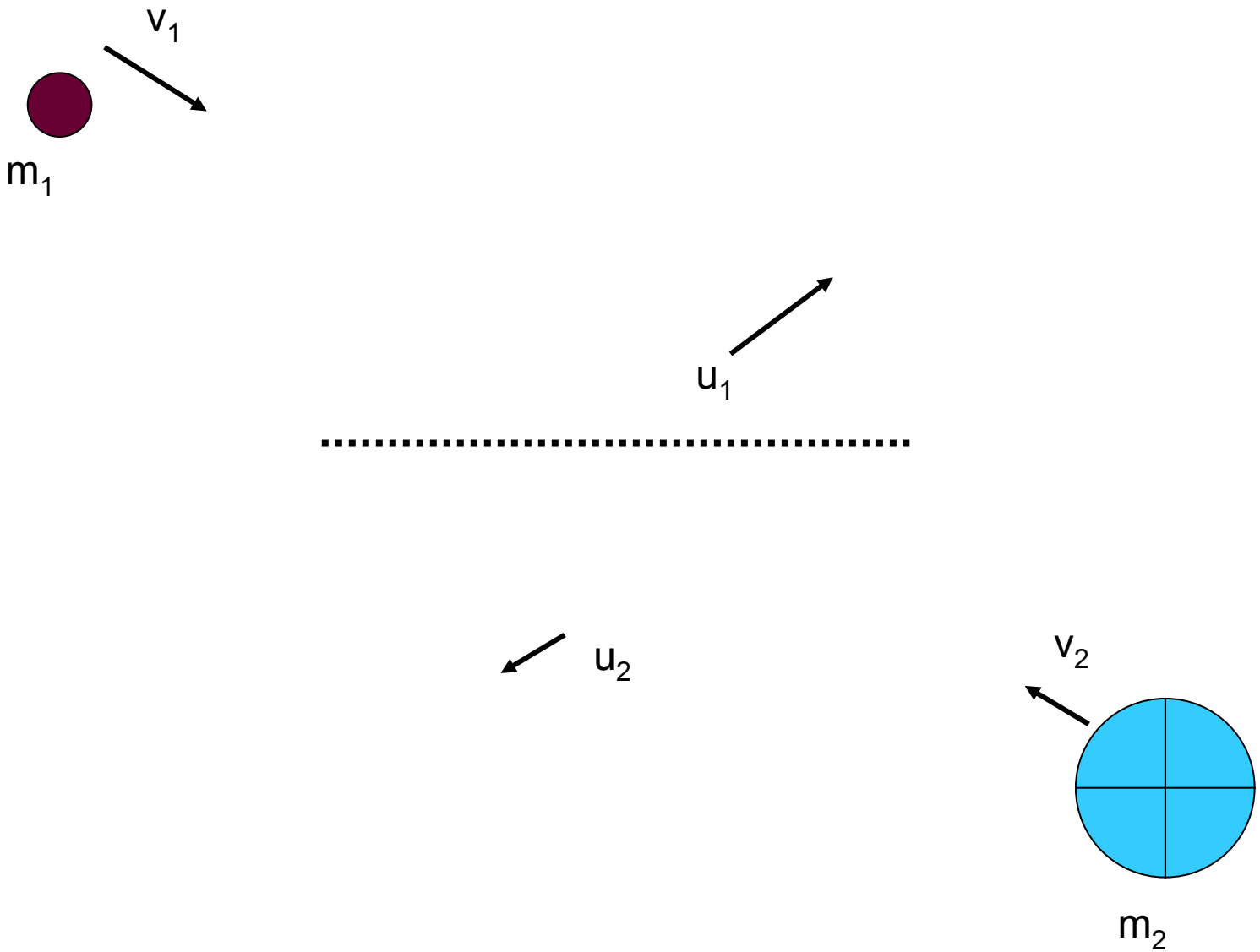
Visszalépés: ← **Kilépés: Esc.**

Rugalmas egyenes ütközés 3.



Visszalépés: ← **Kilépés: Esc.**

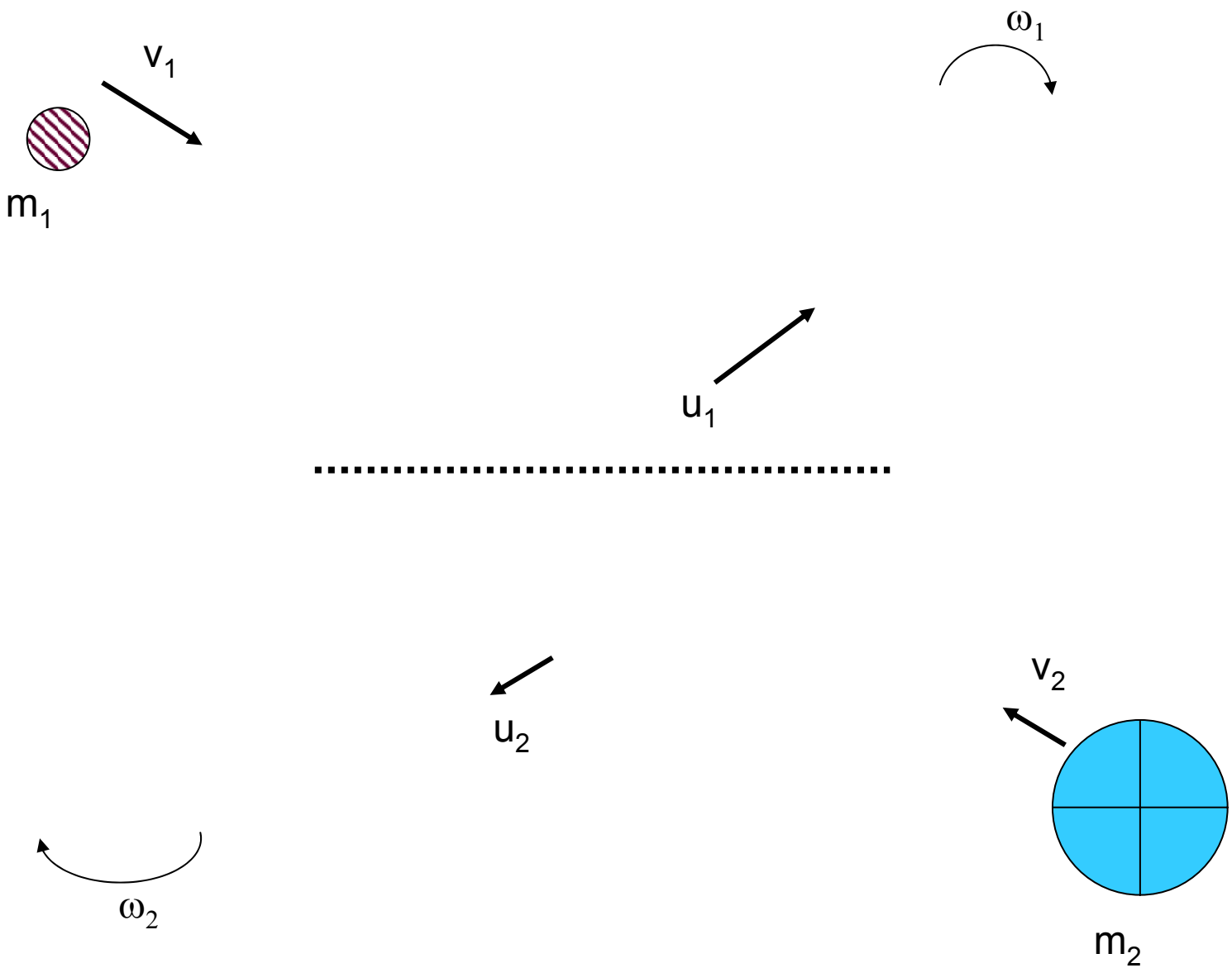
Rugalmas ferde ütközés 1.



Visszalépés: ←

Kilépés: Esc.

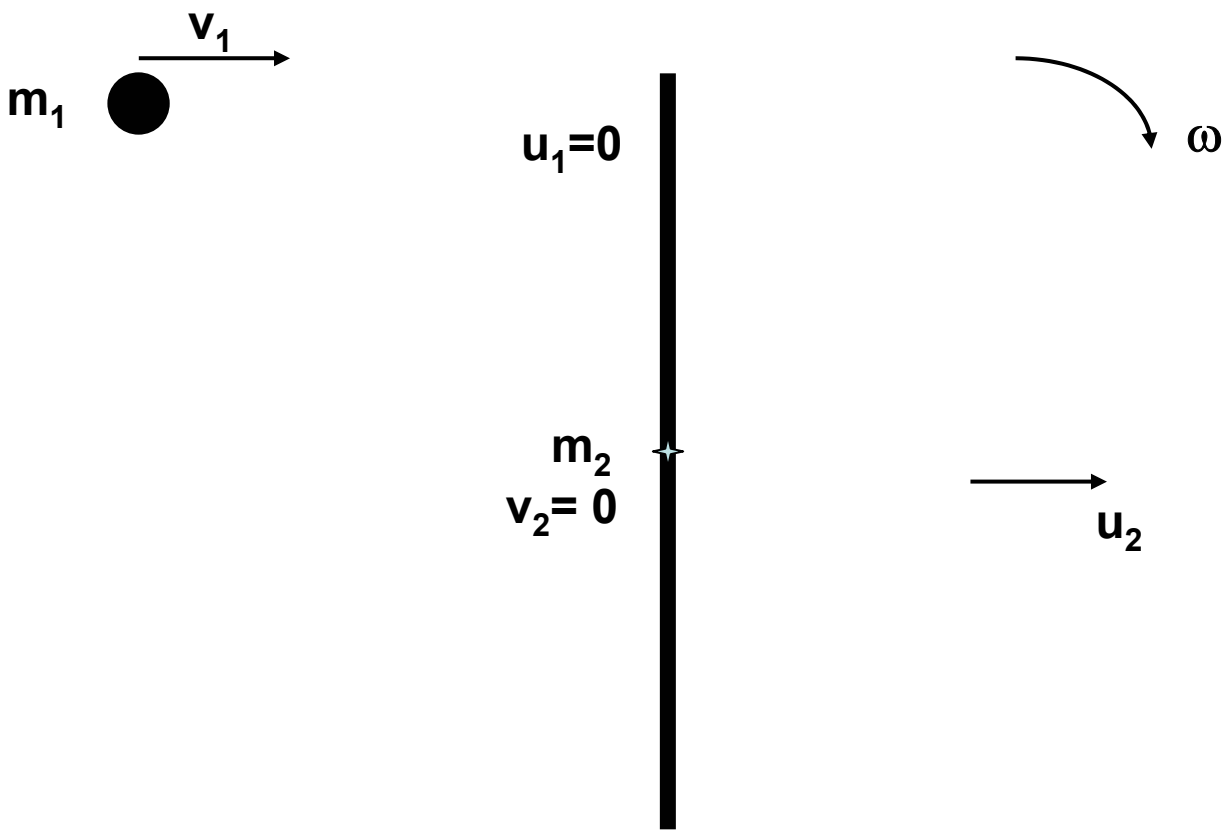
Rugalmas ferde ütközés 2.



Visszalépés: ←

Kilépés: Esc.

Golyó rugalmas ütközése rúddal



Visszalépés: ← Kilépés: Esc.

munkatétel merev testekre :

$E_{mozg} = \sum E_{i,mozg} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 =$ a tp.-k mozg. energiáinak összege

$W_{össz} = \sum W_i = \sum \vec{F}_i \Delta \vec{r}_i =$ a tp.rdsz.-en végzett munkák összege

a munkatétel szerint $W_{össz} = E_{vég} - E_{kezd}$

csakhogy a belső erőkről ált.-ban nem tudunk semmit

de merev testeknél egyszerűsítő feltevéssel élhetünk :

ha a tp.-k között centrális erők hatnak → a belső erők összes munkája nulla, mert

- a tp.-k egymáshoz képest nem mozdulhatnak el;
- vagy ha az elmozdulhatnak, akkor az elmozd.-k ellentétes irányúak és egyforma nagyságúak, így az egyik által a másikon és a másik által az egyiken végzett munka egyenlő nagyságú, ellentétel előjelű
- vagy ha forognak, akkor mindkét munka nulla

tapasztalat szerint

a belső erők figyelmen kívül hagyhatók

a külső erőkre: $\forall$ erőt a támadáspt.-jának elmozd.-val számolunk

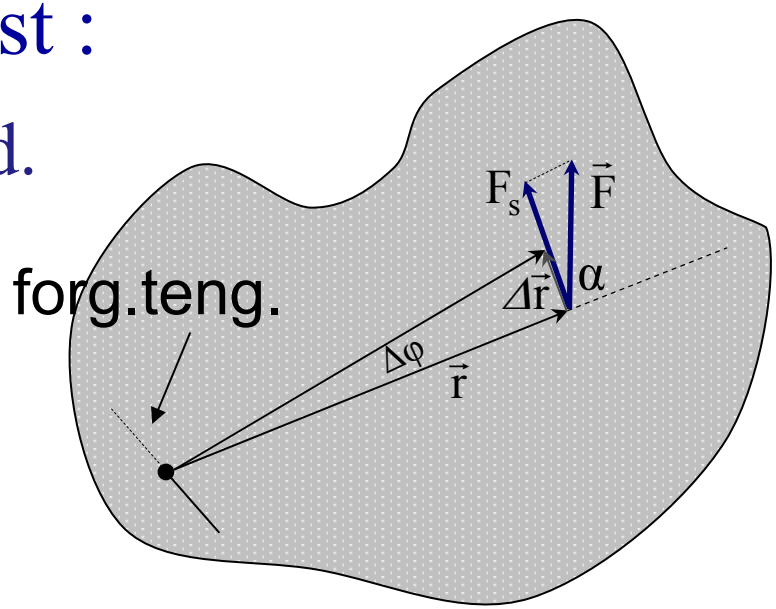
de sok erő esetén ez bonyolult

↓

nézzük a rögz.teng. körül forgó merev testet :

rögz. teng. körül forgó merev test :

kis $\Delta\varphi$ forgásszöghöz tartozó elmozd. $\Delta r = \Delta\varphi \cdot r_\perp$; az erő elmozd.-irányú komponense = $F_s = F \cdot \sin\alpha$, ⟶ a végzett munka = $\mathbf{W} = (\pm) F_s \cdot \Delta r =$
$(\pm) F \cdot \sin\alpha \cdot \Delta\varphi \cdot r_\perp = (\pm) \underbrace{F \cdot r_\perp \cdot \sin\alpha}_{M} \cdot \Delta\varphi = *$



$* = \mathbf{(\pm) M \cdot \Delta\varphi}$ ($\vec{r}$ a forg.t. $\forall$ pt.-jából húzott vektor, $r_\perp$ pedig a teng.-től $\perp$ húzott

↑

+, ha $\vec{M}$ értelme megegyezik a szögelford.-val

de ez kifejezhető így is : $W = \vec{M} \cdot \Delta\vec{\varphi}$

vagy : $W = M_\varphi \cdot \Delta\varphi$, ahol M_φ az $\vec{M}$ -nak a szögseb.-irányú komponense

vagy vektorosan : $W = \Delta\vec{r} \cdot \vec{F} = (\Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{F} = \Delta\vec{\varphi} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \Delta\vec{\varphi} \cdot \vec{M}$

ha több erő hat a testre :

$$W = \sum W_i = \sum \left(\vec{M}_i \cdot \Delta\vec{\varphi} \right) = \sum \left(\vec{M}_i \right) \cdot \Delta\vec{\varphi} = \vec{M} \cdot \Delta\vec{\varphi}$$

ált.-an, ha nem csak egy rögz. teng. körül fordulhat :

⟶ hanem halad és forog :

az $\vec{F}_i$ erő támadáspt.-jának elmozd.-t a korábbiaknak megf.-en felbontjuk a tkp. elmozd.-ra és az e körüli forgásra :

$$\Delta\vec{r}_i = \Delta\vec{r}_c + \Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i'$$

a külső erők által végzett munka ekkor

$$W = \sum \Delta\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = \sum \Delta\vec{r}_c \cdot \vec{F}_i + \sum \left(\Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i' \right) \cdot \vec{F}_i =$$

$$= \Delta\vec{r}_c \cdot \sum \vec{F}_i + \sum \Delta\vec{\varphi} \left(\vec{r}_i' \times \vec{F}_i \right) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_c + \vec{M}_c \cdot \Delta\vec{\varphi}$$

= **a tkp elmozdítására fordított munka + a tkp körüli elfordításhoz szükséges munka**

síkmozgás esetén : $W = F_s \cdot \Delta s_{tkp} + M_{tkp,\varphi} \cdot \Delta\varphi$

a forgó mozgás kinetikus energiája :

rögz.teng. körüli forgásra :

egy $\forall$ pt.-jának sebessége = $v_i = r_{i\perp} \cdot \omega$

($r_{i\perp}$: a forg.teng.-től $\perp$ húzott helyvektor)

$$E_{mozg,i} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_{i\perp}^2 \omega^2$$

$$E_{mozg,teljes} = \sum E_{mozg,i} = \frac{1}{2} \sum \left(\Delta m_i r_{i\perp}^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum \Delta m_i r_{i\perp}^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$$

$$\mathbf{E_{forg} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{E_m = \frac{1}{2} m \cdot v^2}$$

pl. : gördülés = haladás + rögz. teng. körüli forgás :

$$\mathbf{E_m = \frac{1}{2} m \cdot v_{tkp}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{tkp} \cdot \omega^2}$$

a munkatétel így $\Delta E_{mozg} = \frac{1}{2}\Theta\omega_2^2 - \frac{1}{2}\Theta\omega_1^2 = W = M_\varphi \cdot \Delta\varphi$

alakba írható

általános elfordulásra :

a tömegpont elmozd.-t felbontjuk a tkp. elmozd.-ra és az e körüli forgásra : $\Delta\vec{r}_i = \Delta\vec{r}_c + \Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i' \longrightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp}'$

a tp. mozg. E-ja =

$$E_{mozg,i} = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i v_c^2 + \frac{1}{2}\Delta m_i r_{i\perp}'^2 \omega^2 + \vec{v}_c\left(\vec{\omega} \times \Delta m_i \vec{r}_{i\perp}'\right)$$

$$E_{mozg,teljes} = \sum E_{mozg,i} =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum \Delta m_i\right)}_{m} v_c^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum \Delta m_i r_{i\perp}'^2\right)}_{\Theta}\omega^2 + \vec{v}_c\left(\vec{\omega} \times \underbrace{\sum \Delta m_i \vec{r}_i'}_{0}\right)$$

$\sum \Delta m_i \vec{r}_i' = m\vec{r}_c'$ a tkp.-ból a tkp.-ba mutató helyvektor = 0

$$E_{mozg,teljes} = \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m_i\right) v_c^{\,2} + \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m_i r_{i\perp}'^{2}\right)\omega^2 = \frac{1}{2} m v_c^{\,2} + \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

$$\mathbf{E_m = \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot v_{tkp}^{\,2}}_{\text{haladó mozg.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\Theta_{tkp} \cdot \omega^2}_{\text{forgó mozg.}}}$$

a munkatétel erre :

$$\Delta E_{mozg} = \frac{1}{2} m v_{c2}^{\,2} - \frac{1}{2} m v_{c1}^{\,2} = W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_c \qquad \left(= \left(\sum \vec{F}_i\right) \cdot \Delta \vec{r}_c\right)$$

a munkatétel az egészre :

a testre ható összes erő összes munkája megadja a test teljes kin. E-jának megvált.-t

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} m v_{c2}^{\,2} - \frac{1}{2} m v_{c1}^{\,2} + \frac{1}{2}\Theta\omega_2^{\,2} - \frac{1}{2}\Theta\omega_1^{\,2} = W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_c + \vec{M}_c \Delta\vec{\varphi}$$

$$\Delta E_{mozg} = \frac{1}{2} m v_{c2}^2 - \frac{1}{2} m v_{c1}^2 = W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_c \qquad \text{és}$$

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} m v_{c2}^2 - \frac{1}{2} m v_{c1}^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega_2^2 - \frac{1}{2} \Theta \omega_1^2 = W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_c + \vec{M}_c \Delta \vec{\varphi}$$

$$\Delta E_{forg} = \frac{1}{2} \Theta \omega_2^2 - \frac{1}{2} \Theta \omega_1^2 = \vec{M}_c \Delta \vec{\varphi} \qquad \left[\vec{M}_c = \sum \vec{M}_{c,i} \right]$$

vagyis a tkp.-ra vonatk. forgatónyomatékok munkája a tkp. körüli forgás kin. E-jának megvált.-t adja

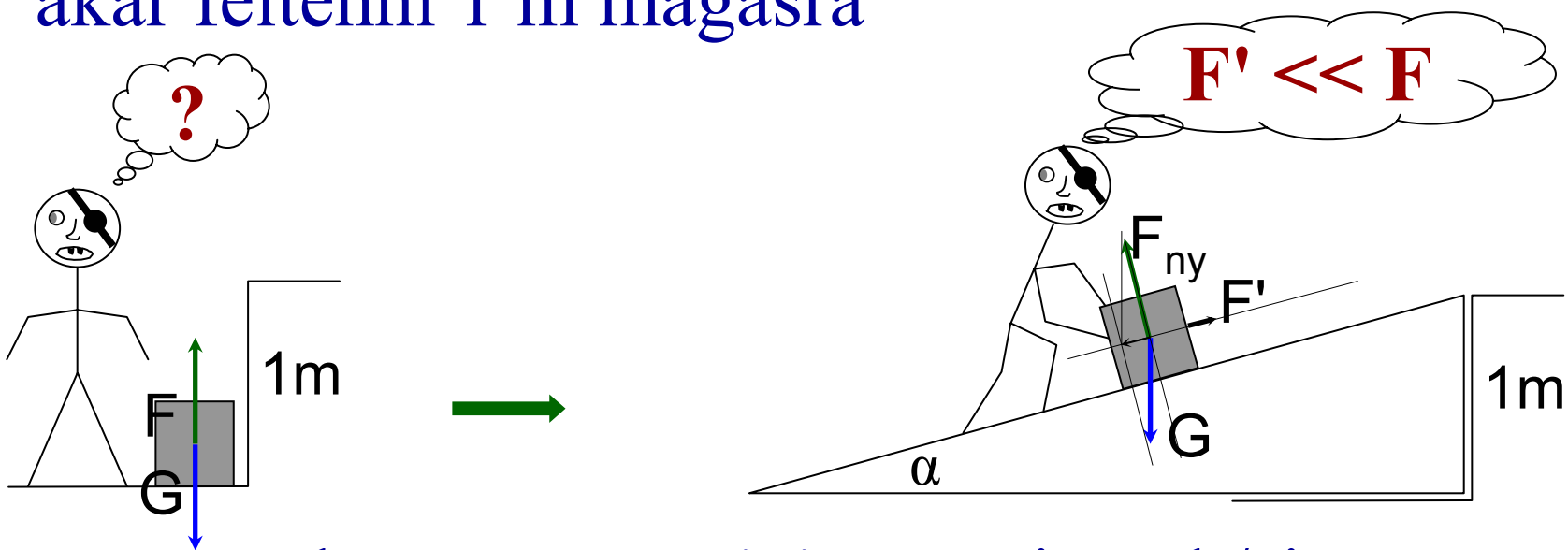
egyszerű gépek : korábban már volt !

kisebb erővel (erőlködéssel) tudjuk ugyanazt a munkát elvégezni

pl. : lejtő, emelő, ék, hengerkerék, csigák, stb …

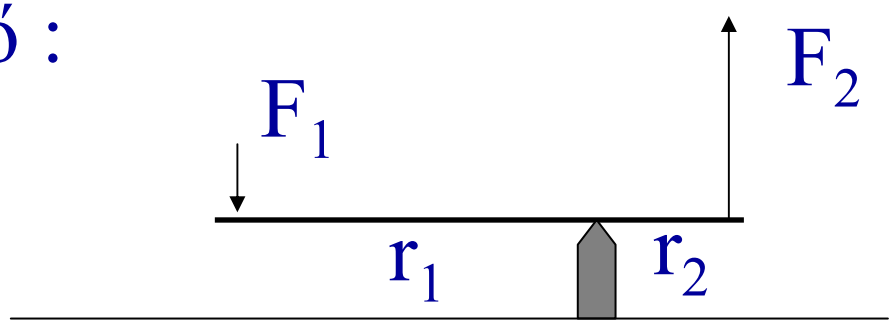
állócsiga, mozgócsiga, csigasor

pl. : egy 100 kg tömegű nagy ládát 1 ember egyedül akar feltenni 1 m magasra



$W = F \cdot s = mgh$ $W = F' \cdot s' = mg\sin\alpha \cdot h/\sin\alpha = mgh$

emelő :

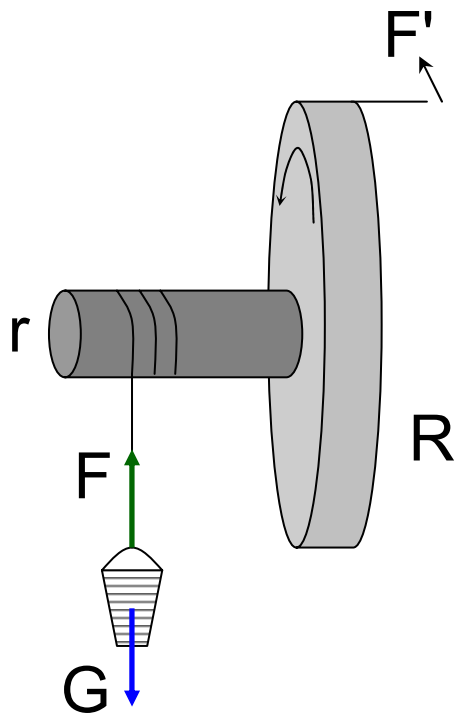


$$M_1 = M_2$$

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

$$\rightarrow \mathbf{F_1 << F_2}$$

hengerkerék : (pl. kerekeskút)



ék : pl. : balta :

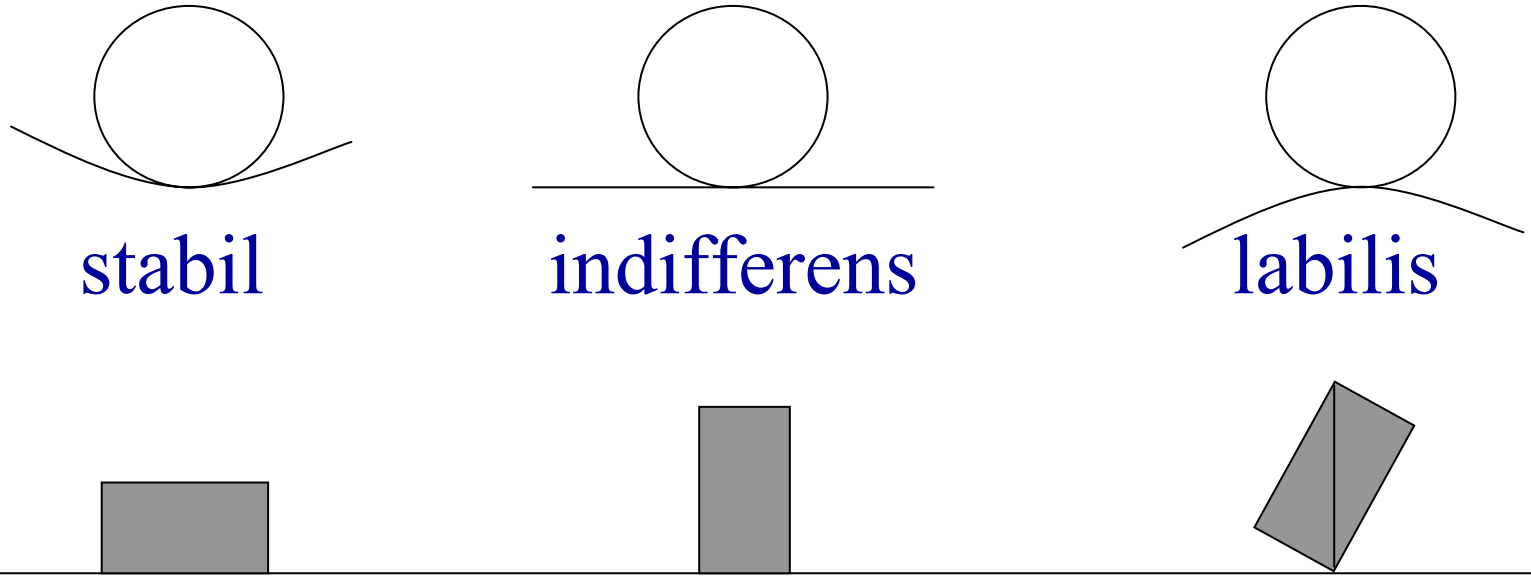
miért könnyebb nagy fatuskót „fejjel lefele” széthasítani ?

csavar :

= speciális lejtő

$$F \cdot r = F' \cdot R \longrightarrow \mathbf{F' << F}$$

egyensúlyi helyzetek :

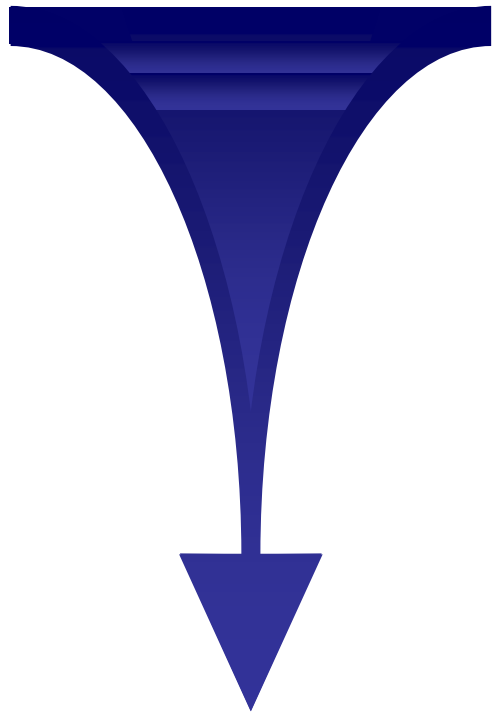


hogy lehet eldönteni, h. milyen egyensúlyi helyzet ? :
igen kicsit kimozdítjuk, és megnézzük, h. visszatér-e

→ **virtuális munka elve**

energiaminimumra törekszik

pl. : merre könnyebb feldönteni egy támlás széket ?
miért?



DEFORMÁLHATÓ TESTEK

merev test = ideális eset ≈ szilárd testek (kristályos /egykrist. v. polikrist., amorf)
folyadék: nincs határozott alakja, de V = áll. (amorf szerk. hasonló a foly.-hoz)
gáz: sem alak, sem V ≠ áll.

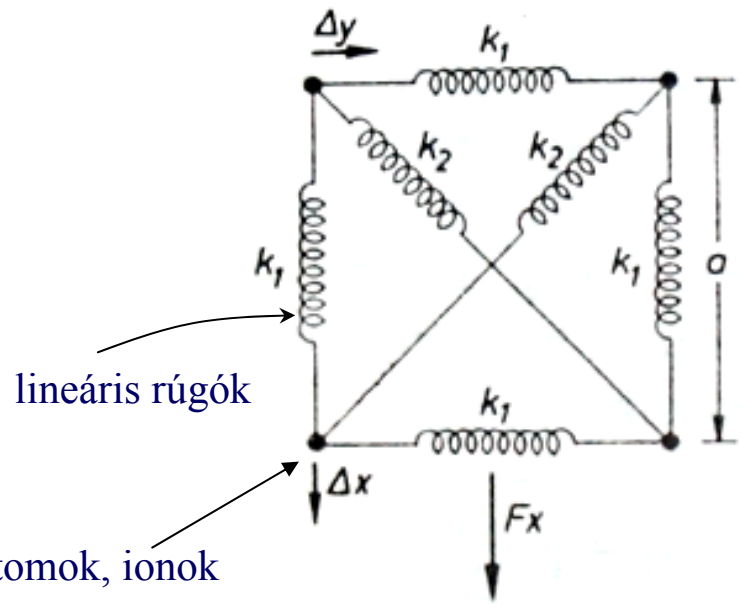
SZILÁRD TESTEK RUGALMAS ALAKVÁLTOZÁSAI

rugalmas: erőhatás → alakváltozás; erőhatás megszűnik → alakvált. megszűnik

ideális rugalmasságot közelítik a szilárd testek kis alakvált. esetén (rugalmasság határa alatt)
pl.: rúgó, csavarrúgó, drót megnyújtása, rúd le/behajlása, gumilabda összenyomása, ….

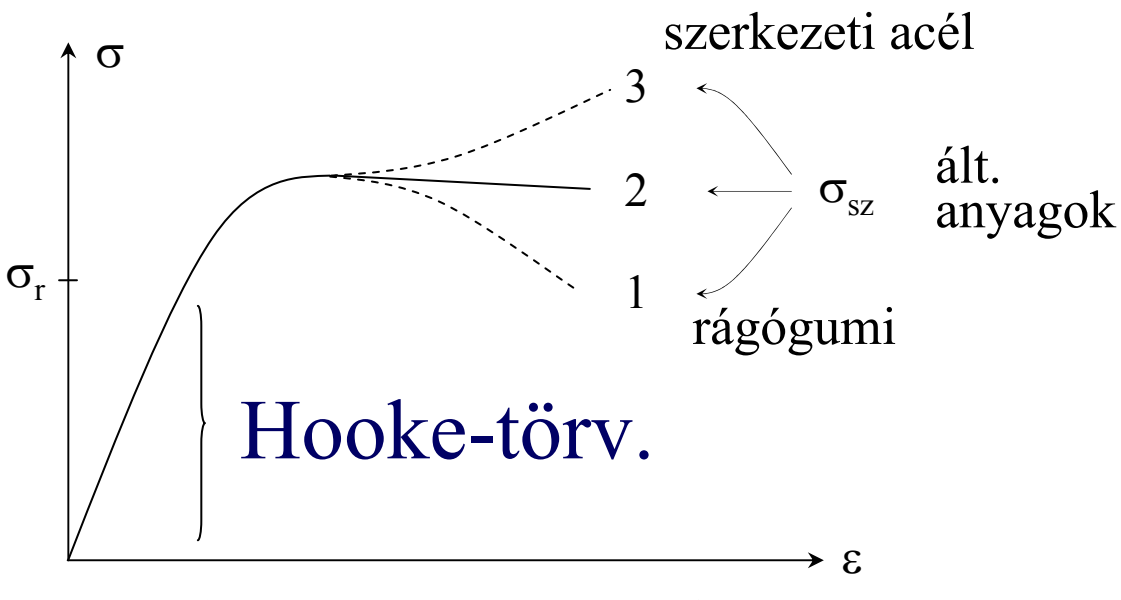
kísérlet : kül. hosszúságú drótokat, rúgókat kül. nagyságú erőkkel nyújtva (rúdnál összenyomva is) a drótok hossza nő

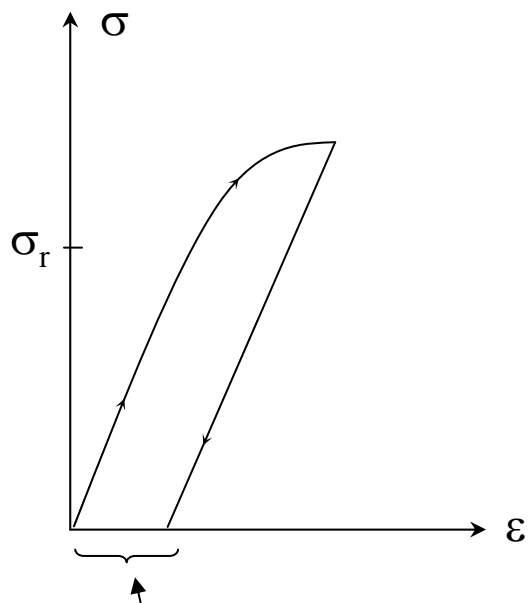
de $\Delta\ell_1/\ell_1 = \Delta\ell_2/\ell_2 = \ldots$ bármilyen hossz esetén



ideális rugalmasság ⟶ **1676: HOOKE – törvény :**

nyúlásra és összenyomásra : $\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A}$

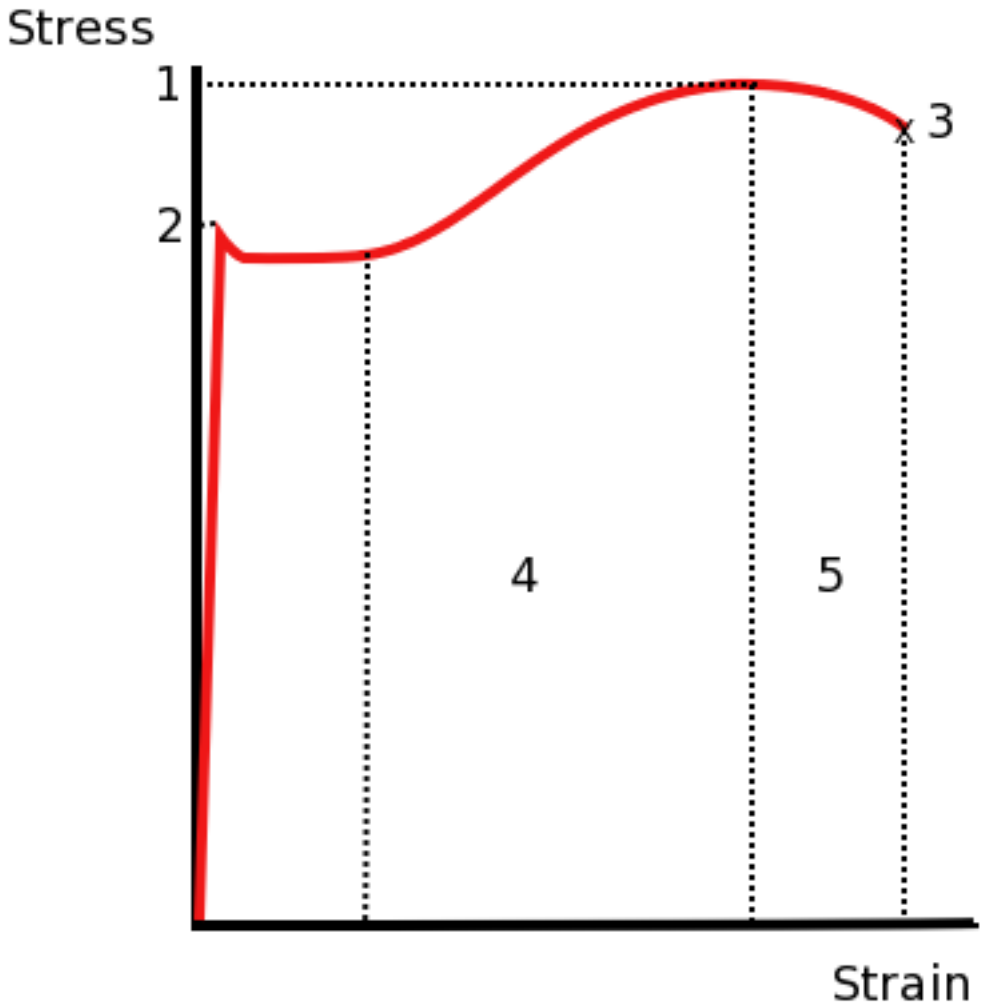




rugalmas alakvált.

a rugalmasságon „túl” képlékenység ⟶ maradó alakváltozás

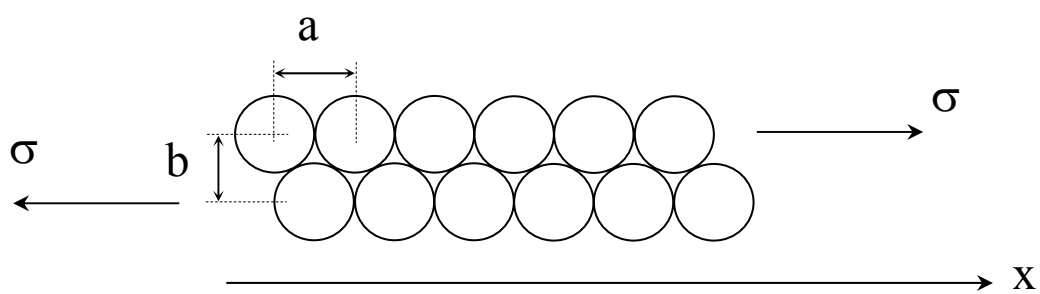
pl.: alacsony karbon tartalmú acélra:



pl. képlékeny alakvált.-ra :
kilágyított (= átkristályosított) anyagok meglepően képlékenyek

kísérlet : kilágyított Cu-drót saját súlyától lehajlik (egyébként nem)
fúrógéppel sokszor megtekerve felkeményedik, kilágyítás, …ismételgethető

„meglepő” = több nagyságrenddel kisebb fesz. kell a képl. alakvált.-hoz, mint az alábbi egyszerű modell jósolja :



vonalhibák (diszlokációk) szerepe → ld. 270.old.

visszatérve a rugalmas alakvált.-ra :

izotróp anyagokra:
(pl. polikrist. fémek)

(egykrist. irányfüggő lehet)

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{E}\cdot\frac{F}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} \qquad \sigma = \frac{F}{A}$$

$$\sigma = E\cdot\varepsilon$$

← differenciális Hooke-törv.

Young-modulus; fémekre : E ≈ 10^5 N/mm^2 = 10^{11} N/m^2 = 100 GPa
(vagy nyújtási rug. mod.)

rel. megnyúlás (= alakváltozás)

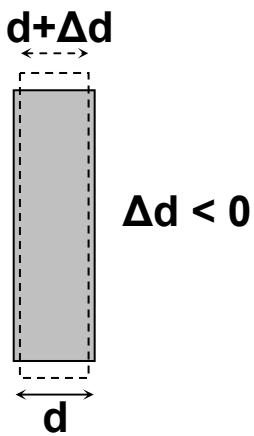
feszültség

longitudinális fesz., a terhelőerőre ⊥ keresztmetszetre vonatk.

harántösszehúzódás is van:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu\frac{\Delta\ell}{\ell}$$

Poisson-szám, fémekre ≈ 0.2-0.3



térfogatvált. is van :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(\ell+\Delta\ell)\cdot(A+\Delta A)-\ell\cdot A}{\ell\cdot A} = \frac{\ell\cdot A+\ell\cdot\Delta A+\Delta\ell\cdot A+\Delta\ell\cdot\Delta A-\ell\cdot A}{\ell\cdot A} =$$

$$= \frac{\ell\cdot\Delta A+\Delta\ell\cdot A+\Delta\ell\cdot\Delta A}{\ell\cdot A} = \frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta\ell}{\ell}+\frac{\Delta A}{A}\cdot\frac{\Delta\ell}{\ell} \approx \frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta\ell}{\ell} = (1-2\mu)\frac{\Delta\ell}{\ell}$$

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

pl. téglalap keresztmetszet (a·b) esetén :

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{(a+\Delta a)\cdot(b+\Delta b) - a\cdot b}{a\cdot b} = \frac{a\cdot b + a\cdot \Delta b + \Delta a\cdot b + \Delta a\cdot \Delta b - a\cdot b}{a\cdot b} \approx$$

$$\approx \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = -2\mu\frac{\Delta \ell}{\ell}$$

$$\frac{\Delta V}{V} \approx (1-2\mu)\frac{\Delta \ell}{\ell}$$

mivel a tapasztalat szerint húzásnál V nem csökken → μ ≤ 0,5

összenyomásnál σ < 0 → σ = -p

nyomás: $p = \frac{F}{A}$ **[σ] = [p] = Pa =** $\frac{N}{m^2}$

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa p$$

kompresszibilitás : $\kappa = 3\cdot\frac{1-2\mu}{E}$

a feszültség fogalmának általánosítása :

$\sigma = \frac{F}{A}$ a teng.-re $\perp$ elválasztó felület 2 oldalán elhelyezkedő rúd-darab által felület-egységenként egymásra gyakorolt erő nagysága

de elképzelhető ferde elválasztó felület is :

most is egyensúly → a két rúd-rész egyforma F nagyságú erővel kell, h. húzza egymást, csak F ⊥ felületre

a felületegységre ható F kisebb mint $\perp$ felület esetén

az $\vec{r}$ helyen levő, $\vec{n}$ normálisú kis felületdarabkára a másik által felületegységenként gyakorolt erő

$\vec{\sigma}(\vec{r},\vec{n}) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$ függ a felület irányításától is

↑

ez a feszültség általánosabb def.-ja (vektor !)

speciális helyzetű felületelemektől eltekintve $\vec{\sigma}$ -nak van érintő irányú komponense is

↓

csúsztató- vagy nyíró fesz.

feszültségi tenzor…. ← a normális komponens pedig a húzó (nyomó) fesz.

a húzott anyaghoz potenciális energia is rendelhető :

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta\ell^2$$

Hooke-törv.:

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A} \rightarrow F = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \Delta\ell$$

$$k = \frac{E \cdot A}{\ell}$$

rúgóállandó **megnyúlás**

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \Delta\ell^2$$

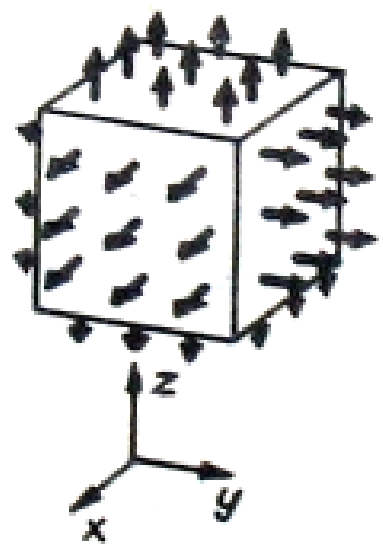
a tf.-egységre eső pot. E = potenciális energiasűrűség =

$$u = \frac{E_{pot}}{V} = \frac{1}{2} \frac{E \cdot A}{\ell^2 \cdot A} \cdot \Delta\ell^2 = \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta\ell}{\ell} \right)^2 = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

többoldalú húzás és összenyomás; térfogati rugalmasság :

nem csak 1 irányban húzzuk (nyomjuk), hanem pl. ∀ oldalról egyszerre

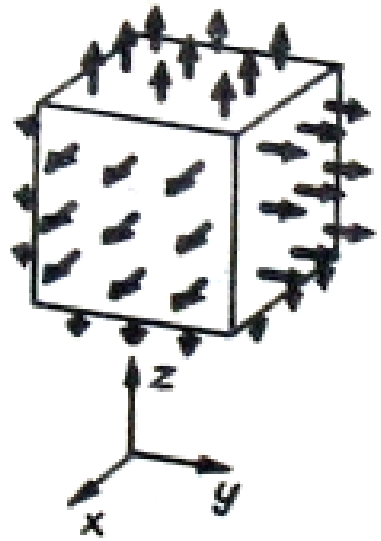
egyszerűség kedvéért vegyünk kockát →



pl. az x-irányú él nyúlik az x-irányú húzás miatt, de az y- és z-irányú nyújtás miatt is:

x-irányú él hosszvált.-a az x-normálisú lapokra ható húzóerő miatt:

$$\Delta\ell_{xx(1)} = \ell \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{F_1}{A}$$



a másik két lapra ható erők miatt pedig ($\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta\ell}{\ell}$ miatt) :

$$\Delta\ell_{xx(2)} = -\mu \cdot \ell \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{F_2}{A} \qquad \text{és} \qquad \Delta\ell_{xx(3)} = -\mu \cdot \ell \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{F_3}{A}$$

a teljes rel. alakvált. :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta\ell_{xx}}{\ell} = \frac{1}{E} \cdot \left[\frac{F_1}{A} - \mu \left(\frac{F_2}{A} + \frac{F_3}{A} \right) \right]$$

→ ez érv. a test belsejéből képzeletben kivágott kockára is

(ha F a szomszéd darab által rá kifejtett erő)

legyen σ_{xx}:= az x-normálisú felületre ható fesz.-vektor x-komponense

σ_{yy} és σ_{zz} a másik két norm. felületre ugyanez

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_{xx} - \mu \left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz} \right) \right]$$

← **általános Hooke-törv.**

ez összenyomásra is érv.: akkor σ és ε is < 0

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_{xx} - \mu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right] \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\left(\ell + \Delta\ell_{xx}\right)\cdot\left(\ell + \Delta\ell_{yy}\right)\cdot\left(\ell + \Delta\ell_{zz}\right) - \ell^3}{\ell^3} \approx$$

$$\approx \frac{\Delta\ell_{xx} + \Delta\ell_{yy} + \Delta\ell_{zz}}{\ell} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}(1-2\mu)\cdot\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)$$

ha speciálisan minden oldalra ugyanakkora nyomóerő hat felületegységenként :

$$-\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = -\sigma_{zz} =: p \geq 0$$

nyomás

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\cdot p\cdot\left[1-2\mu\right]$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -3\cdot\frac{1-2\mu}{E}\cdot p = -\frac{1}{K}\cdot p = -\kappa\cdot p$$

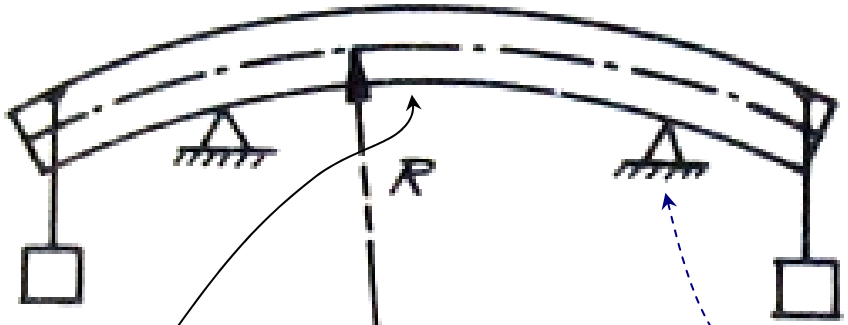
kompresszibilitás : $\kappa = 3\cdot\dfrac{1-2\mu}{E}$

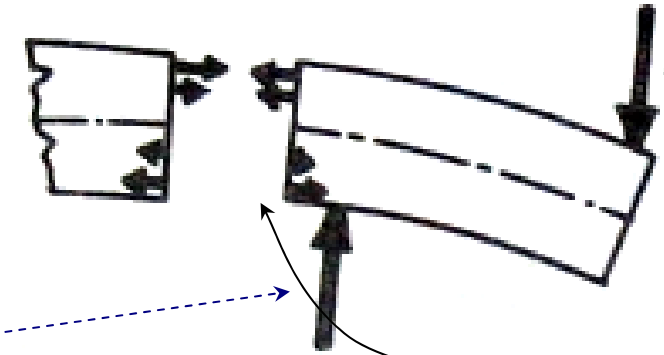
kompressziómodulus : $K = \dfrac{1}{\kappa} = \dfrac{E}{3\cdot(1-2\mu)}$

pl.: $\forall$ oldalú összenyomás pl. magas folyadékoszlop alján, vagy zárt edényben ha dugattyúval megnyomjuk

a szilárd testek észrevehető tf.-vált.-hoz igen nagy nyomóerők kellenek (azaz κ kicsi)

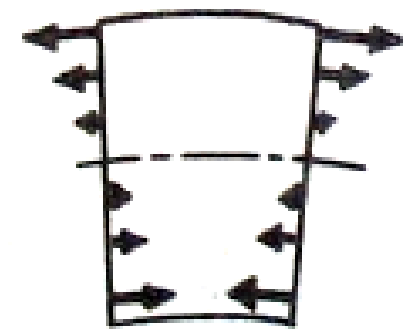
hajlítás :





2 erőpár hajlítja

tapasztalat : ez a rész körív alakú lesz (ha a rúd saját súlya elhanyagolható)



képzeletben bontsuk a rudat a hosszteng.-vel ‖ szálakra

tapasztalat : neutrális szál ! (= nem vált. a hossza)

„alatta” összenyomódás, „fölötte” nyúlás

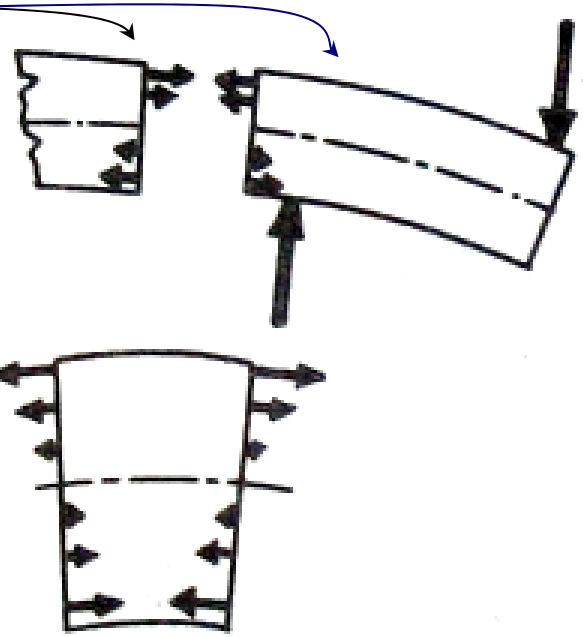
deformáció ≈ a rúd teng.-re ⊥ keresztmetszetek az ábra síkjára ⊥ teng. körül elfordulnak

a keresztmetszet mentén az egyes részek deformációja más

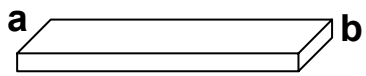
a differenciális Hooke-törv. szerint a feszültségek is

gondolatban vágjuk keresztbe ott

ez a db. erre a db.-ra olyan forgatónyomatékot gyakorol, hogy egyensúlyozza a teher és az alátámasztás forgatónyomatékát

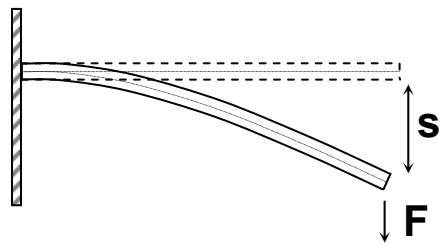


téglalap keresztmetszet esetén :



$$\frac{1}{R} = \frac{12}{E \cdot a \cdot b^3} \cdot M$$

egyik végén befogottt rúd lehajlása $\longrightarrow$ $s = \frac{4}{E}\frac{\ell^3}{ab^3}F$



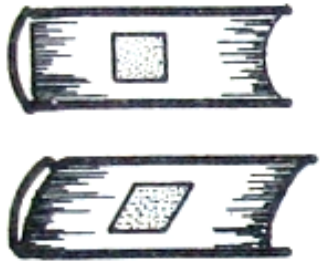
de: a befogáshoz közeledve egyre nagyobb forgatónyomaték kell rúd végére ható erő forgatónyomatékának kiegyensúlyozásához

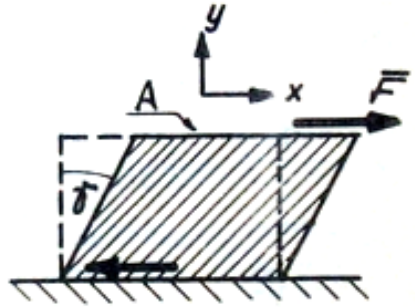
↳ a keresztmetszetekben egyre nagyobb fesz.-k ébrednek → a tövéhez közeledve egyre nagyobb a görbülete

és : egy adott keresztmetszet két oldalán levő részek egymásra függőleges erővel is hatnak (hogy „ne essen le”)

két végén alátámasztott rúd behaljása $\longrightarrow$ $s = \frac{1}{4E}\frac{\ell^3}{ab^3}F$

nyírás, csavarás:





kísérlet : könyv vagy szivacs nyírása;
olló

↓

a testre (testbe) rajzolt téglalap (téglatest) paralelogrammává (paralelepipedonná) változik

a felülettel ∥ erők (= nyíróerők) okozzák

↓

alakváltozás → adott alakvált. után belső fesz. = nyírófesz. ébred

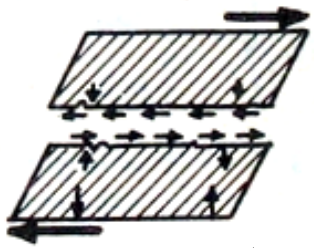
↓

egyensúlyban lesz

a fesz.-nek normális komponense is van → a forgatónyomatékok kiegyensúlyozásához

(de ha a test „lapos” → elhanyagolható)

tiszta nyírást lehet csinálni pl. így



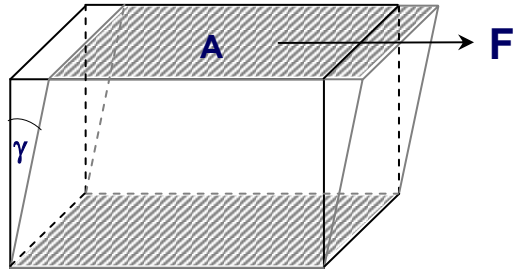
folyadék : benne egyensúly esetén nem lépnek fel nyíróerők
egyébként ∀ feszültségek hatására nincs egyensúlyban → folyik
kivétel : a minden irányú egyenletes nyomás

pl. : amorf test = folyadék, pl. vsz.-en befogott üvegrúd évek alatt láthatóan lehajlik a saját súlya alatt → amorf szilárd testek = nagy belső súrlódású folyadékok

- nyírás :

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \frac{F}{A}$$

$$\tau \equiv \sigma_t = \frac{F}{A}$$



alja rögzítve van

nyírási (csúsztatási; torzió) modulusz

- csavarás :

kísérlet : csavarás modellen

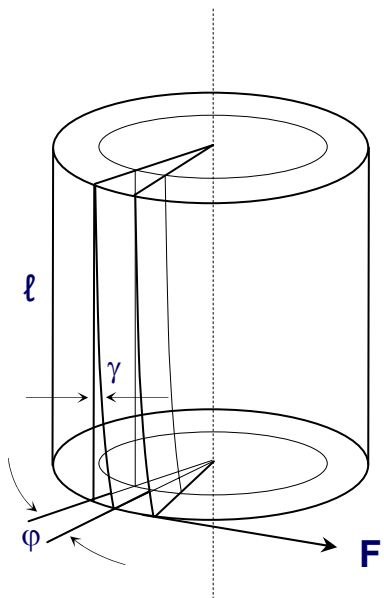
a csavarás is nyírás → $\gamma = \frac{1}{G} \cdot \frac{F}{A}$

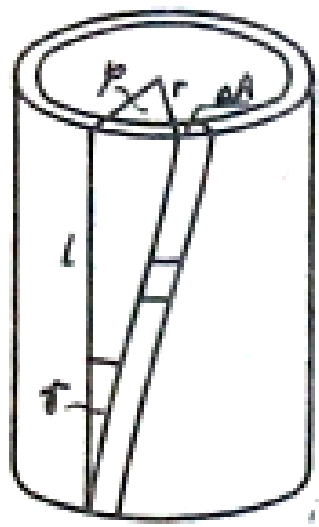
az ábráról :

$$\gamma \cdot \ell = \varphi \cdot r$$

$$\gamma = \varphi \cdot \frac{r}{\ell}$$

vékonyfalú cső csavarása :





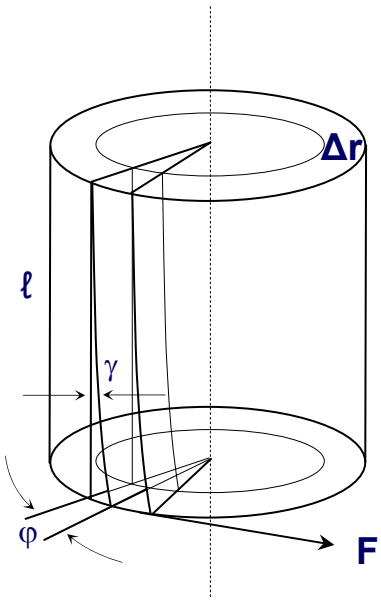
a teng.-re $\perp$ keresztmetszet egy ΔA felületelemére a szomszéd által érintőlegesen gyakorolt erő :

$$\Delta F = \sigma_t \cdot \Delta A = G \cdot \gamma \cdot \Delta A = G \cdot \frac{r \cdot \varphi}{\ell} \cdot \Delta A$$

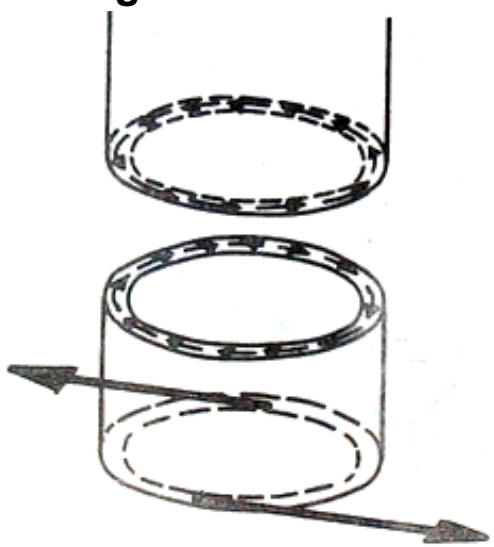
ennek forgatónyomatéka : $\Delta M = r \cdot \Delta F = G \cdot \frac{\varphi}{\ell} \cdot r^2 \cdot \Delta A$

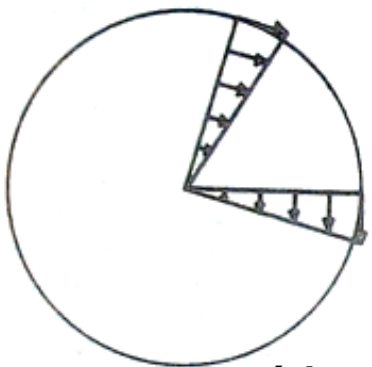
$$\Downarrow$$

$$M = 2\pi G \cdot \frac{\varphi}{\ell} \cdot r^3 \cdot \Delta r$$



megcsavart cső :





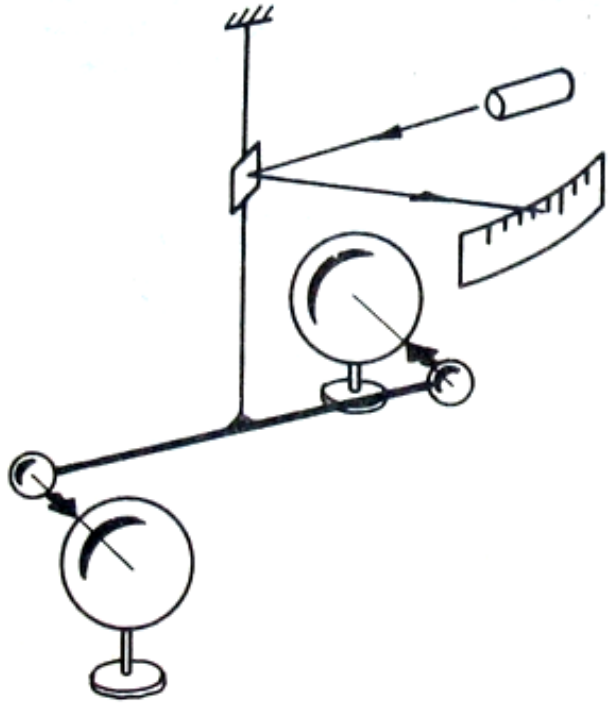
megcsavart rúd =
= egymásba tolt
koncentrikus csövek

$\Downarrow$

a fesz.-eloszlás kifelé haladva egyre nő $\rightarrow$ $M = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G}{\ell} \cdot R^4 \cdot \Delta\varphi$ $\rightarrow$ torziós szál csavarási rúgóállandója ($M=-k\cdot\varphi$) : $k = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G}{\ell} \cdot R^4$

torziómodulus mérése :

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G}{\ell} \cdot R^4 \cdot \Delta\varphi$$ → **R-el a M rohamosan csökken !!!**

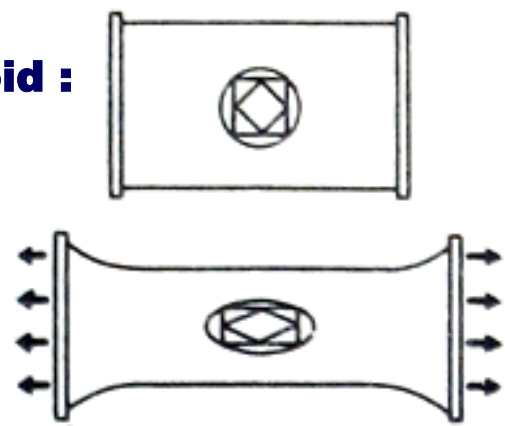


Cavendish, 1798 : a földi testek közötti gravitáció mérése

rugalmas energiasűrűség nyírási alakvált. esetén :

$$u = \frac{G}{2}\gamma^2$$

izotróp testek általános deformációja, deformációs ellipszoid :



tetsz. deformáció esetén egy gumilapra rajzolt kör (a tf.-ban gömb) ellipszissé (ellipszoiddá) nyúlik, ha a gumilapot nyújtjuk

egy olyan kis kocka deform.-ja, melynek átlói ∥-k az ellipszoid tengelyeivel, nyírás; egy olyané, melynek élei ∥-k az ellipszoid tengelyeivel, nyújtás v. összenyomás

az ellipszoid főtengelyeinek irányait a **deformáció főirányai**nak nev.

főmegnyúlások : a relatív alakváltozások (a deformációs ellipszoid főtengelyeivel kifejezhetők)

$$\varepsilon_1 = \frac{r_1 - r}{r} \qquad \varepsilon_2 = \frac{r_2 - r}{r} \qquad \varepsilon_3 = \frac{r_3 - r}{r}$$

deformációk és feszültségek összefüggése : általános Hooke-törv.:
az ε_{ij} deformációk és σ_{ij} feszültségek között lineáris egyenletek érvényesek,
a főmegnyúlások és főfeszültségekre az együtthatók a test rugalmas állandói

általános deform.: a test egyszerre szenved húzást, csavarást és hajlítást

↓

a főirányok pontról pontra változhatnak, de a test elég kis db.-jának deform.-ja mindig leírható úgy, mint a főirányokban történő nyújtás v. összenyomás

↓

a nyírás is visszavezethető nyújtásra (összenyomásra), és összefüggés található a rug. modulusok között:

rugalmassági együtthatók összefüggése:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad \left(\leq \frac{E}{2}\right) \qquad (\text{és} \quad \kappa = 3\frac{1-2\mu}{E} \quad)$$

az egykristályok rug. viselkedésének leírásához több anyagjellemző kell (legáltalánosabb esetben 21)

az energiaminimum elve és az energiamegm. rug. alakvált.-k esetén :

a rug. test egyensúlyban stabil áll.-ban van (éppen úgy volt def.-va a rug. tulajdonság, h. az anyag visszatér ebbe az állapotba a terhelés megszüntetése után)

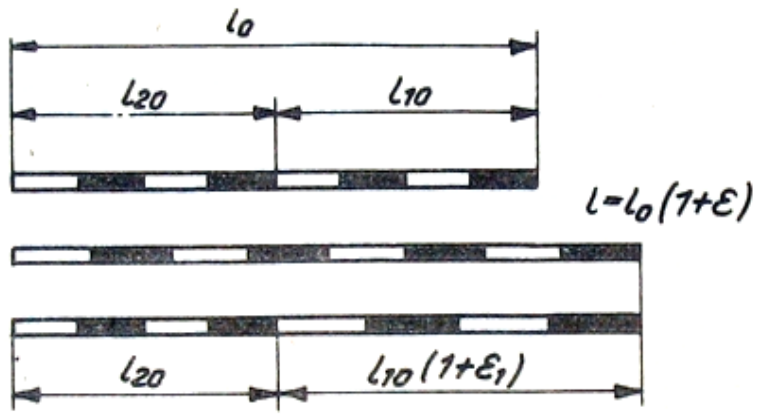
az egyensúly stabilitása nemcsak a külső erőktől mentes nyugalmi állapotban telj., hanem külső erők ill. kényszererők hatására létrejövő fesz.-i állapotban is

↳ kivétel : vékony rúd összenyomása → kis zavar hatására kihajlik :

ha a testet kényszerekkel deformáljuk (pl. egy szalagot adott hosszúságúra nyújtunk) → a test részei úgy rendeződnek el, h. a rug. E az új feltételek mellet min. legyen
ha a testet konzervatív külső erő deformálja → a beálló egyensúlyi állapot az lesz, amelyben E_{rug} + a külső erőhöz tartozó E_{pot} összege min. lesz

pl. : egy ℓ_0 kezdeti hosszúságú vékony rudat ℓ hosszúságúra nyújtunk :

mikor lesz nagyobb E_{rug}?
- amikor az egész egyenletesen megnyúlik, ε = áll. a rúd mentén, vagy
- amikor csak az ℓ_{10} szakasz nyúlik meg (ε_1) és ℓ_{20} változatlan marad



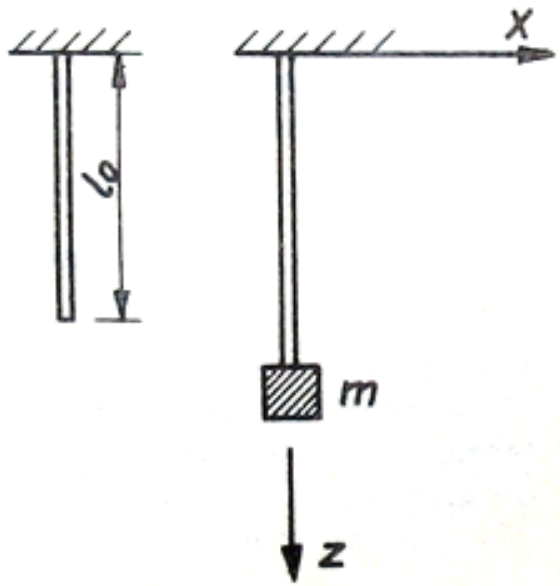
$$E_{rug} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \cdot A \ell_0 \quad \text{ill.} \quad E_{rug,1} = \frac{1}{2} E \varepsilon_1^{\,2} \cdot A \ell_{10}$$

mivel a teljes megnyúlás ∀2 esetben ugyanakkora : $\varepsilon \ell_0 = \varepsilon_1 \ell_{10}$

$\varepsilon \ell_0 = \varepsilon_1 \ell_{10} \rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{\ell_{10}}{\ell_0} \rightarrow \frac{E_{rug}}{E_{rug,1}} = \frac{\varepsilon^2 \ell_0}{\varepsilon_1^2 \ell_{10}} = \frac{\ell_{10}^2 \cdot \ell_0}{\ell_0^2 \cdot \ell_{10}} = \frac{\ell_{10}}{\ell_0} < 1$

egyenletes deform.-nál kisebb a rug. energia !

pl. : egy ℓ_0 hosszúságú rugalmas szalag felső végét rögzítjük, az alsó végére pedig egy m tömegű testet akasztunk; milyen helyzetben lesz a rdsz. teljes pot. E-ja minimális ?



mivel E_{rug} egyenletes megnyúlás esetén lesz min., csak a teljes E-min.-hoz tartozó hosszúságot kell megtalálni :

mivel

$$E_{pot,teljes} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \cdot A \ell_0 + mgh = \frac{1}{2} E \left(\frac{z - \ell_0}{\ell_0} \right)^2 \cdot A \ell_0 + mg(-z)$$

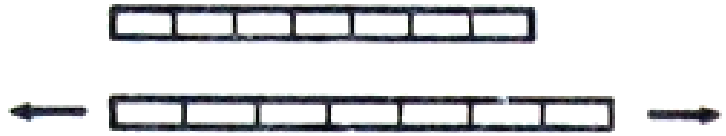
és az E azon hosszúságnál lesz min., ahol $\frac{dE_{pot,teljes}}{dz} = 0$ **:**

$$\frac{dE_{pot,teljes}}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} E \left(\frac{z - \ell_0}{\ell_0} \right)^2 \cdot A \ell_0 - mgz \right] = \underbrace{EA \frac{z - \ell_0}{\ell_0} - mg = 0}$$

$$\frac{z - \ell_0}{\ell_0} = \frac{mg}{EA} \rightarrow \varepsilon = \frac{mg}{EA}$$

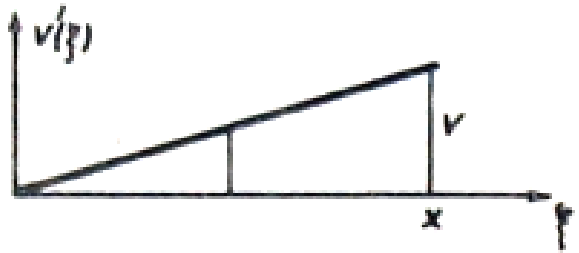
ami éppen a Hooke-törv. szerinti egyensúlyi megnyúlás

pl.: határozzuk meg egy m_r tömegű rúgóra akasztott m tömegű test rezgésidejét, ha $m_r < m$:



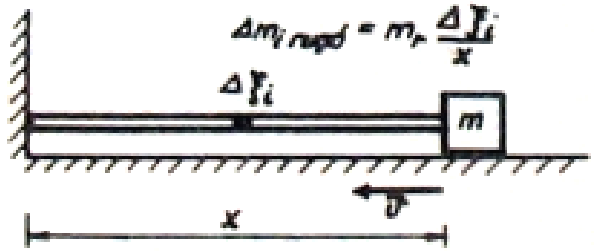
rezegjen vsz.-en, pl. légpárnás asztalon → nincs súrlódás

ha $m_r << m$ → a rúgó deformálása kvázisztatikus folyamatnak vehető : a rúgó 2 végére ható erők majdnem egyformák → a rúgó relatív deform.-ja a teljes hossza mentén állandó és az egyes tp.-jainak az erőmentes egyensúlyi helyzettől mért kitérése a rögz. végtől való távolságukkal arányos ∀ pillanatban



↓

a rögz. végtől ξ táv.-ra levő Δm_i darab sebessége :



↑

$$\Delta m_i = m_r \cdot \frac{\Delta \xi_i}{x}$$

$$v(\xi_i) = v(x) \cdot \frac{\xi_i}{x}$$

ahol v(x) a rúgó szabad végének (és a tp.-nak) a sebessége

ekkor a rúgó kin. E-ja : $$E_{kin,rúgó} \approx \frac{1}{2}\sum\left[\Delta m_i v^2(\xi_i)\right] \to \frac{1}{2}\int_0^x \frac{v^2(x)}{x^3}\xi^2 m_r d\xi = \frac{1}{2}\frac{m_r}{3}v^2(x)$$

a rdsz. teljes kin. E-ja : $$E_{kin,teljes} = E_{kin,rúgó} + E_{kin,test} = \frac{1}{2}\left(\frac{m_r}{3} + m\right)v^2(x)$$

a rug. E, mivel a deformációt állandónak feltételeztük : $$E_r = \frac{1}{2}kx^2$$

az energia megm. T szerint a rug. E csökkenése = a kin. E növekedésével :

$$E_r(x) - E_r(x + \Delta x) = E_{kin}(x + \Delta x) - E_{kin}(x)$$

$$-kx\Delta x - \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \left(\frac{m_r}{3} + m\right)v\Delta v + \frac{1}{2}\left(\frac{m_r}{3} + m\right)\Delta v^2$$

Δt-vel osztva és $\lim_{\Delta t \to 0}$

$$-kx\frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{m_r}{3} + m\right)v\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = -\frac{k}{\left(\frac{m_r}{3} + m\right)}x$$

ez éppen a harm. rezg.mozgás diff.egyenlete

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{m_r}{3} + m\right)}{k}}$$

a rugalmasság atomos modellje :

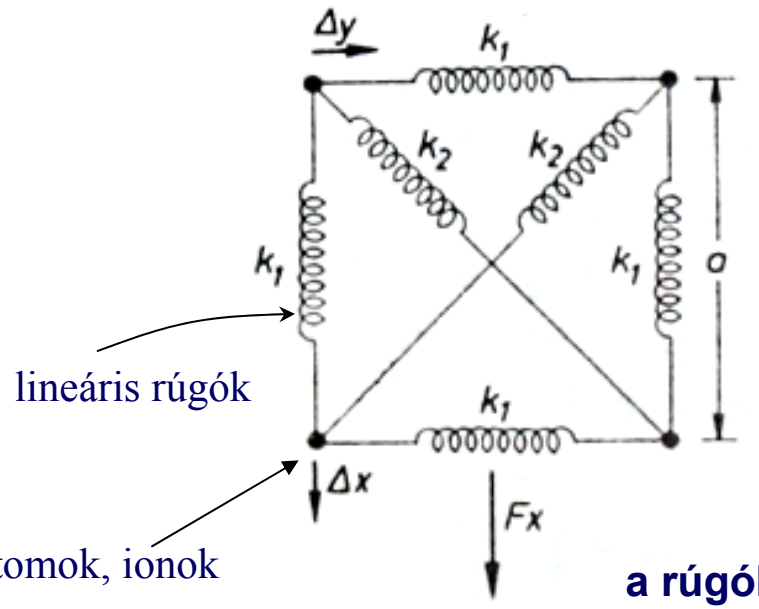
kontinuum-modell → **a rugalmas test ∀ kis része is rug. test**

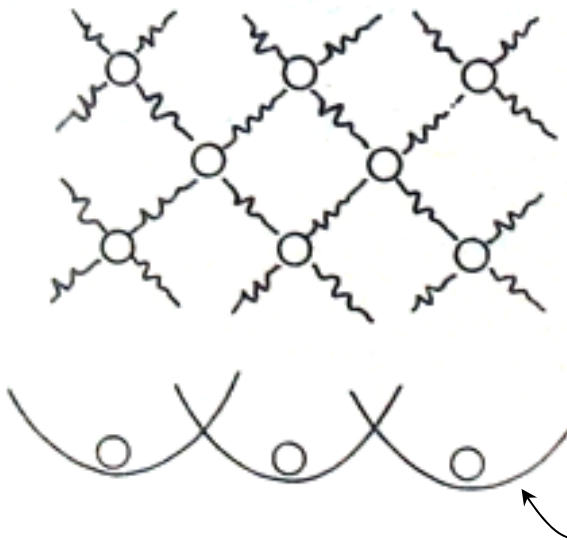
$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \qquad \textbf{és} \qquad u = \frac{dU}{dV}$$

atomos szemlélet → **a σ az elválasztó felület egyik oldalán levő atomok (molekulák, ionok…) által a másik oldalon levőkre kifejtett erők eredőjéből kapható, és a rug. energia az atomok közötti kölcs.hat. E**

→ **a legkisebb o. test, ami rugalmas, legalább néhány atomból kell, hogy álljon**

egy nagyon egyszerű ilyen modell :





egyensúlyi helyek

E-min.!

a rúgók nicsenek ott !

a kristályos szilárd testek: szabályos térbeli elrendeződés → kristályrács

ha ism. E, G, μ –t → pot.-gödör falmagasságának becslése :

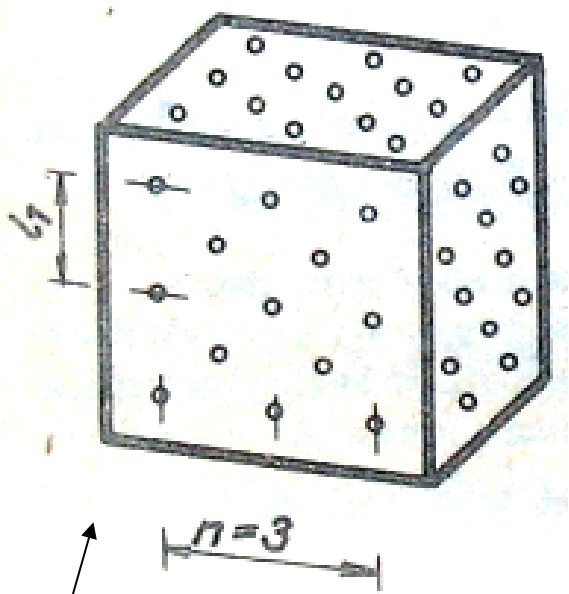
↕

vagy ugyanaz : az egyes atomokra a szomszádok által kifejtett „rúgóerő” rúgóállandóját :

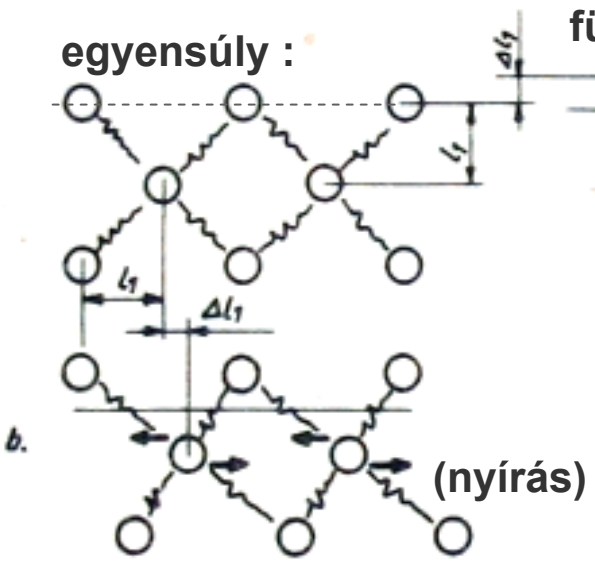
legyen a testben egységnyi hosszúságon n db. atom
→ n^3 db atom tf.-egységenként

↓

a szomszédos síkok átlagos egyensúlyi táv.-a : $\ell_1 \sim 1/n$



ha ezt egyirányú húzással terheljük → az atomok elmozdulása és az atomokra ható erők :



σ az egy atomra a sík másik oldalán levő többi által kif. összes erővel kifejezve :

$\sigma = n^2 F_1$

ε pedig : $\varepsilon = \dfrac{\Delta \ell_1}{\ell_1}$

a diff. Hooke-törv. : $\sigma = E \cdot \varepsilon$

$$n^2 F_1 = E \cdot \frac{\Delta \ell_1}{\ell_1} \approx E \cdot \Delta \ell_1 \cdot n$$

$$n^2 F_1 \approx E \cdot \Delta\ell_1 \cdot n \quad \rightarrow \quad F_1 \approx \frac{E}{n} \cdot \Delta\ell_1 = k_1 \cdot \Delta\ell_1$$

fémekre : $E \approx 10^{11}$ N/m²

$n^3 \approx 10^{23}$ atom/cm³ → $n \approx 10^8$ atom/cm

$$k_1 = \frac{E}{n} \approx \frac{10^{11}\ {}^{N}/_{m^2}}{10^{8}\ {}^{1}/_{cm}} = \frac{10^{11}\ {}^{N}/_{m^2}}{10^{10}\ {}^{1}/_{m}} = 10\,\frac{N}{m}$$

az egy kiszemelt atom kölcs.hat.E-ja a szomszéd rétegben levő atomokkal :

$$E_{pot,1} = \left(\frac{1}{2} k \cdot \Delta\ell^2\right) = \frac{1}{2} k_1 \cdot \Delta\ell_1{}^2$$

ha nem deform. a testet, csak 1 atom kimozdul v.merre az egyensúlyi helyzetéből → az egyik szomszéd sík vonzza, a másik szomszéd taszítja

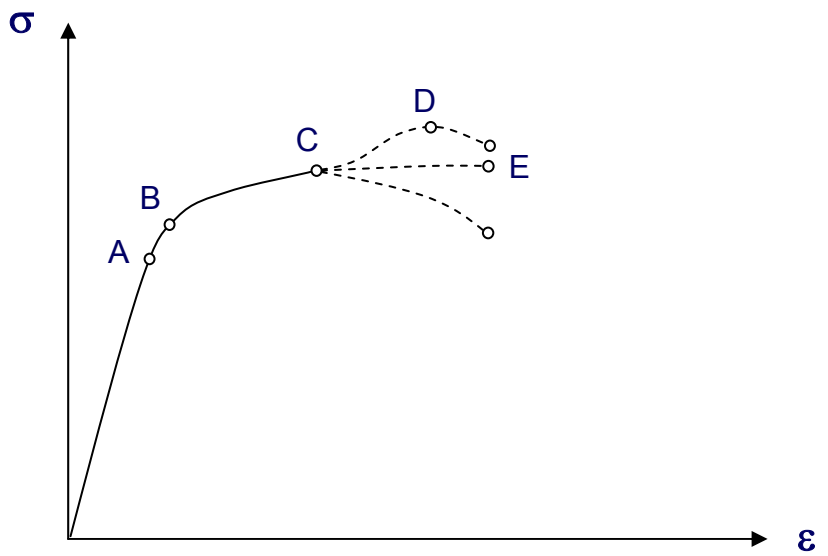
$$F_{eredő} = 2k_1 \cdot \Delta\ell_1$$

a pot.-gödör egyenlete az atom virtuális elmozd.-nak fgv.-ben :

$$E_{pot}(\Delta\ell) = \frac{1}{2}(2k_1) \cdot \Delta\ell^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2E}{n}\right) \cdot \Delta\ell^2$$

nyírásra is hasonlóan, csak $\frac{2G}{n} < \frac{2E}{n}$ **rúgóállandóval kell számolni**

viselkedés a rugalmassági határon túl :



O-A szakasz : Hooke-törv. (lin.)
B : rugalmasság határa (nem lin.)
C : képlékenység
D : maximum
E : szakadás (szakítószilárdság)

A és B elég közel vannak → maradó alakvált.

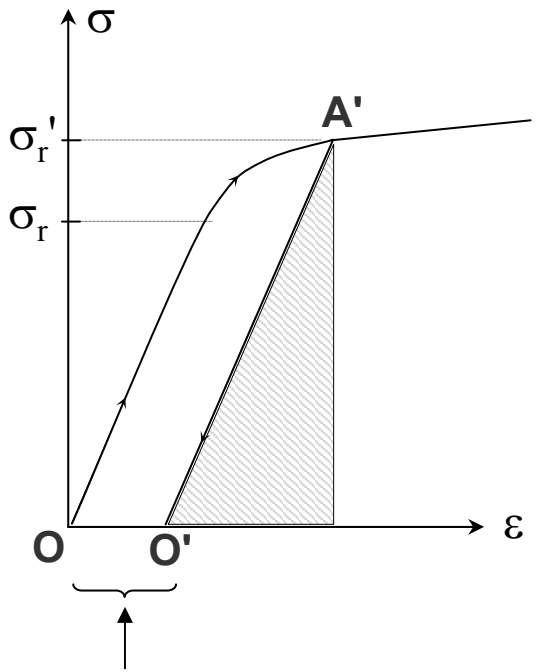
képlékeny
rideg } anyagok

pl. : képlékeny : acél, Cu, kilágyított Cu, meleg szurok
rideg : öntöttvas, bronz, üveg, hideg szurok

képlékeny : nagy maradó alakvált.-t lehet okozni →
rideg : nemsokkal σ_r fölött eltörnek (nincs maradó alakvált.)

az A' pt.-hoz tartozó teljes alakvált. = OO' maradó alakvált. +
+ egy innen induló másik rug. alakvált., az eredetitől kül. rug. határral : $\sigma_r' > \sigma_r$! → *alakítási keményedés*

σ-t A'-n túl növelve a σ_r is nő, de csak egy darabig
→ folyáshatár : adott σ elérése után ε akkor is nő, ha σ nem nő tovább → mint a folyadékok



tiszta húzásnál : ált. hamarabb elszakad, mint a folyáshatár

↓

szakadás : lokális egyenetlenség, repedés miatt → ott a névleges σ sokkal nagyobb lehet

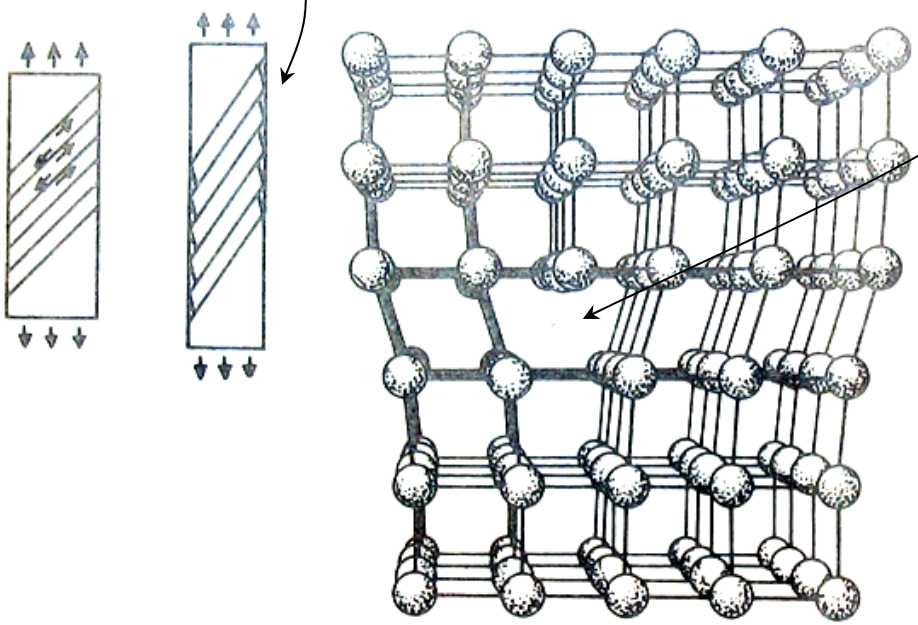
nyomás, hengerlés : nem tud elvékonyodni → lehet folyatni → tetsz. alakra formálható

(pl. : bogrács, lemezbögre, lemez fürdőkád, …)

képlékeny alakvált. mechanizmusa :

eredetileg sima felület szemmel láthatóan lépcsős lesz → magyarázat : **diszlokációk** (= vonalhibák) :

hiányzik egy vonal mentén az atomsor

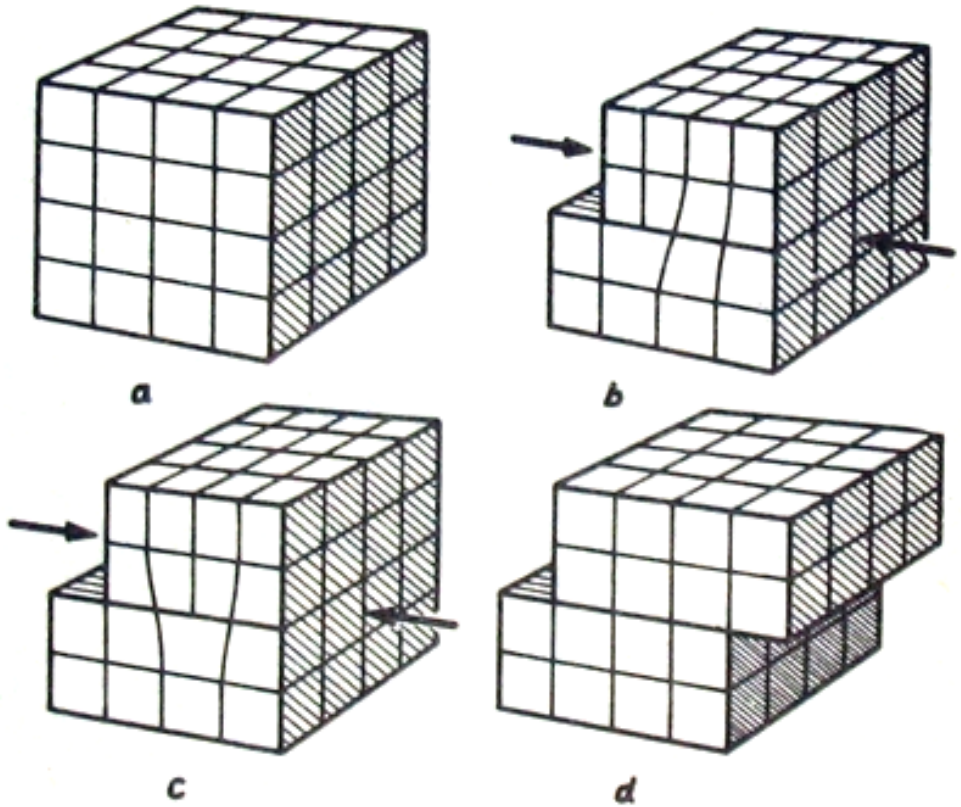


mintha egy plusz félsíkot betolnánk 2 szomszédos sík közé

↓

a plusz félsík „éle” a diszlokáció = éldiszlokáció

két szomszédos sík elcsúszása egy diszlokáció segítségével :



a szemmel látható alakváltozáshoz sok atomnyi elmozd. kell → sok diszl. kell

↓

diszl.-források

(folyt.-t ld. később…)

rugalmas utóhatás :

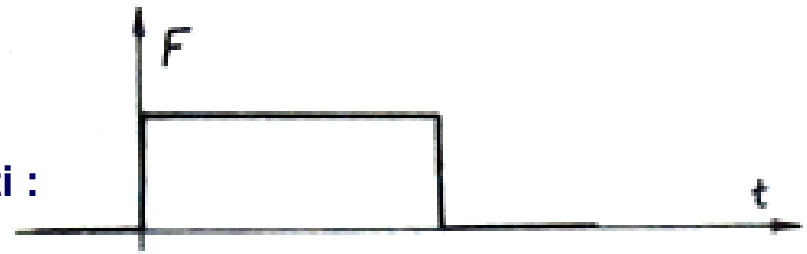
az előzőekben :

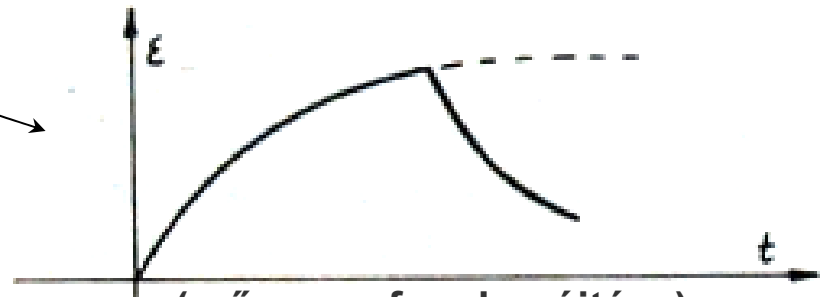
végtelen lassú deform. → alakvált. rögtön követi az erő vált.-t

de a valóságban :

ha a terhelés hirtelen nő

→ az alakvált. csak késve követi :





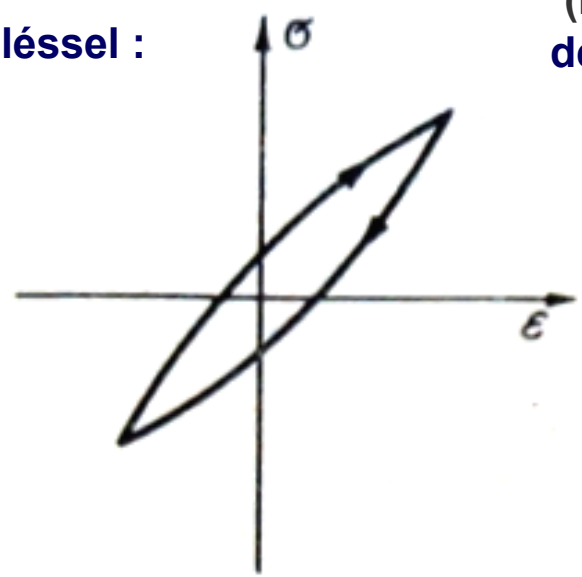
(műanyag fonal nyújtása)

de fémeknél is kimutatható

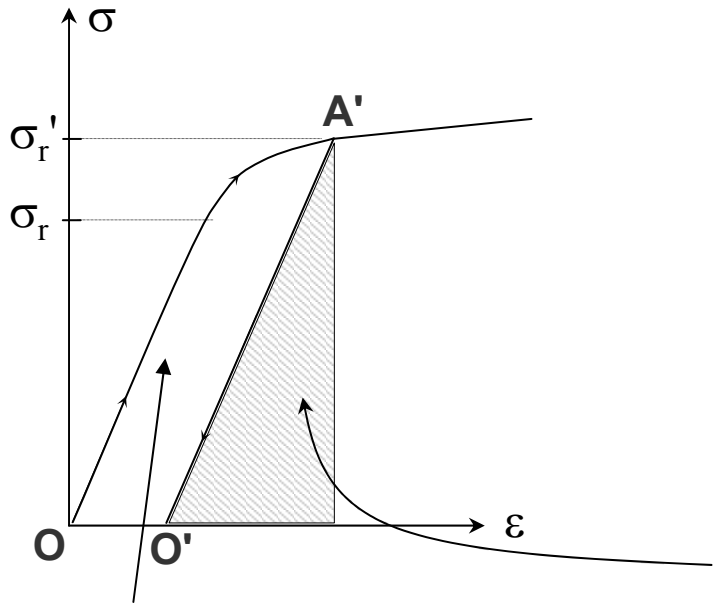
rugalmas hiszterézis :

periodikusan vált. a terhelést (pl. rúgón rezeg egy test) → periodikusan nyúlik - összenyomódik

a deform. nincs fázisban a terheléssel :



energiadisszipáció :



ha nincs képl. alakvált. :
deformáció ⟷ munkavégzés
↕
rug. energia

ez a terület : az a munka, amit a test végezni tud, amíg visszaalakul „eredeti” alakjára

ez a terület : a maradó alakvált. eléréséhez szüks. munka (mech.-i munkavégzés szempontjából elveszett)

energiaveszteség van a hiszterézis miatt is : a hurok területe az elveszített energia

↓

∀ rezgés csillapodó rezgés lesz

(ld. később…)

energiaveszteség → „sérül” az energiamegmaradás ?
az atomok rendezetlen rezgéseinek energiája tárolja ezt az energiát

↓

konzervatív
disszipatív } kölcsönhatások

melegszik

ütközések :

tökéletesen rugalmas
tökéletesen rugalmatlan
} ideális határesetek

a valóság a kettő között van

lendület megmaradás
perdület megm.
} teljesül

ütközés = olyan, rövid idő alatt lejátszódó foly., melyben az ütköző testek közötti kölcsönhatási erő csak egy véges távolságon belül ≠ 0, és a testek ezen táv.-on kívülről indultak

pl. : rugalmas golyók (acél, elefántcsont !!!), kocsik ütközése, …

biliárdgolyó

csak akkor lépnek kölcs.h.-ba, ha gyakorlatilag összeérnek (makroszkópikusan összeérnek)

de ütközés az atomi folyamatok (magreakciók, Rutherford-szórás) jelentős része is

ütk.-t leírni teljesen pontosan akkor lehetne, ha :

pillanatról-pillanatra ismerjük ∀ test helyzetét, alakját, méretét, a tömegpontjaik seb.-t
ehhez viszont ismerni kellene a rájuk ható külső és belső erők erőtörv.-it

↓

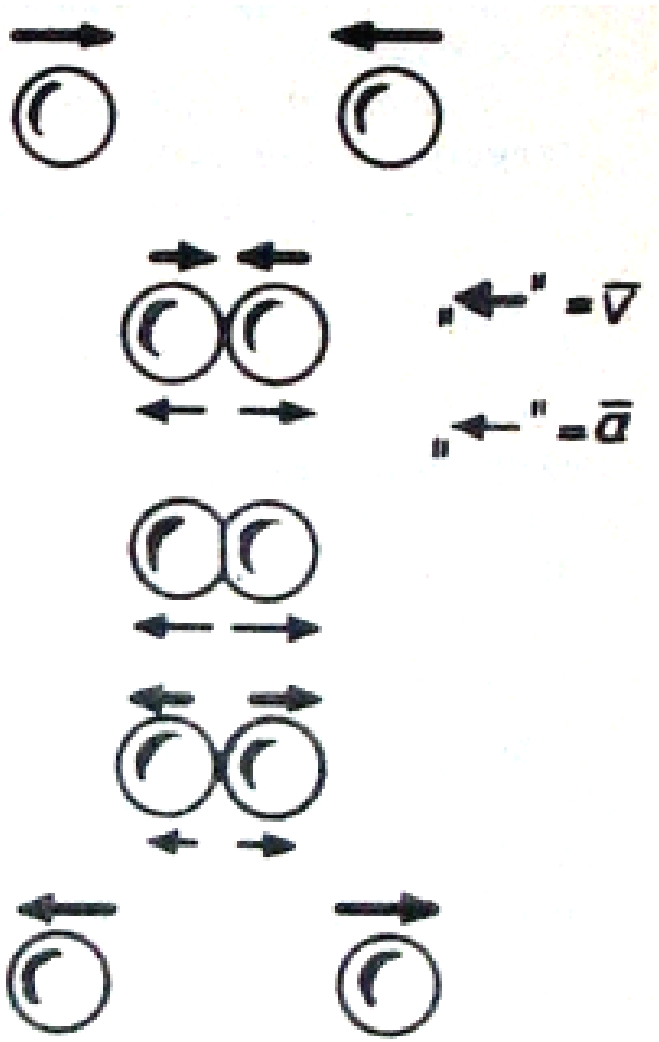
lehetetlen

de a megmaradási tőrvényekkel is sok fontos dolgot meg lehet állapítani

energiamegm. ⟷ rugalmas ütk.

az ütköző testek mozgási + forgási + belső energiái, + a két test közötti pot.E

az ütközés folyamata :



ha tökéletesen rug. ütk. → mozgási E megm.
ha tökéletesen rugtl. → összetapadnak

↓

ütk. után $v_{közös}$

reális esetekben :
a kezdeti összes E egy része disszipálódik

tömegpontok rugalmas ütközése :

egyenesvonalú
nem egyenesvonalú } ütközések

energia- és impulzusmegmaradás érv.

egyenesvonalú ütk. : ha egyforma tömegűek

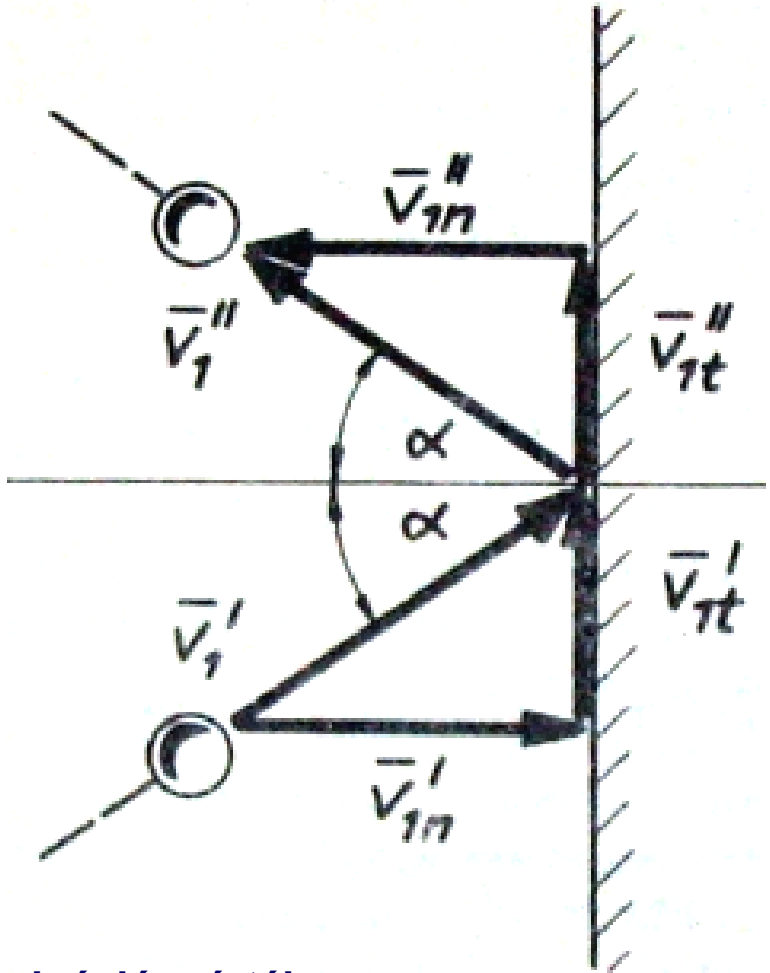
↓

a tömegpontok sebességet cserélnek

ha az egyik tömege >> mint a másik tömege

↓

a kisebbik visszapattan és a másik nem mozdul



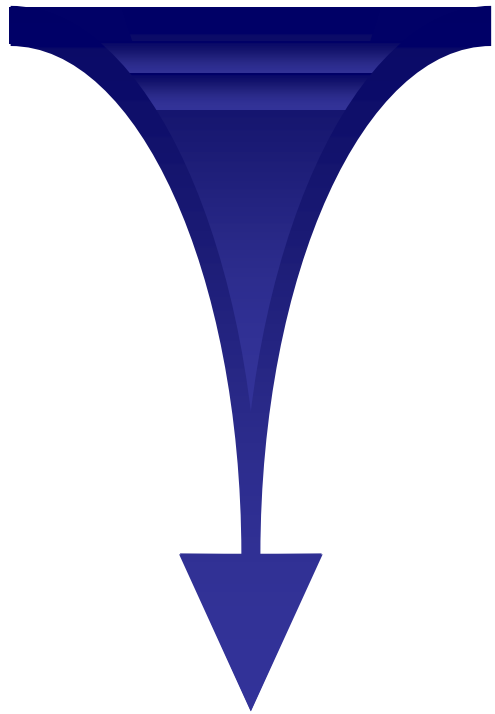
tömegpontok rugalmatlan ütközése :

csak akkor tudunk számolni, ha ismert az energiadisszipáció mértéke

↓

tökéletesen rugtl. esetet lehet vizsgálni : összetapadnak és közös sebességgel mennek tovább

pl.: homokzsákba lőtt puskagolyó…
kalapáccsal ütött → alakított vasdarab



FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK STATIKÁJA ÉS ÁRAMLÁSA :

folyadékok :

állandó térf., nem állandó alak, a részecskék „gördülhetnek” egymáson ➔ folyik

pl.: csapágygolyók egy edényben; homok, liszt, cement, … is folyik

↓

nyugvó folyadékban nincsenek érintőleges (nyíró) feszültségek !

de pl. méz, olaj, szurok,… - ban észlelhető, **ha folyik**

↓

belső surlódás : az egymáson elmozduló rétegek közötti surlódás

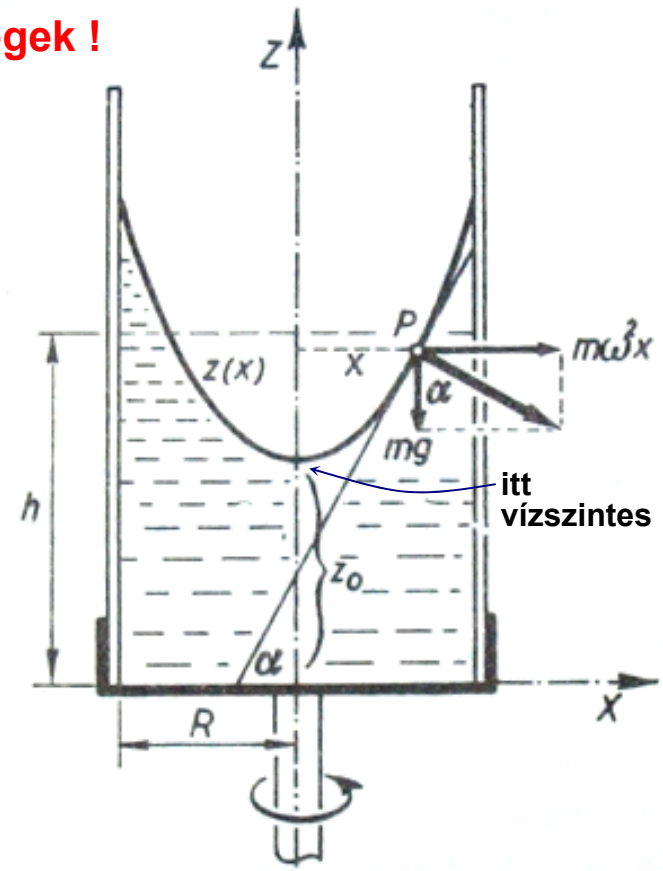
ideális folyadék : nincs belső surlódás

inkompresszibilis = összenyomhatatlan

nyugvó foly. szabad felszíne mindenütt merőleges a külső erők eredőjére

vagy pl. a Földet borító vizek felülete is gömb alakú

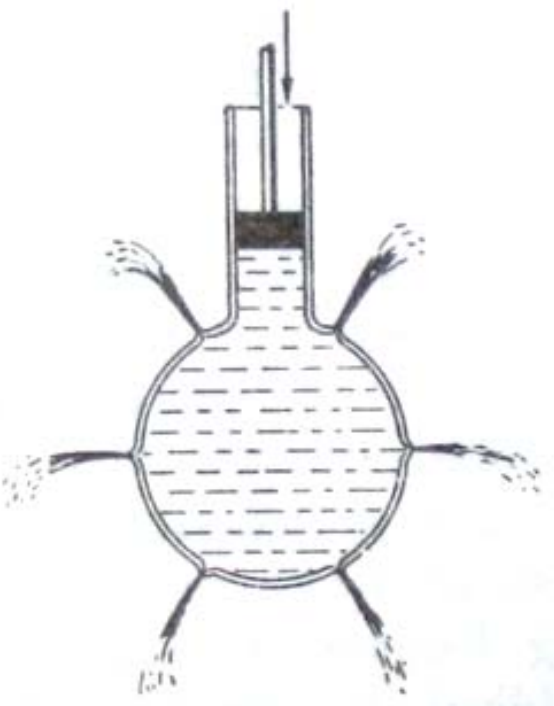
ha az eredő (F) nem lenne ⊥ a felszínre → F-nek lenne a felszínnel ∥ komponense is → a felületen levő folyadék-részecskék az F irányában elmozdulnának = nem lenne nyugalomban

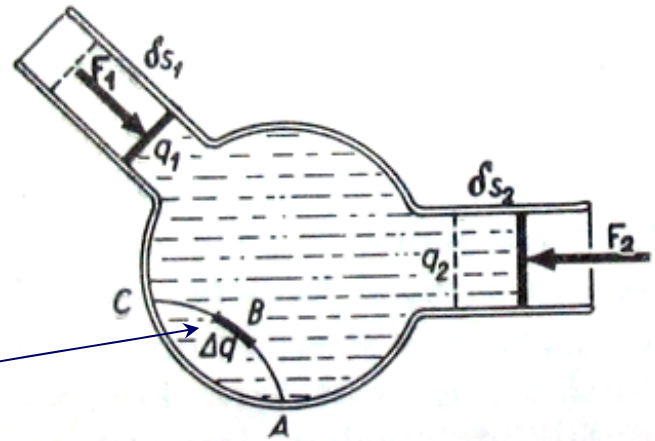


forgási paraboloid lesz a felület

nyomás nyugvó folyadékban, hidrosztatikai nyomás :

Kísérlet :





összenyomhatatlan → $\delta s_1 \cdot q_1 = \delta s_2 \cdot q_2$

és : $F_1 \cdot \delta s_1 = F_2 \cdot \delta s_2$

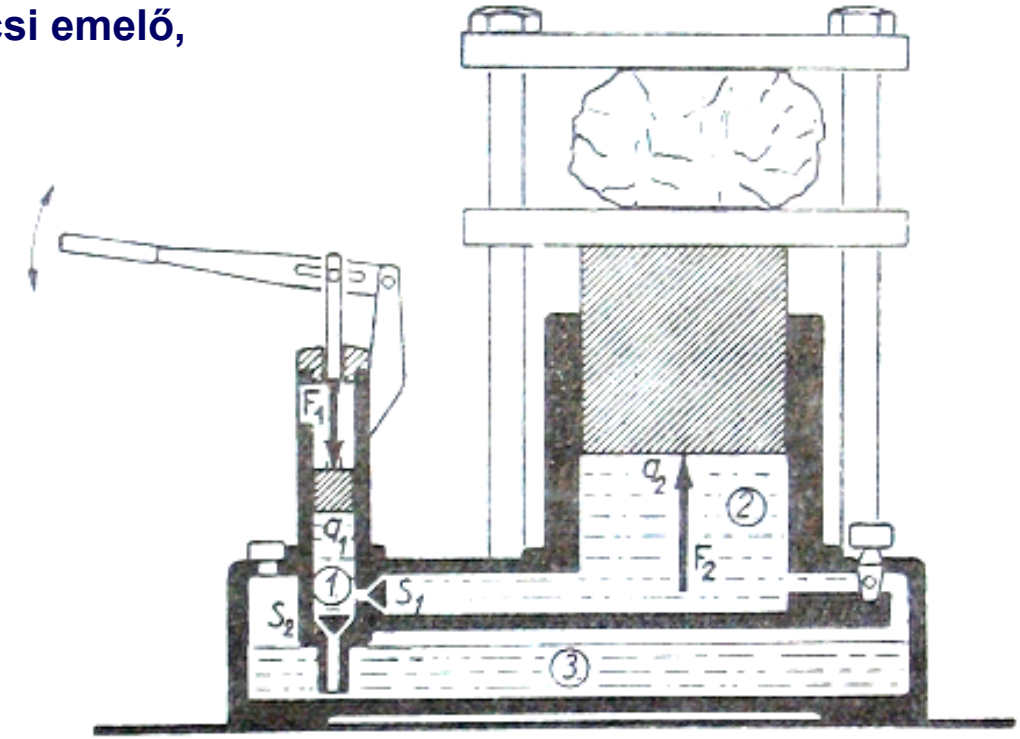
$$\frac{F_1}{q_1} = \frac{F_2}{q_2} \leftrightarrow p_1 = p_2 \qquad \left(p = \frac{F}{A}\right)$$

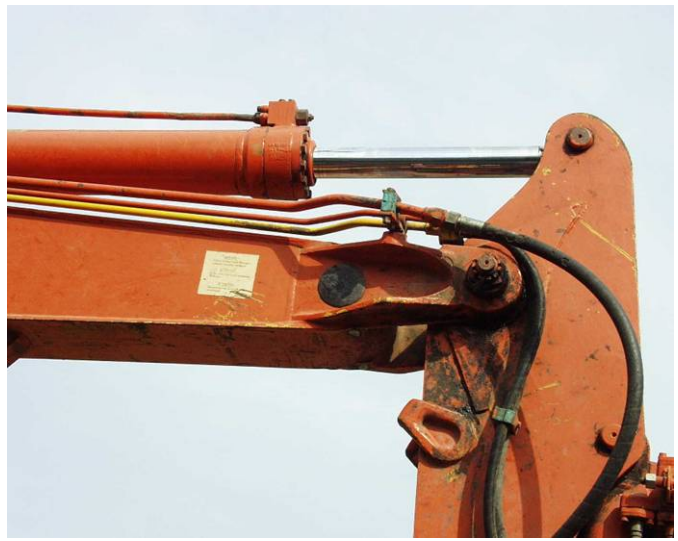
a Δq felület-darabka (bárhol is vesszük fel a foly. belsejében és ∀ irányítással) egyensúlyban van

a nyomás egyenletesen terjed és izotróp, vagyis

Pascal törvénye : a súlytalannak képzelt nyugvó folyadék belsejében és határfelületén a nyomás mindenhol ugyanakkora, és független a tekintetbe vett felületelem irányításától (1659)

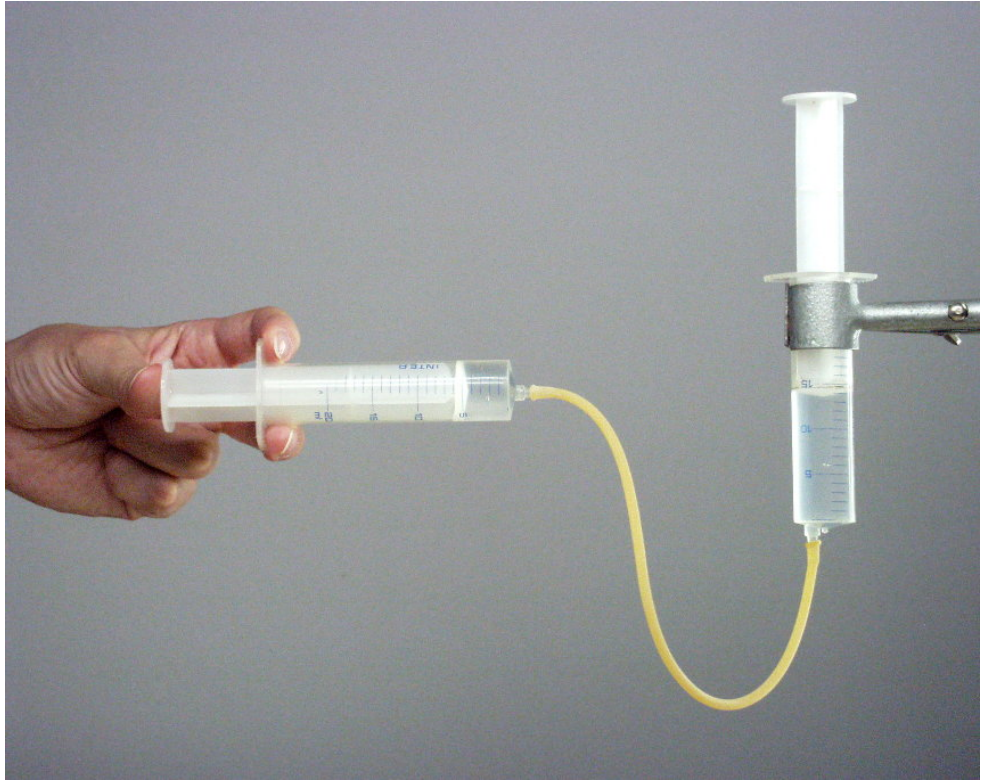
pl. : hidraulikus sajtó/sajtoló/prés; gépkocsi emelő,
hidraulikus fék, stb…





Kísérlet :

hidraulika modellezése



ha a folyadék súlyát is figyelembe vesszük: **hidrosztatikai nyomás:**

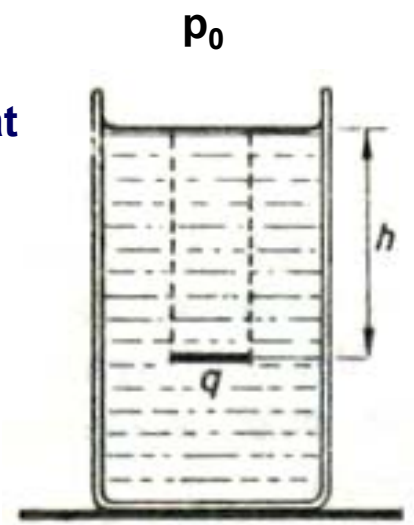
a *h* magasságú foly.-oszlop a *q* felületen $F = mg = \rho Vg = \rho gh \cdot q$ erővel hat

$$p = \frac{F}{q} = \rho gh$$

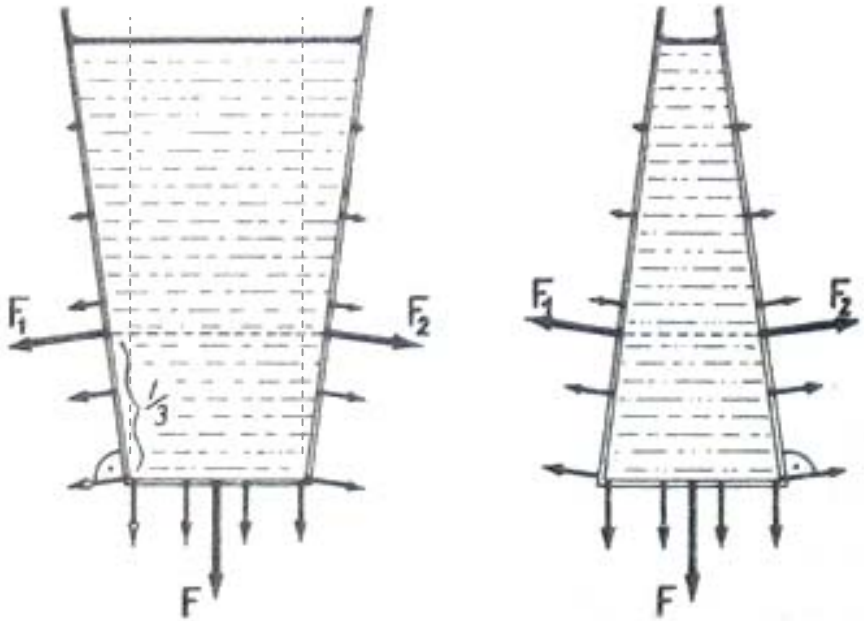
pl. : víz : 10 m mélyen 1 bar nyomás

ha p_0 külső nyomás (pl. légnyomás) is van → $p = p_0 + \rho gh$

gázban is !!!



kísérlet : **hidrosztatikai paradoxon** : a fenéknyomás fgtl. az edény alakjától !!!



oldalnyomás lefelé lin. nő

↓

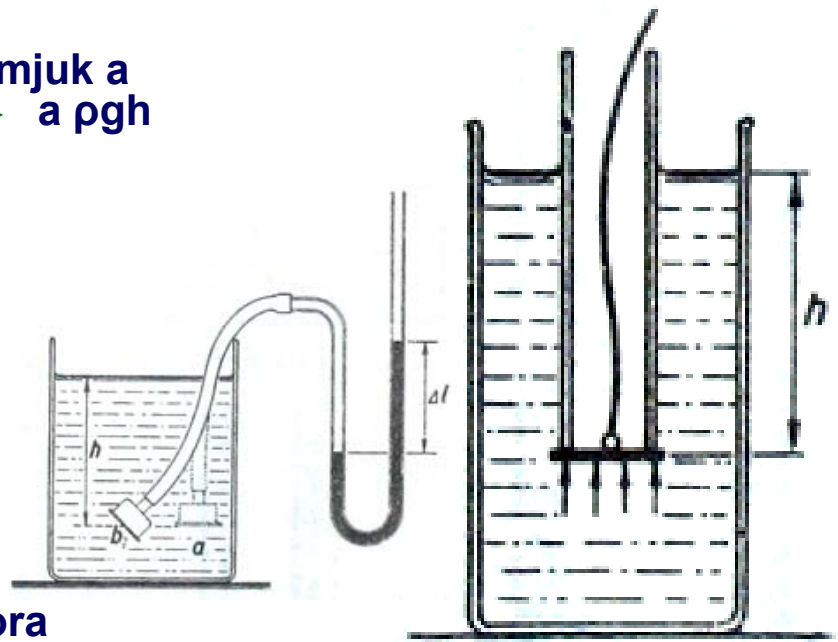
nyomásközéppont a magasság harmadánál van

kísérlet :

pl. : üvegcsövet lezárunk egy üveglappal és benyomjuk a víz alá → az üveglap nem fog leesni → a ρgh nyomás felfelé is hat !!!
(de ha a csőbe is töltünk vizet → leesik)

kísérlet :

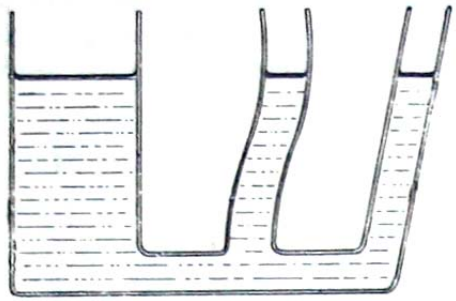
kis keresztmetszetű csövet (üvegpalackot, poharat) megtöltünk vízzel és papírlappal lefedve szájával lefele fordítjuk → papír a helyén marad + víz nem folyik ki

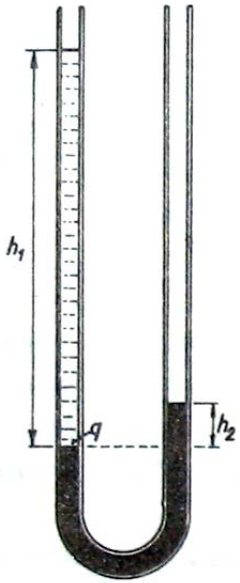


adott mélységben a nyomás ∀ irányban ugyanakkora

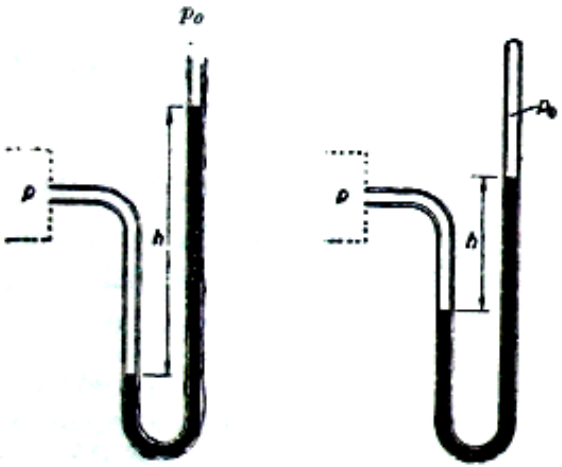
közlekedőedény : egyensúlyban minden ágban egyenlő szinten van a folyadék

kísérlet :



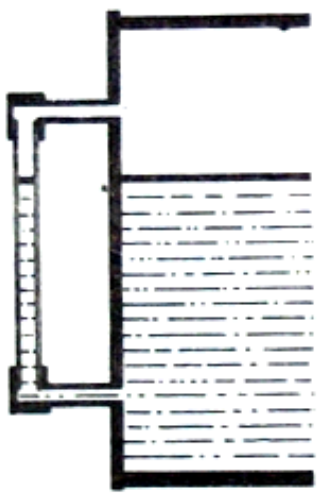


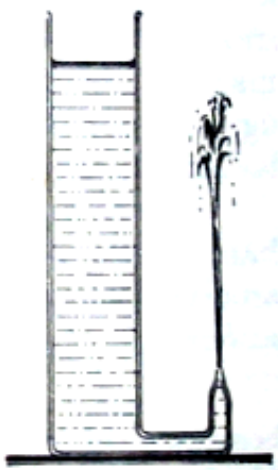
pl. : ezen alapszik az U-csöves folyadékmanométer
(főleg gázok nyomásának mérésére)
vízvezetékek, fűtésrendszerek, szökőkutak,
artézi kutak, víztorony

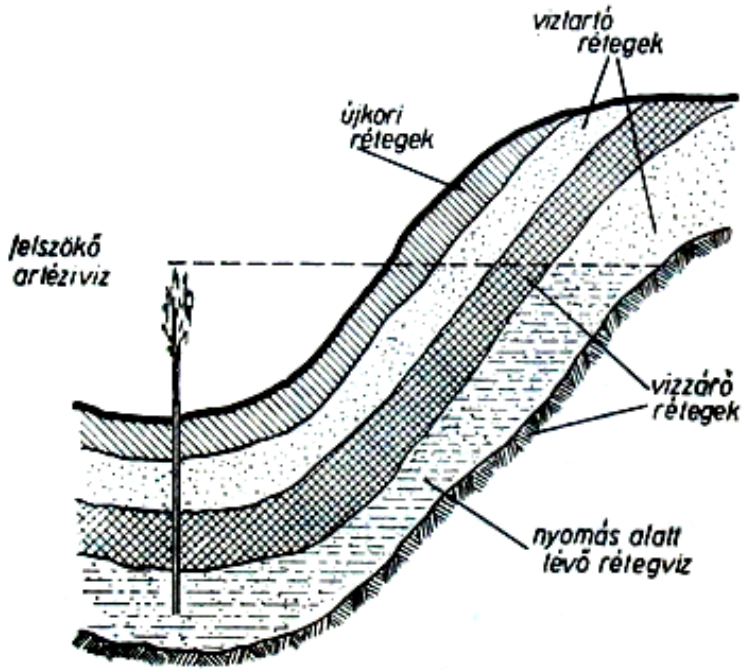


kül. sűrűségű folyadékokkal →

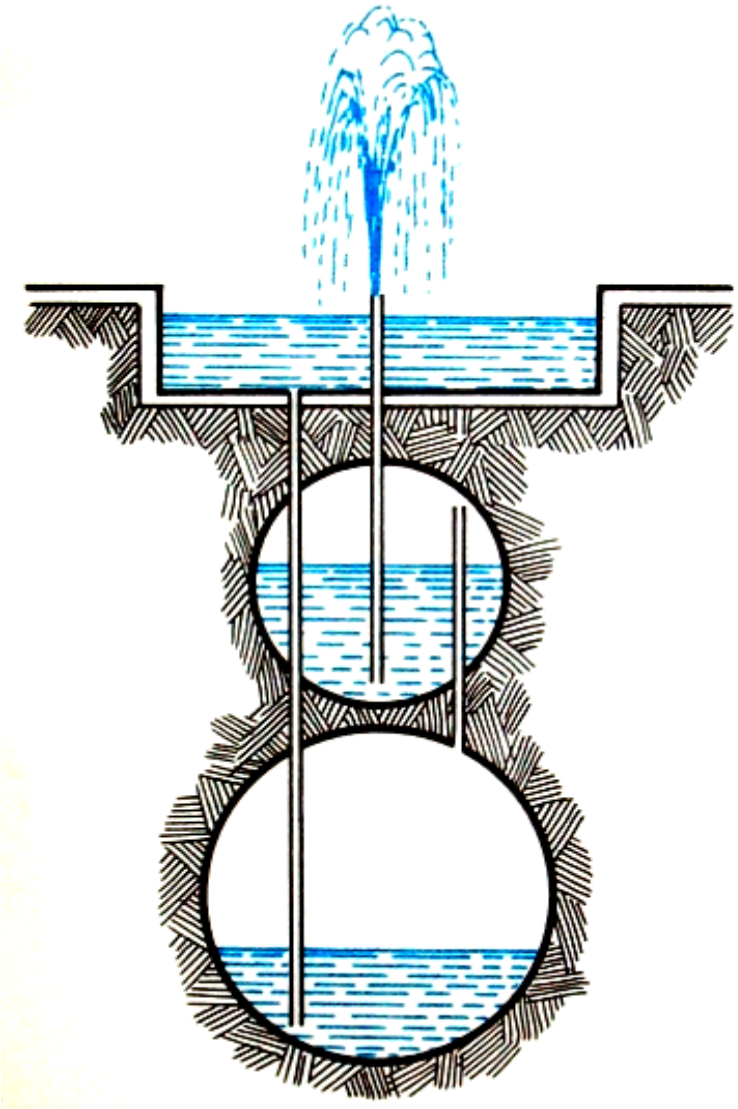
$$p_1 = \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 = p_2$$

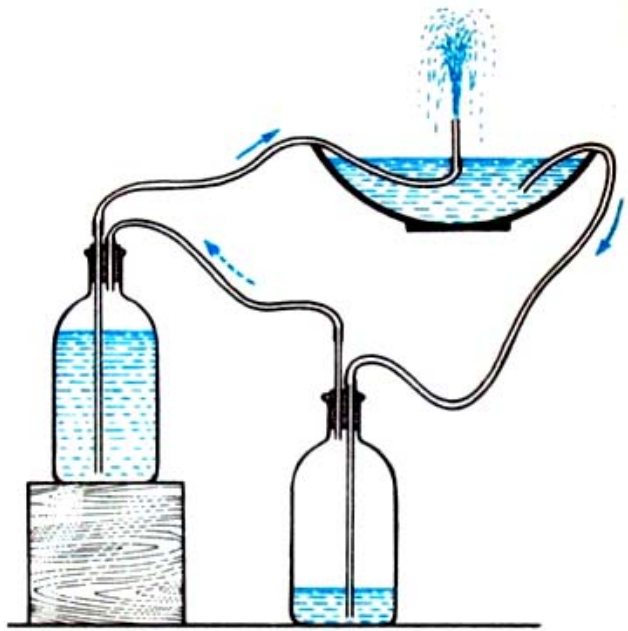






pl. : szökőkút :





Héron kútja

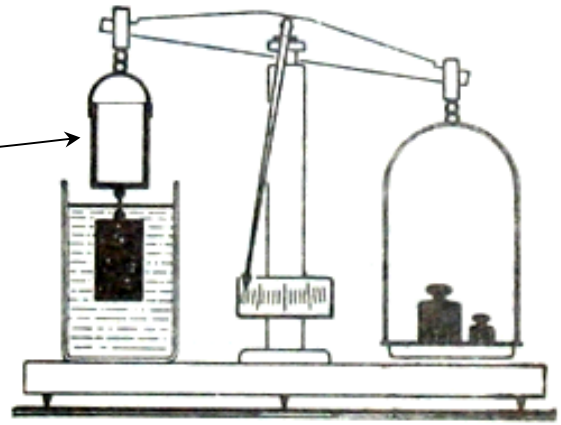
a hidrosztatikai felhajtóerő :

Arkhimédesz törv.: minden folyadékba (gázba) merülő testre felhajtóerő hat – a test látszólag súlyveszteséget szenved – melynek nagysága egyenlő a test által kiszorított folyadék (gáz) súlyával (i.e. ≈250):

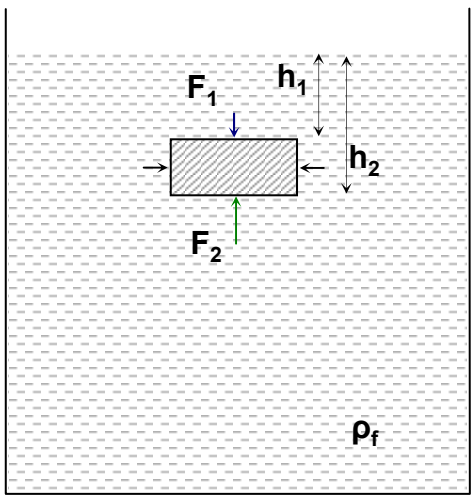
$$F_f = \rho_f \cdot V \cdot g$$

versben v. dalban :
„minden vízbe mártott test
a súlyából annyit veszt,
amennyi az általa
kiszorított víz súlya”

ha ezt megtöltjük vízzel
→ újra egyensúly lesz



(laborban Mohr-Westphal mérleg „hasonló”)



a bemerülő test egyensúlyban van:

$$F_{eredő} = F_2 - F_1 = \rho_f g h_2 A - \rho_f g h_1 A = \rho_f g A (h_2 - h_1) = \rho_f g h A = \rho_f V_{test} g$$

a kiszorított foly. tf.-a

a kiszorított foly. súlya

$$F_f = \rho_f \cdot V_{test} \cdot g$$

∀ foly.-ba v. gázba merülő testre !

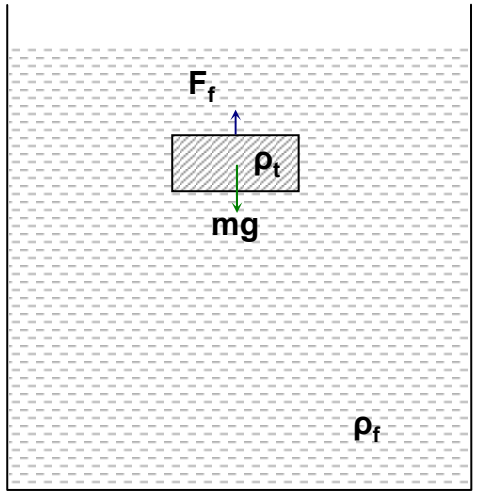
∀ alakú testre is érv. !!!

úszás
lebegés
lesüllyedés

a folyadék és a bemerülő test sűrűségeinek viszonyától függ :

hajó, jégtábla, tutaj, stb…
a hal pl. nem úszik, hanem lebeg !

$$F_{eredő} = F_f - mg = \rho_f Vg - \rho_t Vg = (\rho_f - \rho_t)Vg \quad <=> 0$$

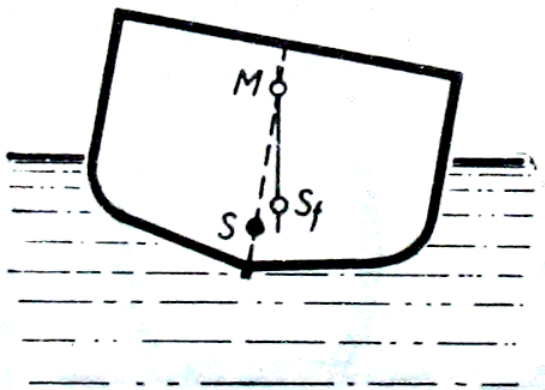


úszás — $\rho_f > \rho_t$, de ekkor a bemerülő tf. < V !
lebegés — $\rho_f = \rho_t$
lesüllyedés — $\rho_f < \rho_t$

az úszó test **átlagsűrűség**e kell !!! → vas hajó is fennmarad a vízen

pl. : $\rho_{jég} \approx 0{,}9\rho_{víz}$ → a jéghegynek csak kb. 10%-a látszik ki

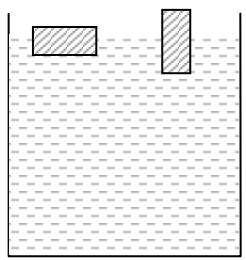
az úszás stabilitása :



F_f = mg; és F_f és *mg* ne fejtsen ki forgatónyomatékot az úszó testre

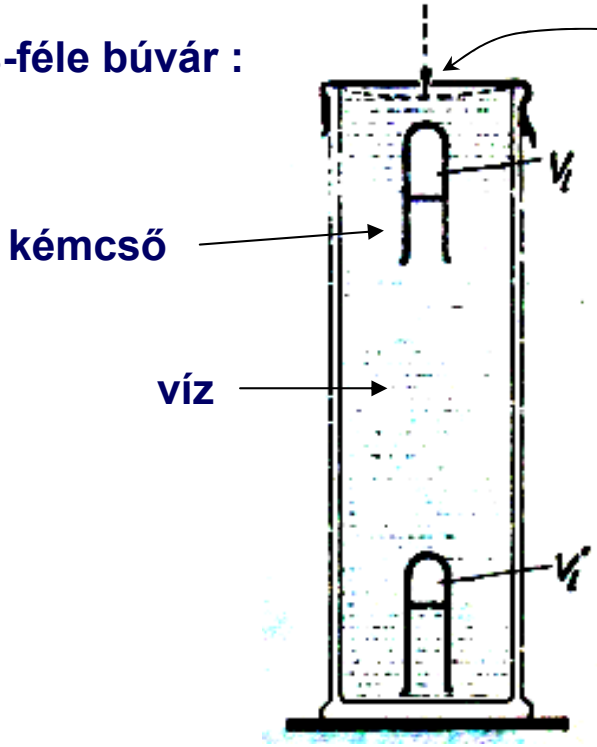
az *mg* támadáspt.-ja a súlypt. (S), az F_f támadáspt.-ja pedig a kiszorított foly. súlypt.-ja (S_f)

stabil, instabil, metastabil helyzetek :



kísérlet :

Cartesius-féle búvár :



benyomjuk/össze-nyomjuk

↓

a víz benyomódik a kémcsőbe

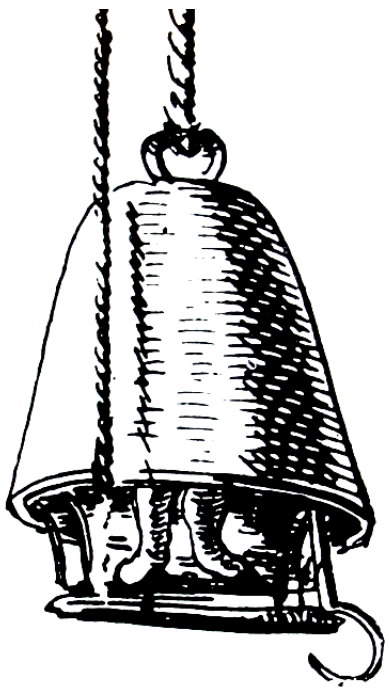
↓

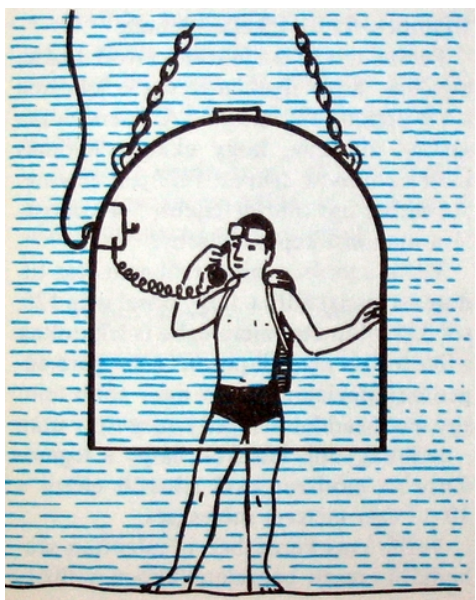
benne kisebb tf.-ú levegő ➔ átlag-sűrűség csökken

↓

lesüllyed

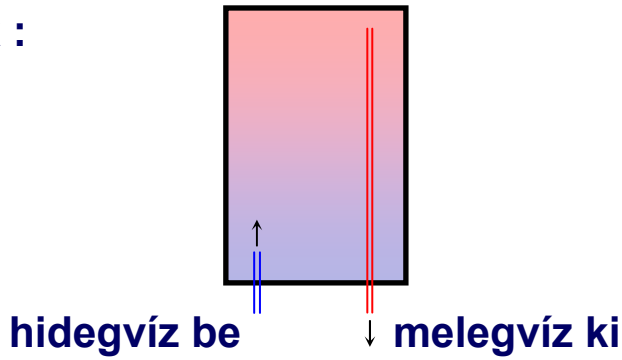
pl. : búvárharang :



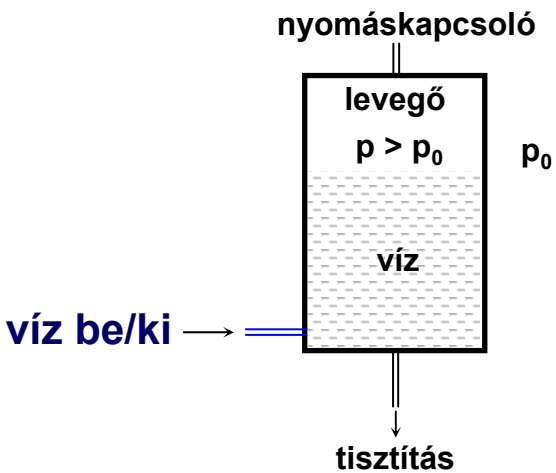


tehát : a kisebb sűrűségű test (anyag) felfelé emelkedik a folyadékban

pl. : bojler tartályban a melegvíz felülre emelkedik :



pl. : hidrofor (házi vízmű)



térfogatmeghatározás, sűrűségmérés :

homogén anyag $\rho = \frac{m}{V}$

inhomogén anyag $\rho = \frac{dm}{dV} \approx \frac{\Delta m}{\Delta V}$

ρ meghat.-hoz tömeg- és térf.-meghatározás kell

↓ mérleg ↓ mérés vagy számolás

térfogatmérés :

piknométer :

ismert sűrűségű folyadék a víz :

$\rho_{víz}(4^oC) = 0{,}999\ 972\ g/cm^3 \approx 1\ g/cm^3$

$\rho_{víz}(20^oC) = 0{,}998\ 204\ g/cm^3$

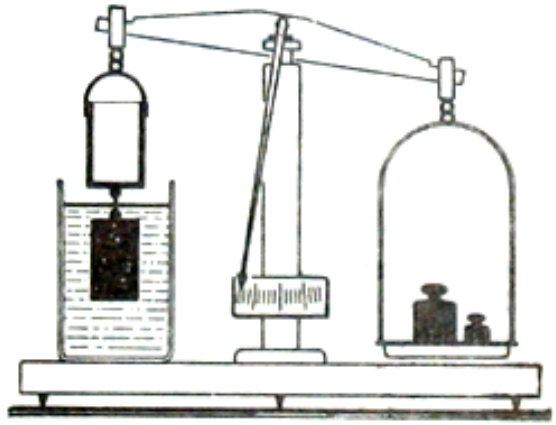
ezzel töltve az edényt + tömegmérés

↓

ismeretlen V meghatározható

a térf. ismert

szilárd testek sűrűségének mérése:

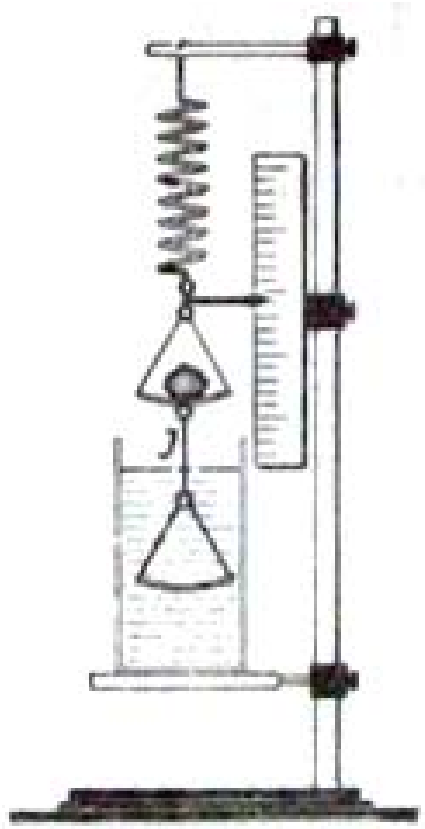


- hidrosztatikai mérleg : **kétkarú mérleg egyik karján levő mérendő testet ism. ρ_0 folyadékba merül, a súlyveszteséget mérjük**

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{m - m'}{\rho_0}} = \frac{m}{m - m'}\rho_0$$

- Jolly-mérleg : **rúgós erőmérővel mérjük egy test súlyát levegőben (felső serpenyőben), leolvassuk a súlyával arányos h megnyúlást, majd folyadékba merítve (alsó serpenyő) a h' megnyúlást, a különbségből a sűrűség meghatározható**

$$\rho = \frac{h}{h - h'}\rho_0$$



- piknométerrel : **kicsi darabokból álló anyagot mérhetünk, mérjük a szilárd test tömegét (m_t), a vízzel tele piknométer töm.-t (m_{pf}), majd a testet betesszük a pm.-be, kiszorít vmennyi folyadékot és így a tömege m_{pft}, a test sűrűsége**

$$\rho = \frac{m}{m + m_{pf} - m_{pft}}\rho_0$$

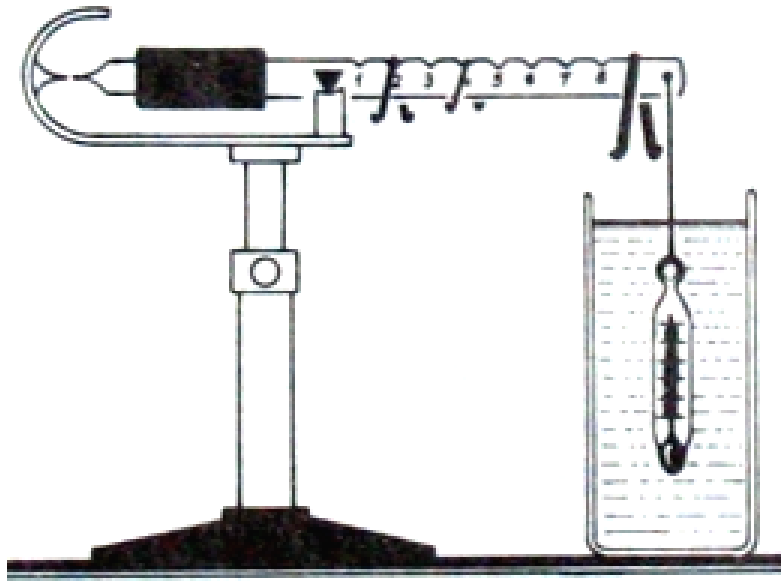
folyadékok sűrűségének mérése:

- hidrosztatikai mérleggel : hasonlóan fentebbihez …

- piknométerrel : hasonlóan fentebbihez …

- Mohr-westphal mérleggel: a víz sűrűségéhez (ρ_0) viszonyított relatív sűrűséget mérjük : a ρ és a ρ_0 sűrűségű folyadékokban ható felhajtóerők aránya

$$\frac{F}{F_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$$



- aerométerrel : (pl. alkohol-, bor fokoló)

reális folyadékok: összenyomhatók, de a kompresszibilitás nagyon kicsi
van súlya
van belső súrlódás

kohézió, adhézió :

kis összenyomhatóság → a molek.-k között taszítás van

de vonzóerők (összetartó erők = **kohéziós erők**) is vannak :

tiszta üveglapot fektetünk vízfelszínre és próbáljuk felemelni → erőhatás kell hozzá → a foly.-nak is van szakítószilárdsága
(a leszakított üveglap vizes, vagyis nem az üveget szakítottuk le, hanem két szomszédos vízréteget választottunk el)

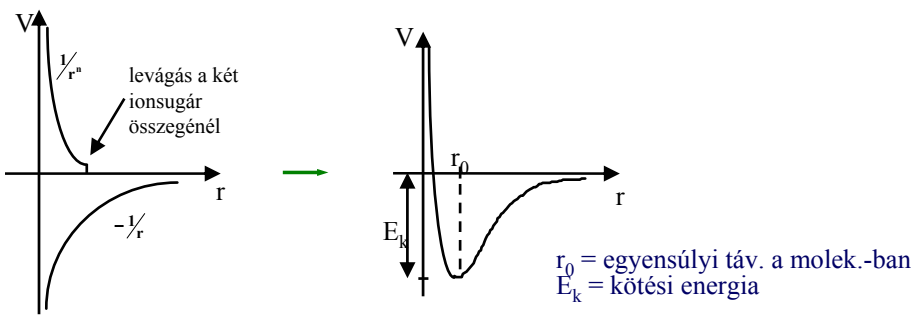
ha az üveglapot pl. Hg-ról választjuk le, akkor is erőhatás kell, de az üveg száraz marad,
vagyis most az üveg-Hg közti összetartó erőket kell legyőzni → **adhéziós erő**

↓

ragasztás („adhesive”)
toll
ceruza

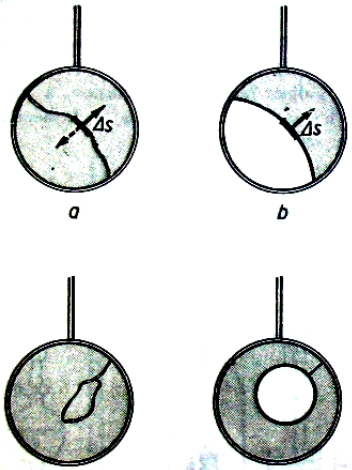
víz nedvesíti az üveget → a vízmolek.- közötti erők kisebbek mint a víz-üveg adh.erők
Hg nem nedv. üveget → a Hg molek.-k közti koh.erők nagyobbak, mint a víz-Hg közti adh. erők

molekulák között ható erők = van der Waals-erők

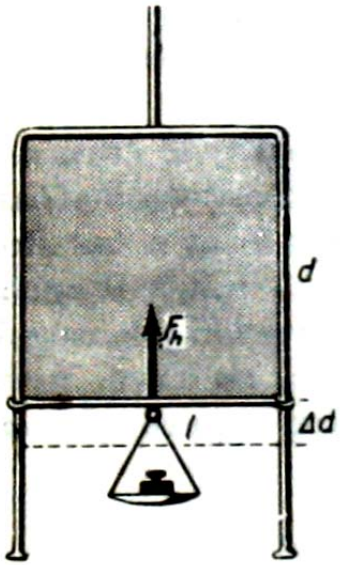


felületi feszültség, kapillaritás :

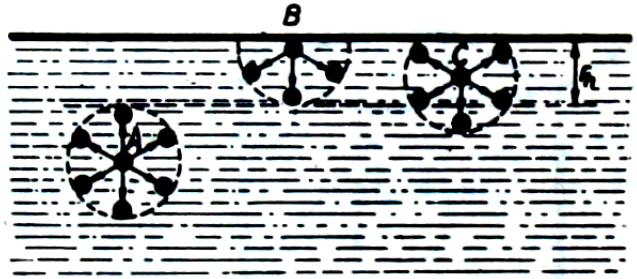
ld. oktatófilm



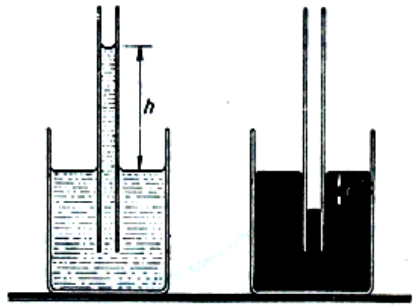
felületi fesz.:



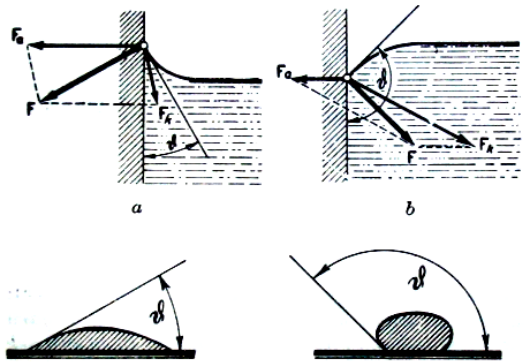
felület:



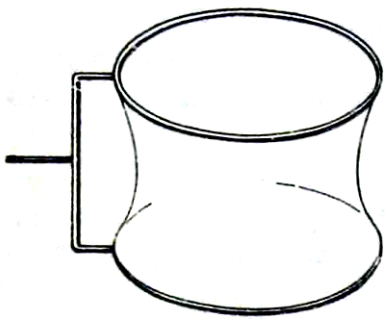
kapilláris emelkedés:

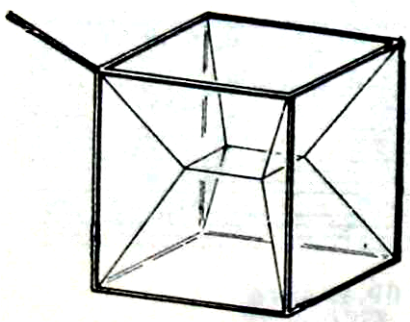


illeszkedési szög:

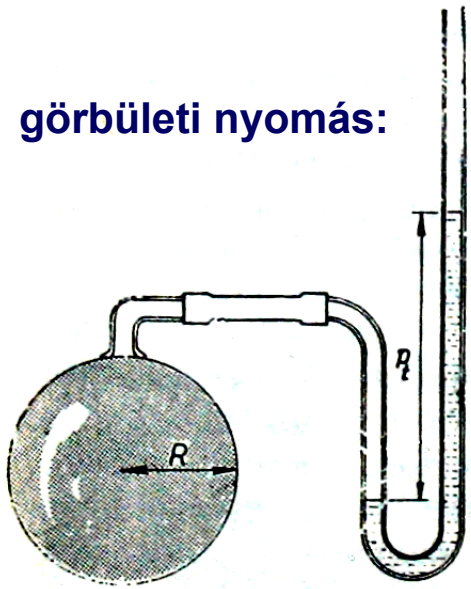


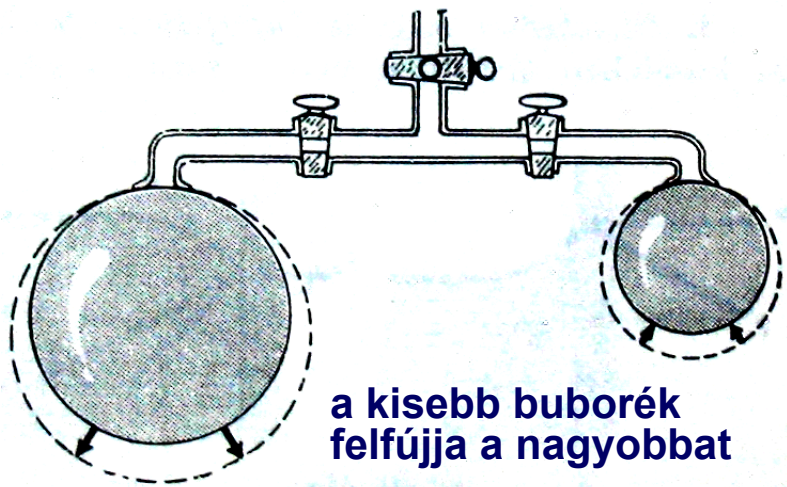
minimális felületek:



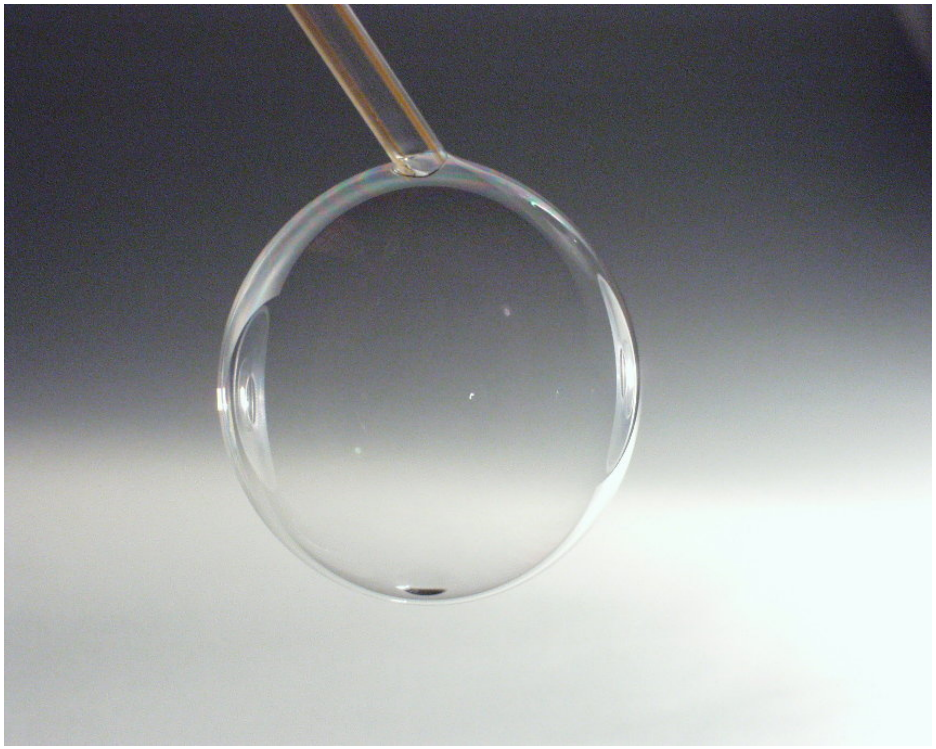


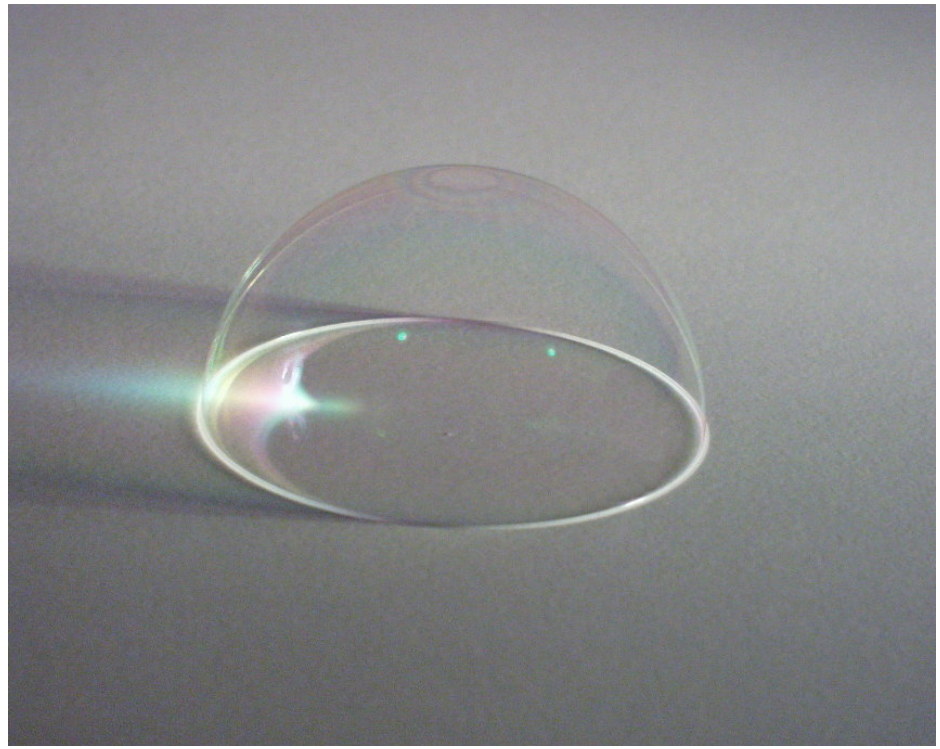
görbületi nyomás:





a kisebb buborék felfújja a nagyobbat





hajszálcsövesség →
- **ceruzát ki lehet radírozni, tollat nem lehet**
- **ruha, papír,… felissza a vizet**
- **talajnedvesség**

golyóstoll, grafitceruza, filctoll

Tetra Pak

nyugvó gázok mechanikája :

nincs szabad felszín, összenyomható, sűrűsége sokkal kisebb mint a foly.-é (pl. levegő ~1.2-1.3 kg/m^3)

DE : a folyadékoknál megismert törv.-ek nagyrészt érvényesek

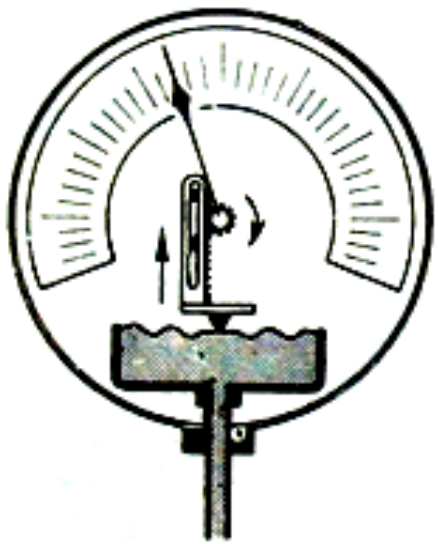
- **Pascal-törv.**

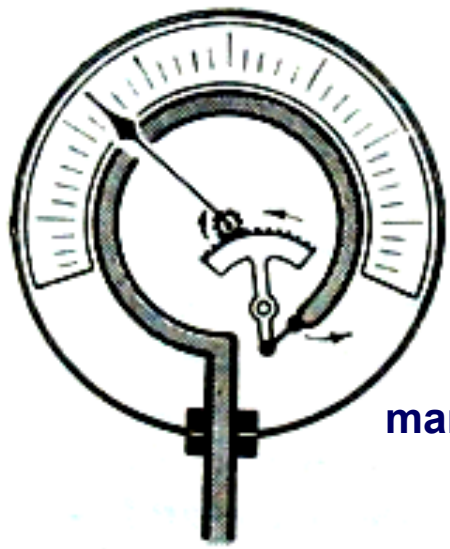
- **van légnyomás (Torrichelli, 1643 : 1m hosszú üvegcső színültig töltve Hg-al és fejjel lefele Hg-al teli edénybe tenni, kb 76 cm magas Hg-oszlop marad a csőben) (később Otto von Guericke, 1654 : „Magdeburgi féltekék” = 42 cm átmérőjű félgömbök + 4-4 ló → nem bírták széthúzni)**

kísérlet : Magdeburgi féltekék
pezsgősüveg + celofánhártya

- **felhajtóerő (Arkhimédesz)**

légnyomás mérése:
barométer





manométer

gázok nyomása és térfogata közötti összefüggés : Boyle-Mariotte-törv. :

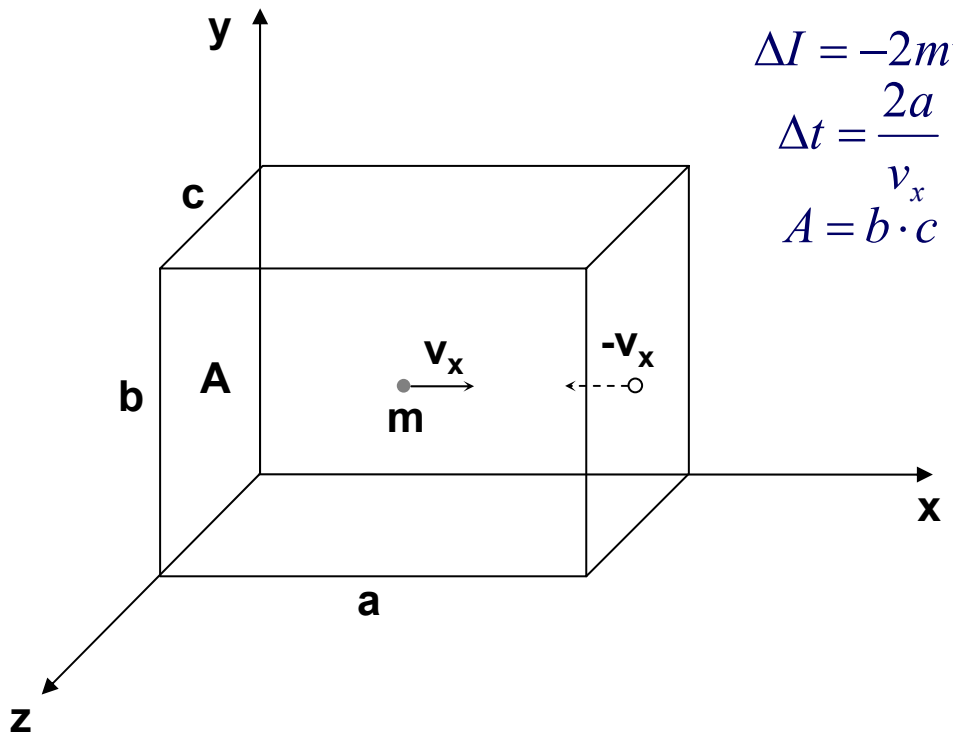
(1662)

állandó hőmérsékleten, állandó tömegű gázra : $p \cdot V = \text{állandó}$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$\frac{p}{\rho} \text{ is állandó}$$

molekuláris magyarázat :



$$\left.\begin{aligned} \Delta I &= -2mv_x \\ \Delta t &= \frac{2a}{v_x} \\ A &= b \cdot c \end{aligned}\right\} \quad F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{-2mv_x}{\frac{2a}{v_x}} = -\frac{mv_x^2}{a}$$

$$p = \frac{F}{A} = \frac{mv_x^2}{a \cdot A} = \frac{mv_x^2}{a \cdot b \cdot c} = \frac{mv_x^2}{V}$$

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$$

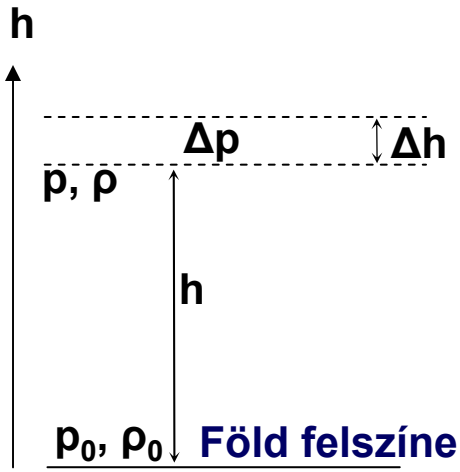
$$p = \frac{1}{3}\frac{mv^2}{V} \cdot N$$

$$p \cdot V = \frac{1}{3} N \cdot mv^2 = Boyle - Mariotte$$

légnyomás :

$$p = 760 \cdot 10^{-3}\, m \cdot 13{,}6 \cdot 10^{3}\, \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} = 1{,}013 \cdot 10^{5}\, Pa$$

barometrikus magasságformula :
(a légnyomás magasságfüggése)



$$\left.\begin{array}{l} \Delta p = -\rho \cdot g \cdot \Delta h \\ \Delta h \to 0 \end{array}\right\} \quad dp = -\rho \cdot g \cdot dh \qquad \textbf{de :} \qquad \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p}{\rho}$$

$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot p \cdot g \cdot dh$$

$$\frac{1}{p} \cdot dp = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dh$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{1}{p} \cdot dp = \int_{0}^{h} -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dh$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{1}{p} \cdot dp = \left[\ln p\right]_{p_0}^{p} = \ln p - \ln p_0 = \ln \frac{p}{p_0}$$

$$\int_{0}^{h} -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dh = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot \int_{0}^{h} dh = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot \left[h\right]_{0}^{h} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h$$

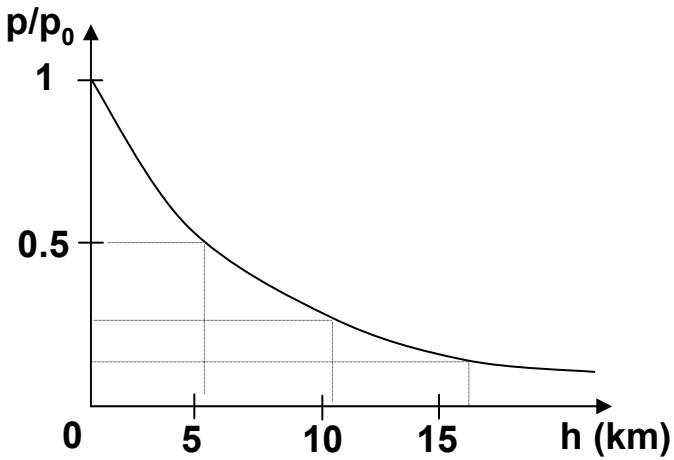
$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0}\cdot g\cdot h \quad \rightarrow \quad \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{\rho_0}{p_0}\cdot g\cdot h} \quad \rightarrow \quad p = p_0\cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0}\cdot g\cdot h}$$

Boltzmann-féle eloszlás

$$p = p_0\cdot e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$$

barometrikus magasságformula

pl. **tengerszinten a légnyomás** **1 atm = 10^5Pa**
5.5 km magasan **0.5 atm**
11 km **0.25 atm**

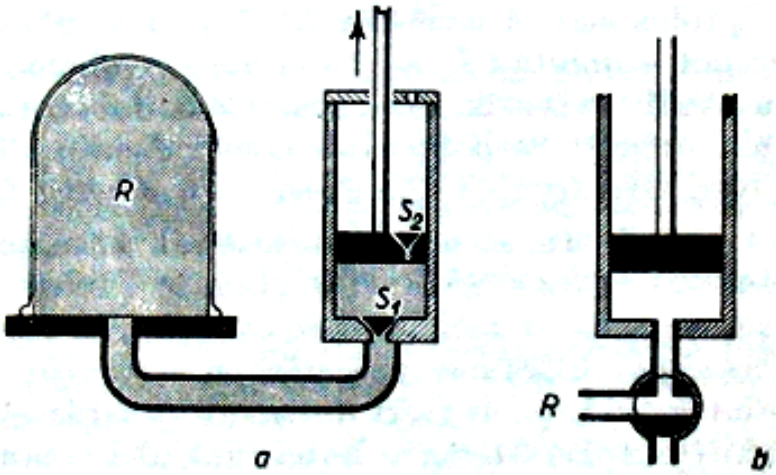


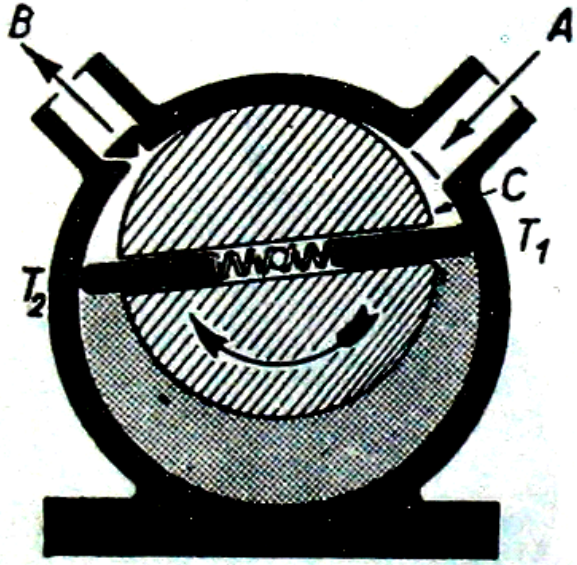
***kémény huzat*: kívül hideg levegő, belül meleg → kisebb a sűrűsége a kéményben**
alul mint a kéményen kívül lent → a levegő lent kívülről befelé áramlik

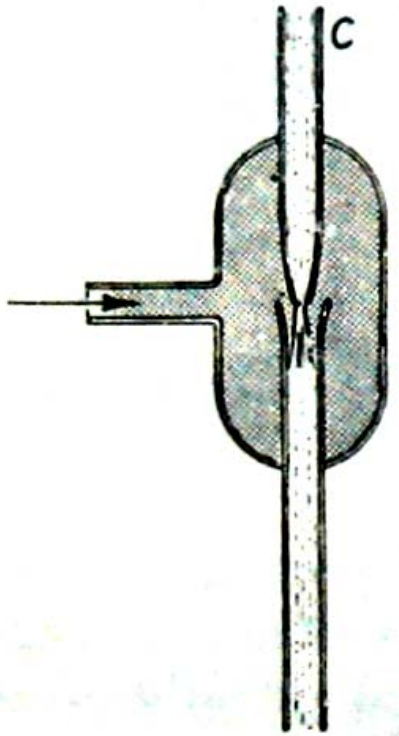
hőlégballon
gázzal töltött léggömb, léghajó; ***H_2 v. He (gyúlékony / drága)***

vákuumszivattyúk, kompresszorok :

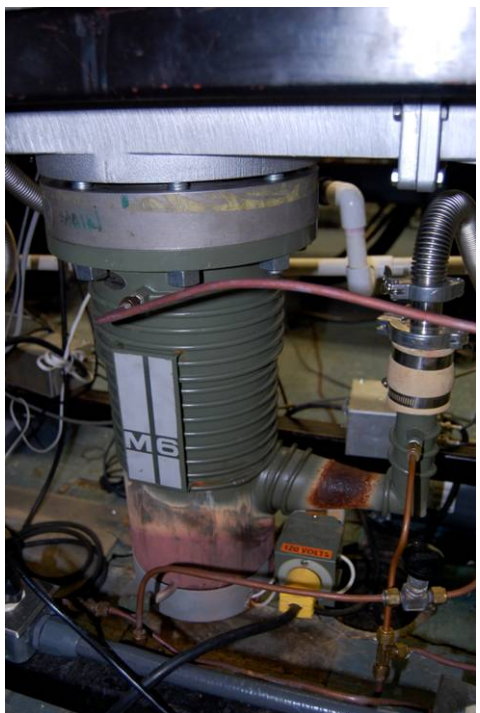
vákuum ≈ 10^3-10^2 Pa alatt, HV, UHV





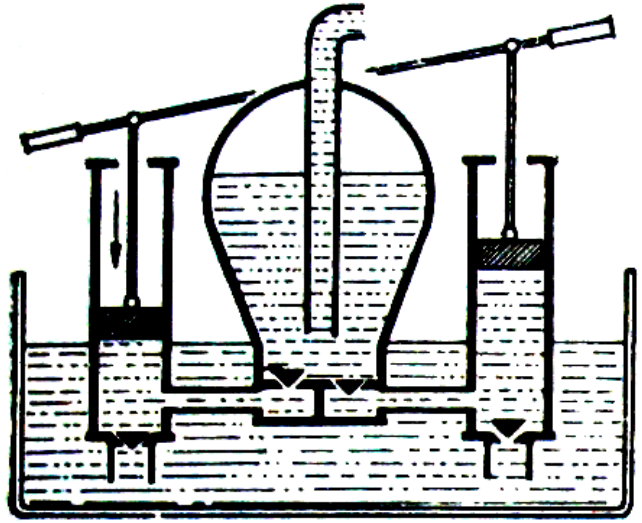


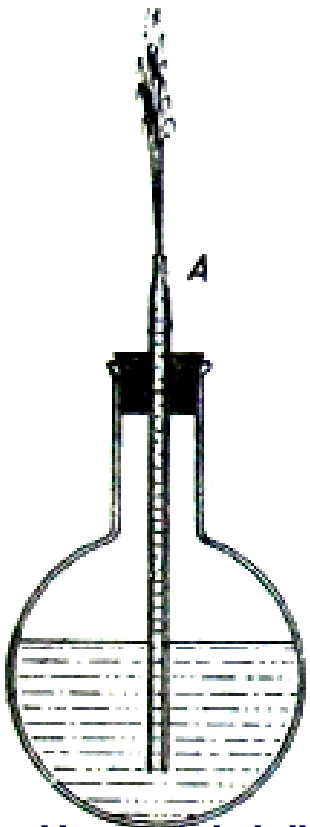
+ olajdiffúziós szivattyúk, turbomolekulár…, iongetter, stb…
kompresszorok….



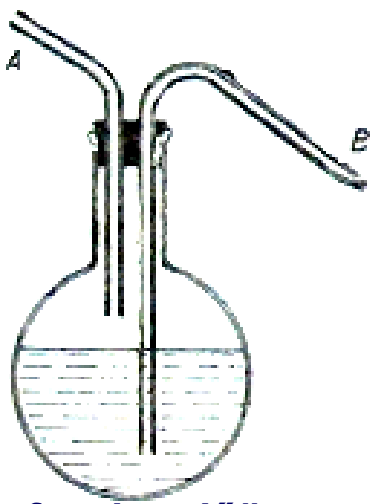
a levegő nyomásán alapuló eszközök:

szívókút, nyomókút, tűzoltófecskendő, centrifugálszivattyú, lopó, pipetta, szívószál, szivornya, injekciós fecskendő

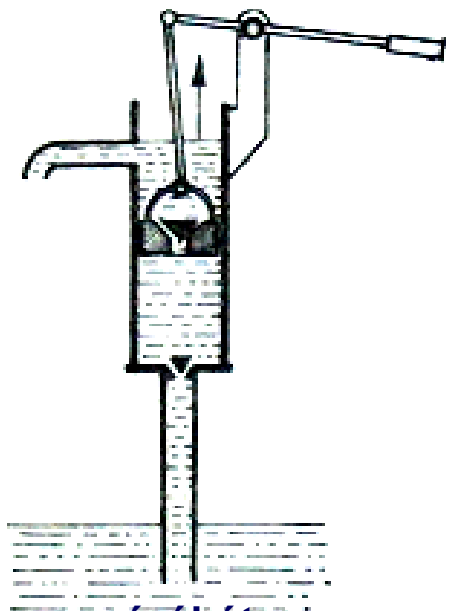




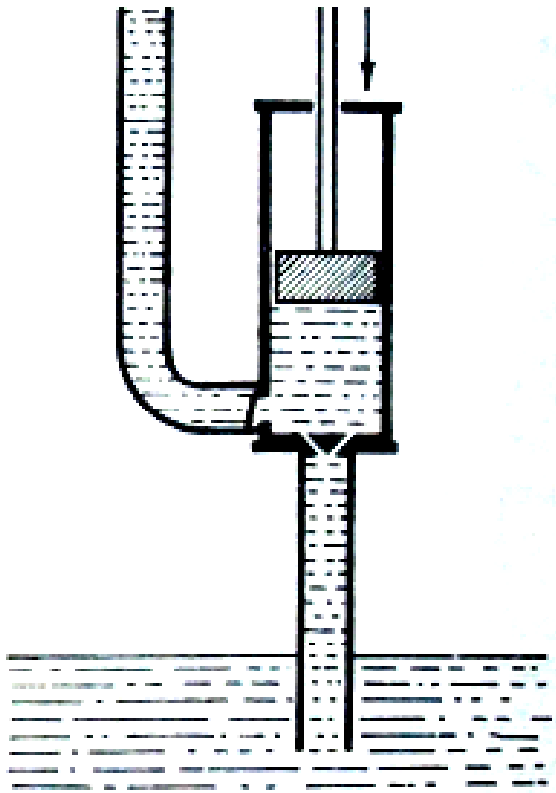
„Heron-labda”



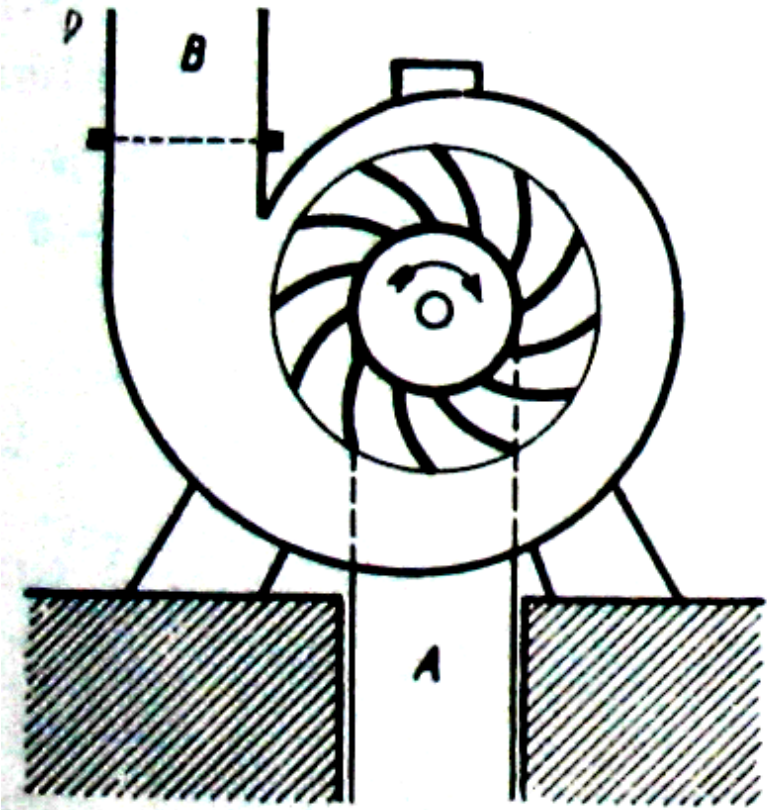
fecskendőüveg



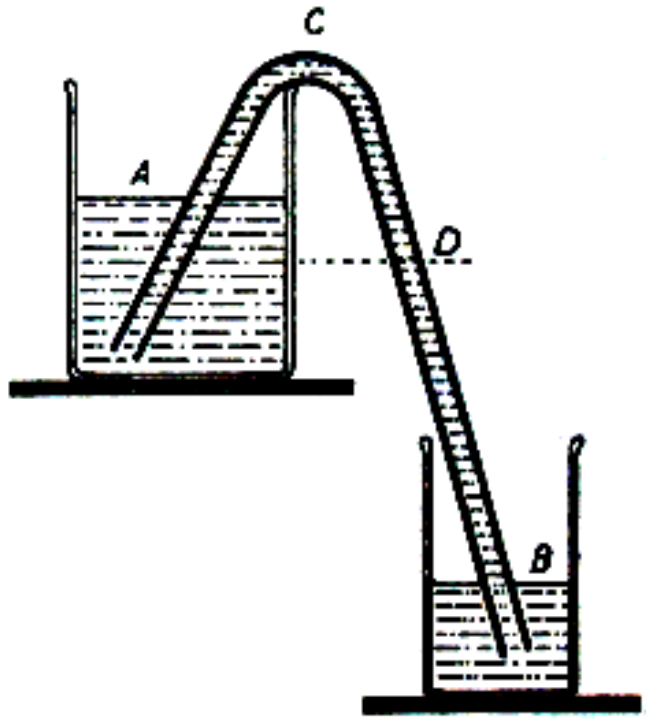
szívókút
max 10m mélyről!



nyomókút



centrifugálszivattyú



lélegzés is !!!

folyadékok és gázok áramlása :

együtt tárgyalható, mert kis áramlási sebességeknél (~ 10 m/s alatt) és kis magasság-különbségek (néhány 100 m) esetén a gázokat is összenyomhatatlannak lehet venni

áramlási tér (sebességtér) : $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) = \vec{v}(\vec{r}, t)$ adott minden pontban

áramvonal : azon görbék melyek érintői a tér minden pontjában az ottani sebesség irányába esnek

áramcső : az áramlási térben felvett zárt görbén átmenő áramvonalak

az áramlási csőben a foly. úgy áramlik, mit merev falú csőben (mert nincsenek a cső falára merőleges komponensek)

$$p = p(x, y, z, t) = p(\vec{r}, t)$$
$$\rho = \rho(x, y, z, t) = \rho(\vec{r}, t)$$

is hely- és időfüggő

ha ρ = const. → egyszerűbb leírás

külső erők (grav.erő), és/vagy nyomáskülönbségek → áramlás

de : belső súrlódás !

pl. : légáramlás = szél keletkezése, porszívó, ventillátor

pl. : folyadék áramlása : pl vízcső, …

áramlás → ideális folyadék (nincs belső súrl.) → örvénymentes, örvényes
áramlás → súrlódásos folyadékok → réteges, turbulens

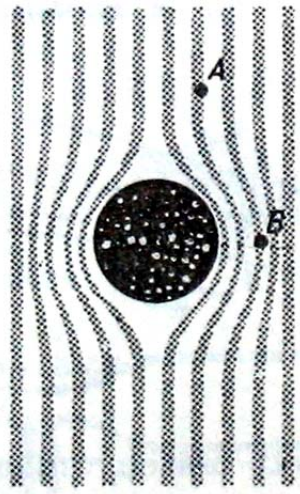
vagy :

áramlás → stacionárius (időtől független)
áramlás → időben változó áramlás

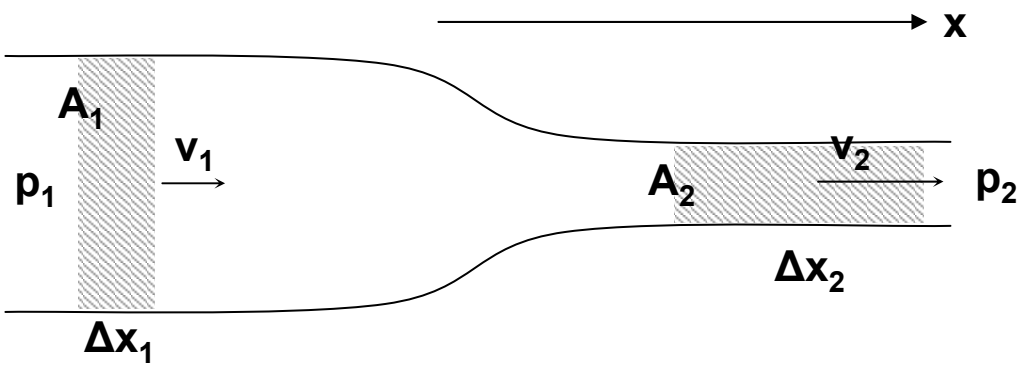
összenyomhatatlan, homogén folyadékok stacionárius áramlása:

kontinuitási egyenlet : $A \cdot v = \text{állandó}$ vagy $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$

(áramvonalak sűrűségével :
ahol az áramvonalak sűrűbbek, ott v nagyobb)



pl. : vízcsapból lefelé kifolyó vízsugár miért keskenyedik ?



$$V_1 = V_2$$

$$A_1 \cdot \Delta x_1 = A_2 \cdot \Delta x_2$$

$$A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$$

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

vagy az árammal : $I = \frac{V}{\Delta t} = \frac{A \cdot \Delta x}{\Delta t} = A \cdot v$ → $I = \text{állandó}$

a Bernoulli-egyenlet : (1738)

munkatétel : $$F_1 \cdot \Delta x_1 - F_2 \cdot \Delta x_2 = \frac{1}{2} m \cdot v_2^{\,2} - \frac{1}{2} m \cdot v_1^{\,2}$$

$$p_1 \underbrace{A_1 \cdot \Delta x_1}_{V} - p_2 \underbrace{A_2 \cdot \Delta x_2}_{V} = \frac{1}{2} \rho V \cdot v_2^{\,2} - \frac{1}{2} \rho V \cdot v_1^{\,2}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^{\,2} - \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^{\,2}$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^{\,2} = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^{\,2}$$

$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{állandó} \longleftarrow$$ **vízszintes csőben áramló folyadékra**

ha nem vízszintes, akkor hidrosztatikai nyomás tag is van :

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{állandó}$$

vagy

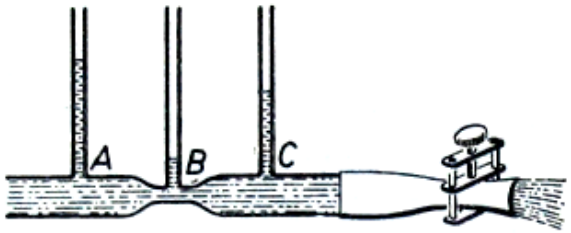
$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^{\,2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^{\,2} + \rho g h_2$$

sztatikai nyomás — **torlónyomás/dinamikai nyomás**

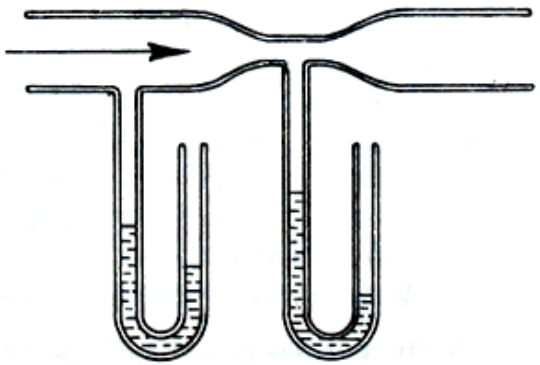
teljes nyomás

hidrosztat.nyomás (gázoknál elhanyagolható)

a Bernoulli-egy. alkalmazásai:

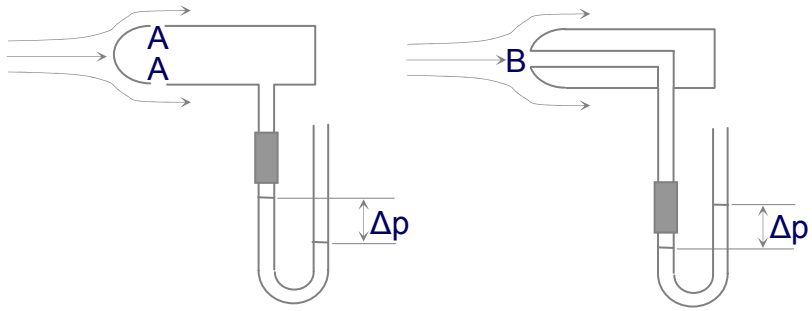


76,1. ábra



- ***nyomás-és sebességmérés áramlásoknál***

Pitot-cső



a p sztatikai nyomást méri A-ban

a v = 0-hoz tartozó p_0 teljes nyomást méri B-ben

Pitot-Prandtl cső :
a p_0-p torlónyomást méri :

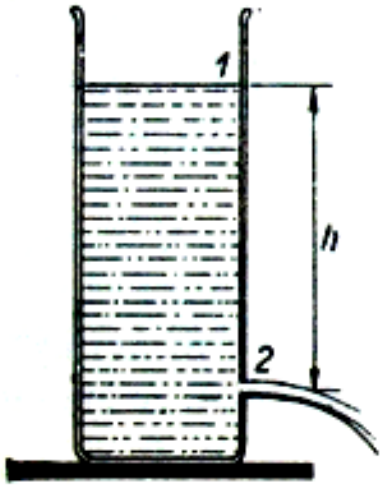
$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2$$

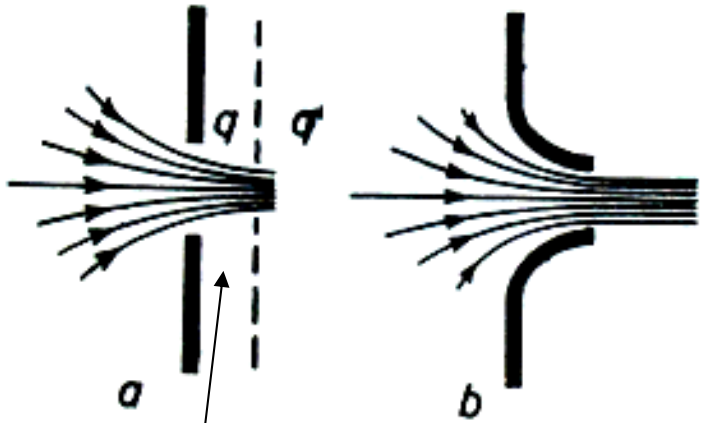
áramlás seb. mérhető (pl. repülőgép) :

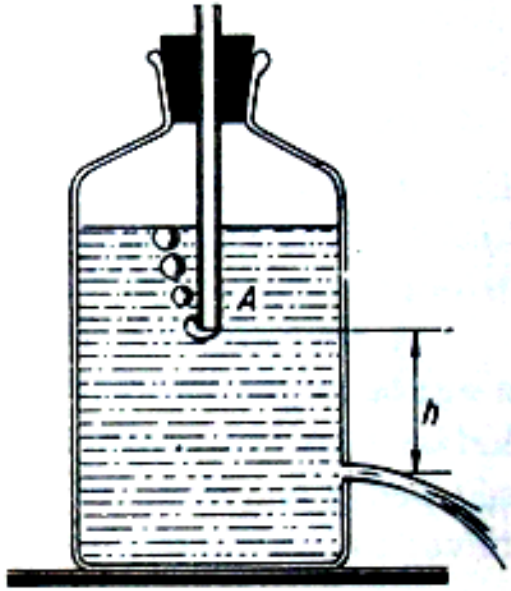
$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}$$

Venturi-cső is hasonló

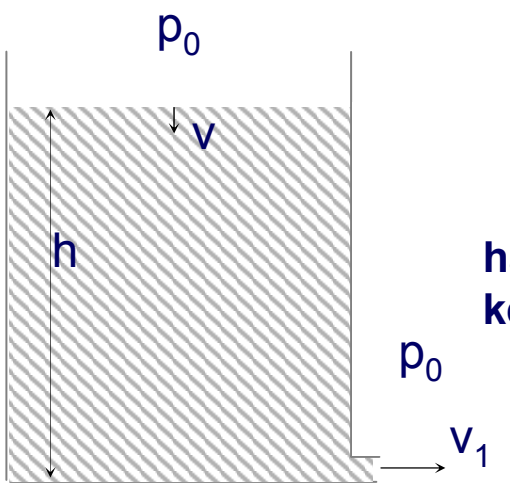
- ***foly. és gázok kiáramlása kis nyílásokon :***







Mariotte-palack



ha a foly. süllyedő felszíne sokkal nagyobb, mint a kiömlő nyílás keresztmetszete → $v \ll v_1$ → $v \approx 0$ – nak vehető

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

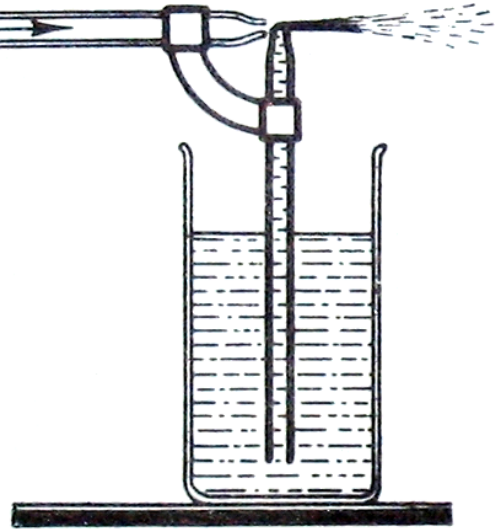
<u>Torrichelli-féle kiömlési törv</u>. (1646)
(levezetést ld. a gyakorlaton !)

de ha ilyen a keresztmetszet → a kiömlő nyílás valódi q' keresztmetszete < q → kevesebb folyadék áramlik ki

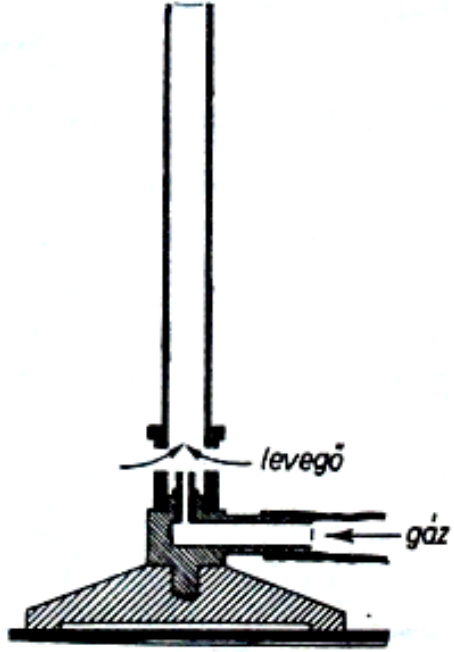
DE : v_1 nem csökken h csökkenésével a Mariotte-féle palackban

• *további alkalmazások :*

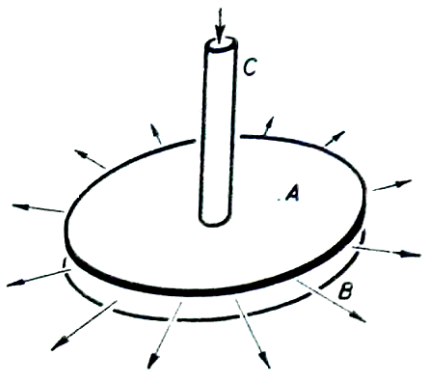
kísérlet : festékszóró,
folyadékpermetező



Bunsen-égő
vízlégszivattyú



kísérlet : aerodinamikai paradoxonok :



ping-pong labda a tölcsérben → nem esik le

papírlapok közé fújni → egymás felé mozd.

ping-pong labdák közé fújni → pattognak

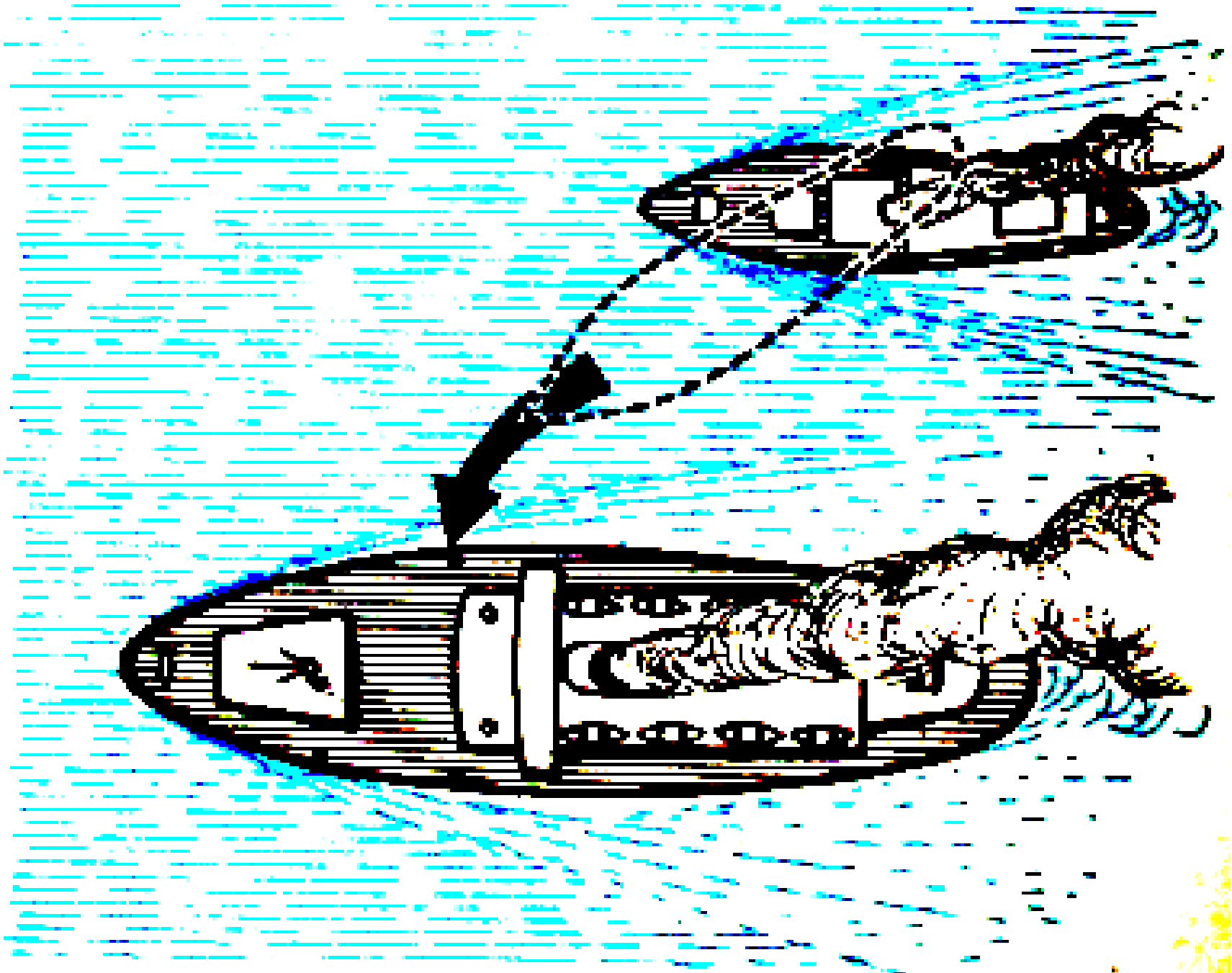
cső végén korong, alatta tömör korong, csőbe fújni → az alsó korong a felsőhöz nyomódik, visszapattan,…

a vihar „leszippantja” a háztetőt

szélben jobb a kémények huzatja

nagy széllel szemben nem kapunk levegőt

pl. : a kisebbik hajó nekiütközött a nagyobbnak



pl. : mozgócsöves szivattyú :

kép : Tasnádi….: Mechanika II. 137. old.

mozgó járművek folyadékfelvételére
(pl. mozdony vízfelvétel)

a Bernoulli-egy. a csőhöz
viszonyított koord.rdsz.-ben
(stacionárius áramlás !) :

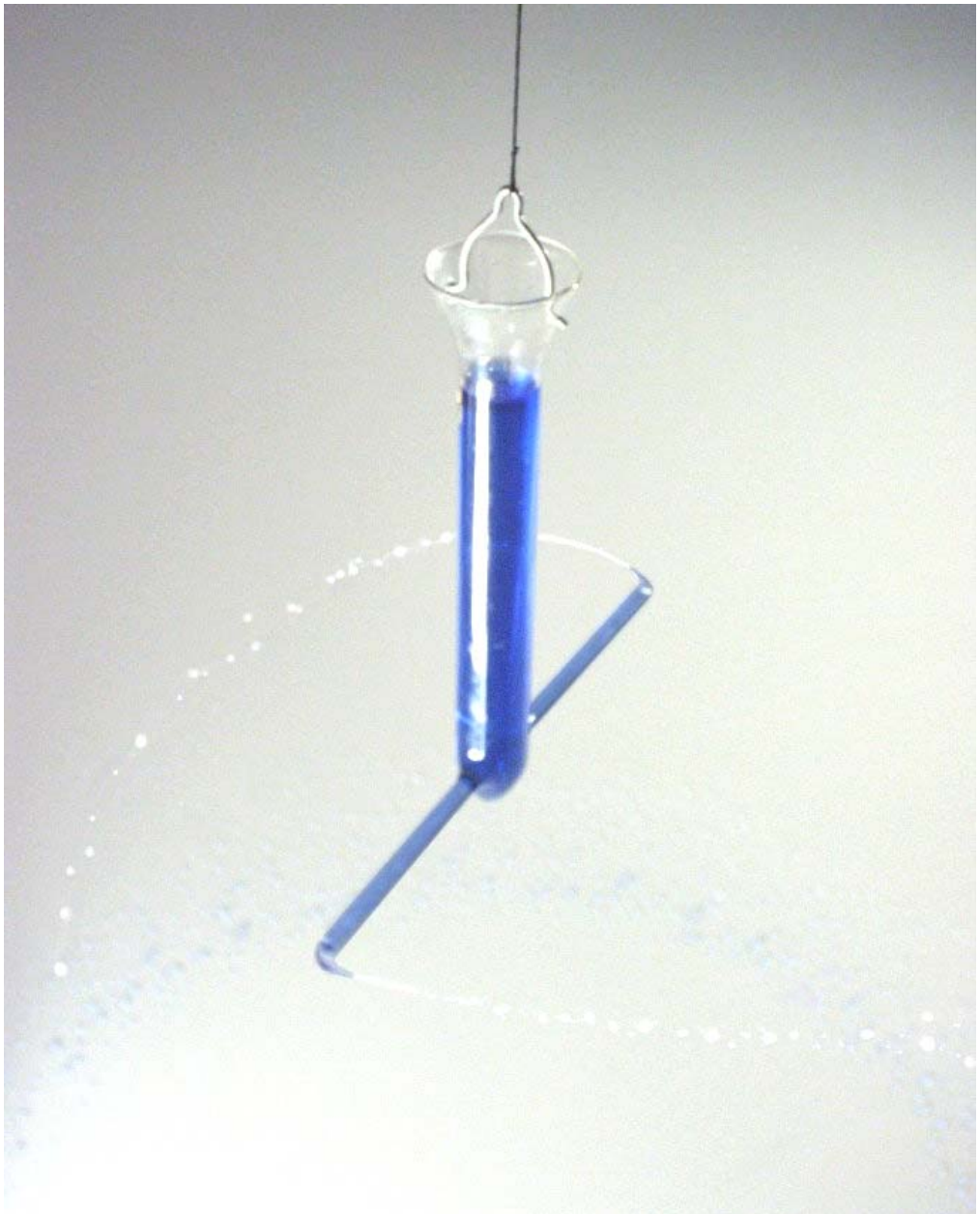
$$p_0 + \frac{1}{2}\rho \cdot (-u)^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \rho g h \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{u^2 - 2gh}$$

pl. : forgócsöves szivattyú :

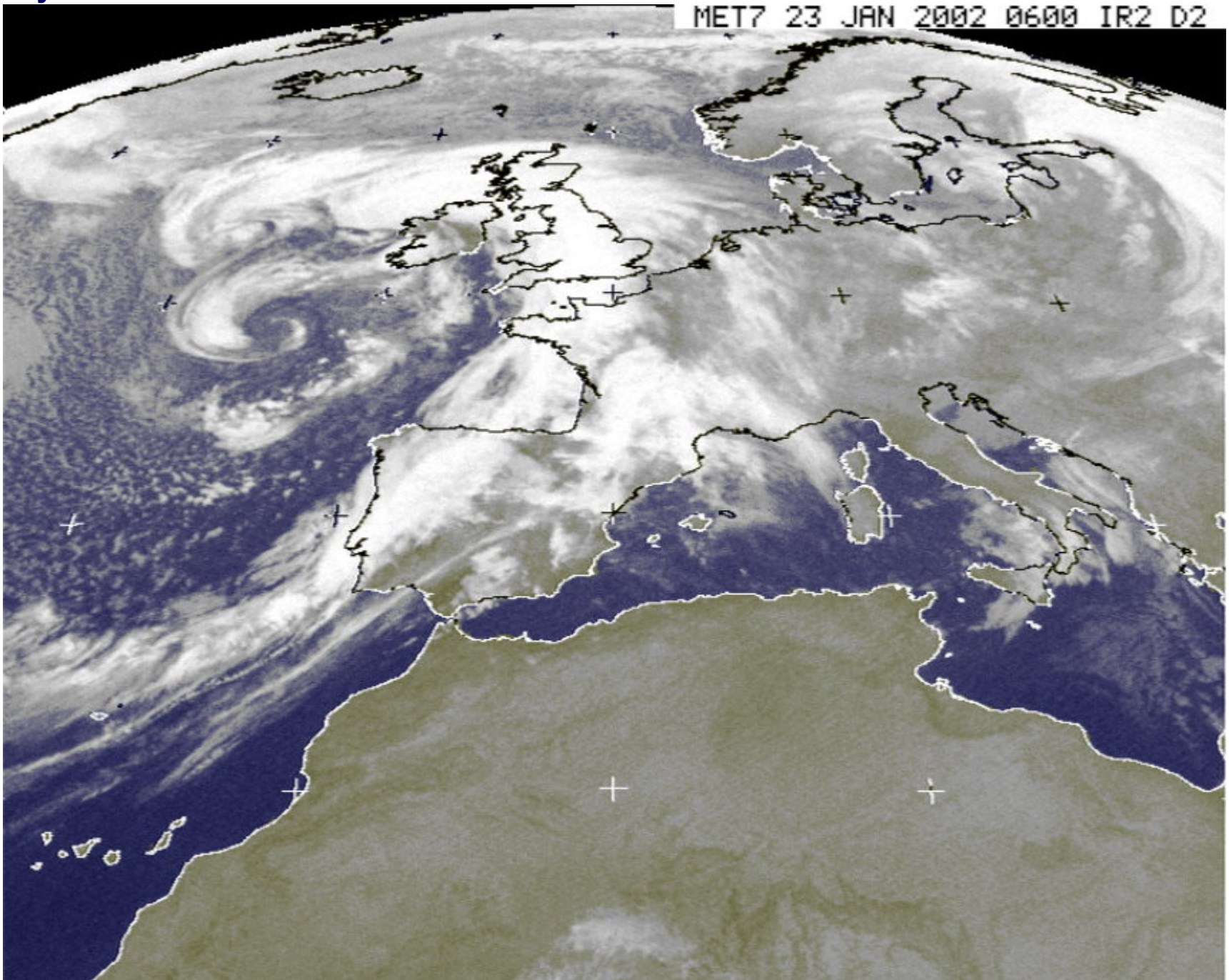
kép : Tasnádi….: Mechanika II. 138. old.

hasonló megfontolásokból $\rightarrow$ $v = \sqrt{r^2\omega^2 - 2gh_3}$

pl. : **kísérlet :** Segner-kerék :



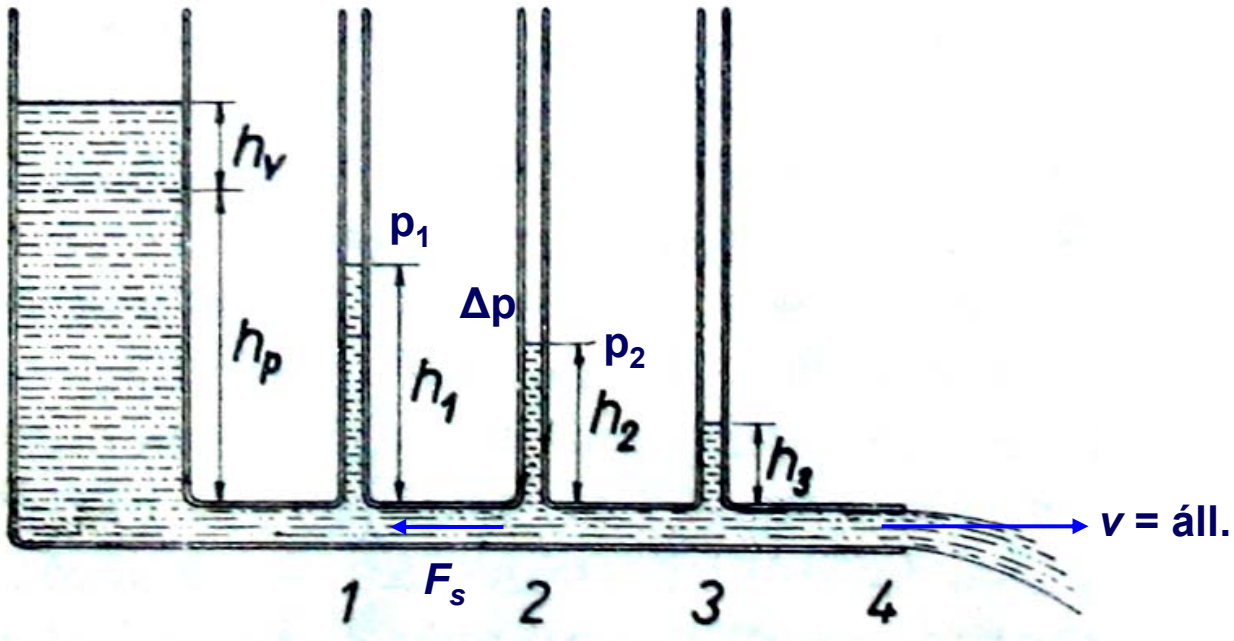
örvényes áramlás :



súrlódásos áramlás, belső súrlódás (viszkozitás) :

Kísérlet :

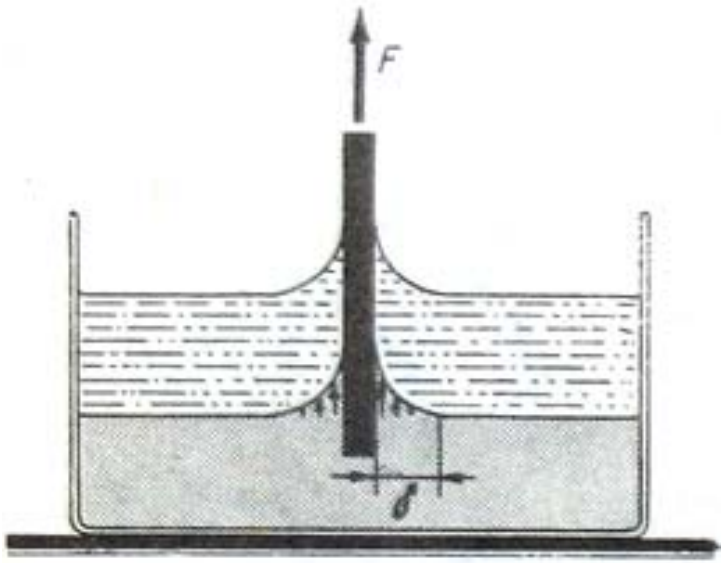
vékony, mindenhol egyforma keresztmetszetű, vsz. csőben áramló folyadék nyomása egyenletesen csökken (belső súrl. miatt) :



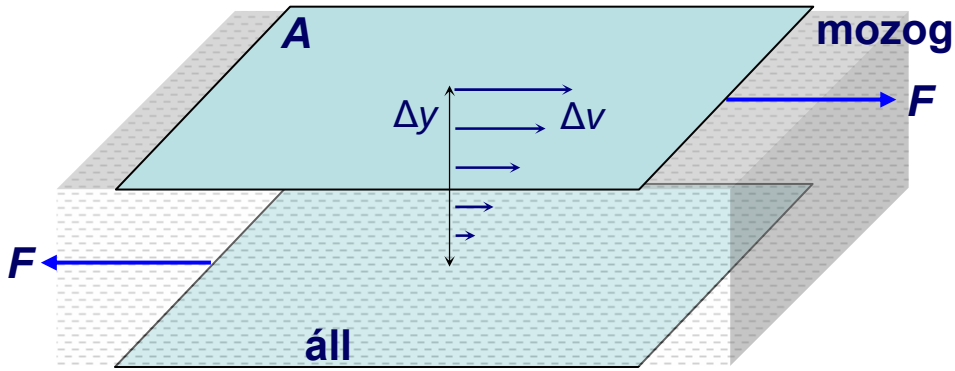
$$(p_1 - p_2)\cdot A - F_s = 0$$

belső súrl.

Newton-féle belsősúrlódási törv. :



réteges áramlás :



$$F = \eta A \frac{dv}{dy}$$

kis sebességű áramlás ellenállás-törv.-e

viszkozitás — η

seb.-gradiens — $\frac{dv}{dy}$

Kísérlet : kanalat kihúzni mézből

η **függ *T*-től (pl hideg méz – meleg méz, vagy szurok, stb…)**

amorf, hidegen is folyik nagyon lassan (évek alatt átfolyik a tölcséren)

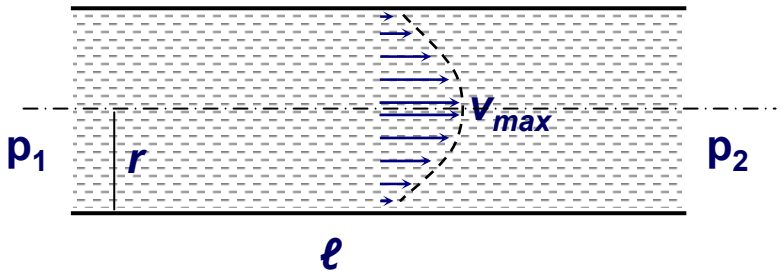
falba rögzített vsz. üvegrúd is lehajlik évek alatt

áramló folyadékban érintőleges feszültségek lépnek fel, DE : nem rugalmas feszültség !!!, hanem a sebességkülönbséget akarja kiegyenlíteni :

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dy}$$

folyadékok áramlása csőben :

a. parabolikus sebességprofil :



egy-egy folyadékréteg = vékony falú csövek egymásban
stacionárius áramlás → a rétegekre ható erők (a belül levő előre húzza, a külső szomszéd lassítja, és $(p_1-p_2)\cdot A$) eredője = 0 → levezethető a parabolikus profil

b. $\frac{V}{t} = ?$ → $I \equiv \frac{V}{t} = A \cdot v$

$F = (p_1 - p_2)\cdot A$ ← $A = r^2 \cdot \pi$

az adott sebességű áramlás fenntartásához $F = 8\pi\eta\ell v$ erő szükséges

$$I \equiv \frac{V}{t} = A \cdot v = A \cdot \frac{F}{8\pi\eta\ell} = A^2 \cdot \frac{p_1 - p_2}{8\pi\eta\ell} = r^4\pi^2 \cdot \frac{p_1 - p_2}{8\pi\eta\ell}$$

$$I \equiv \frac{V}{t} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\ell} \cdot r^4$$ ← **Hagen-Poiseuille-törvény**

$$I \equiv \frac{V}{t} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\ell} \cdot r^4$$ → pl.: öntözőberendezések

golyó mozgása folyadékban :

Stokes-törvénye : $F = -6\pi\eta r v$ → **közegellenállás**

viszkozitás mérése : **Ostwald-féle viszkoziméterrel**
Höppler-féle viszkoziméterrel
Stokes-törvénye alapján **leírásokat ld. mech.labor-ban**

pl. : Ostwald-féle viszkoziméter :

$p_1 - p_2 = \rho g h \equiv \rho g \ell$

$$V = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\ell} \cdot r^4 \cdot t = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\rho g \ell}{\ell} \cdot r^4 \cdot t = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\rho g}{\eta} \cdot r^4 \cdot t \rightarrow \eta = \underbrace{\frac{\pi \cdot r^4 \cdot g}{8V}} \cdot \rho \cdot t$$

műszerállandó (*k*)

$$\eta = k \cdot \rho \cdot t$$

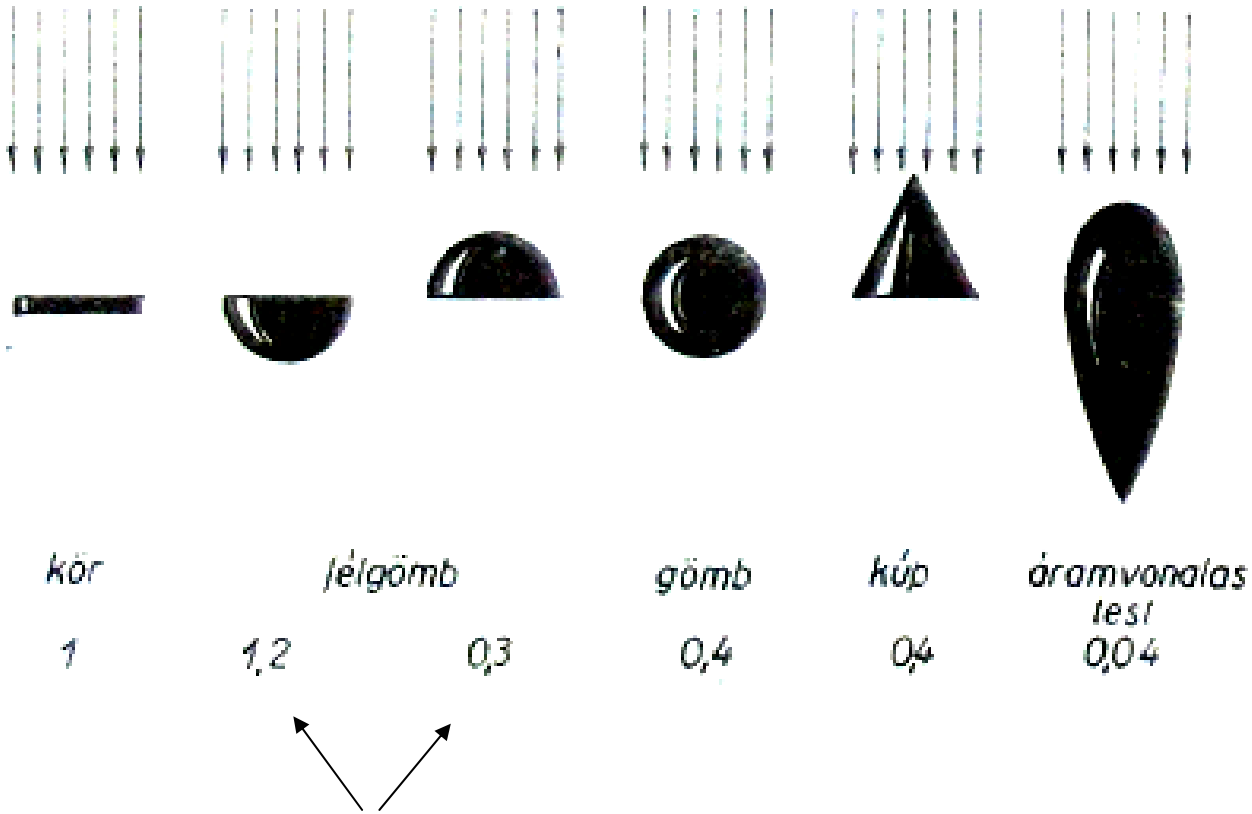
közegellenállás :

(áramlási ellenállás, hidrodinamikai ellenállás)

kis sebességekre (< m/s) : **lamináris áramlás; F_k lineárisan függ v – től : Stokes-törv.**
nagy sebességeknél (m/s-) : **örvényképződés; F_k a v^2 – től függ :**

$$F_k = cA\frac{1}{2}\rho v^2$$

alaktényező



pl. : hogyan célszerű hordót vinni tetőcsomagtartón ?

turbulens áramlás : áramlási sebesség növelésével a réteges áramlás átmegy turbulensbe → Reynolds-szám :

$$R_e = \frac{\rho r v}{\eta}$$

ha $R_e \geq 1160$ (kritikus érték) → az áramlás turbulens lesz

Hagen-Poiseuille-törv. érvényét veszti, az áramerősség lényegesen csökken, a cső ellenállása megnő

hidrodinamikai hasonlóság törvénye :

dinamikailag azonos áramlási viszonyok geometriailag hasonló testek körül akkor alakul ki, ha $R_{e,1} = R_{e,2}$ → pl. repülőgépek körüli áramlás úgy modellezhető egy 10x kisebb modellen, ha 10x olyan nagy az áramlási sebesség !

örvények keletkezése, határréteg :

két, laminárisan áramló folyadékáram találkozásakor (pl. 2 folyó egymásba ömlése, v. egy foly.sugár beáramlik nyugvó folyadékba) a súrl. miatt örvények keletkezhetnek : az elválasztó felület mentén a foly.-részecskék forgó mozgásba jönnek

örv.-k keletkeznek áramló foly.-ban nyugvó, v. nyugvó foly.-ban mozgó testek mögött is (pl. hídpillér mögött, kanalat mozgatunk levesben, de autó mögött a levegő is)

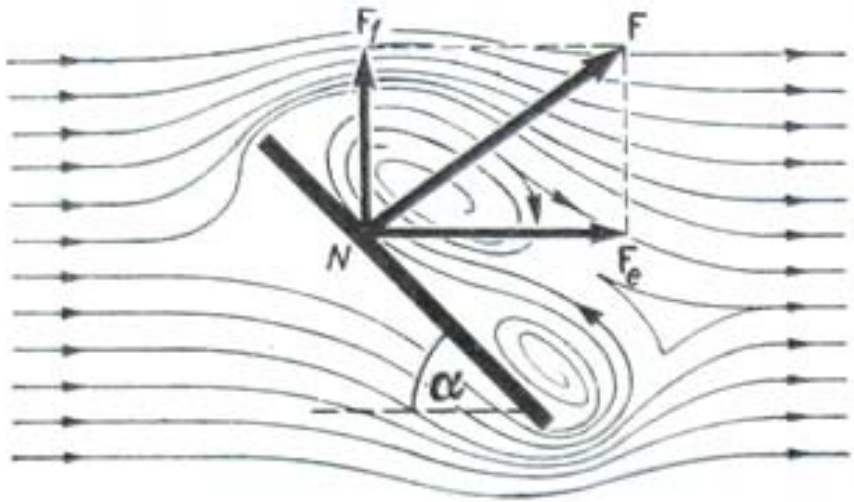
Kísérlet : Id. VIDEÓ-t is

kör alakú nyíláson nagy sebességgel áthaladó foly. v. gázban örvénygyűrűk keletkeznek, több méterre is eljuthatnak és elfújják a gyertyalángot → az örvények nagy stabilitásúak és „merevek” → folyókban veszélyes az úszók számára

határréteg : kis viszkozitású közegben (víz, levegő) mozgó test esetén a belső súrl.-t csak a szilárd test falai melletti rétegben (= határréteg) kell figyelembe venni
pl. : repülőgép szárnyai mellett a határréteg $1\ \text{cm} \leq \delta \leq 10\ \text{cm}$

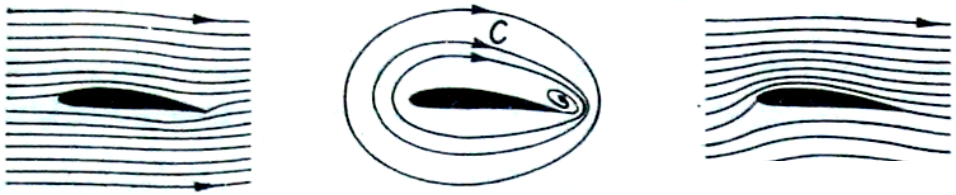
a dinamikai felhajtóerő :

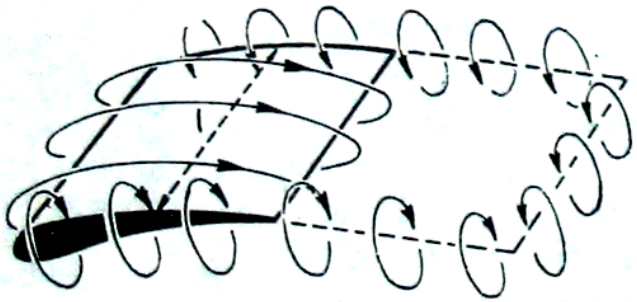
repülőgépszárny, ……

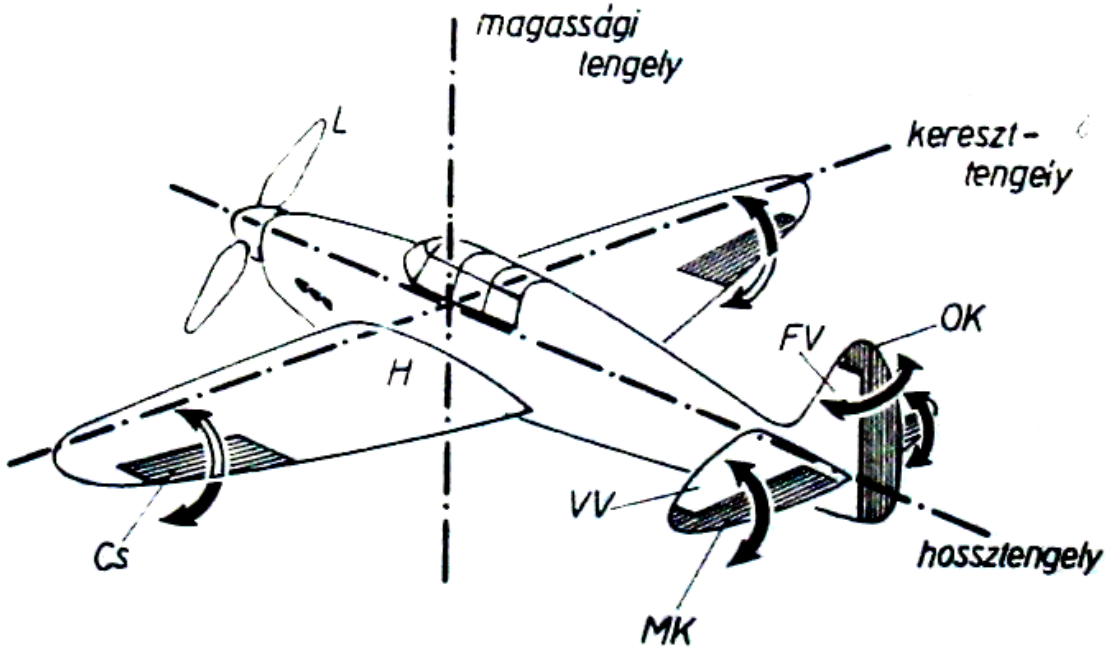


rotor profilja :

HOFLER

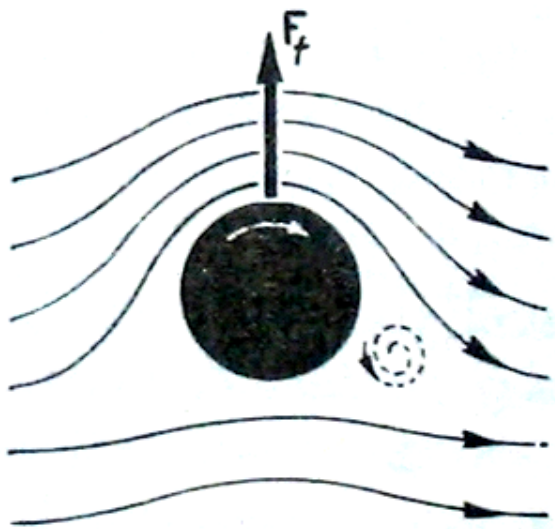






a Magnus-effektus (1853) :

közegben forogva haladó test „elkanyarodik”,
pl, szabadrúgás megkerüli a sorfalat, tenisz,
ping-pong labda megcsavarása



kísérlet :

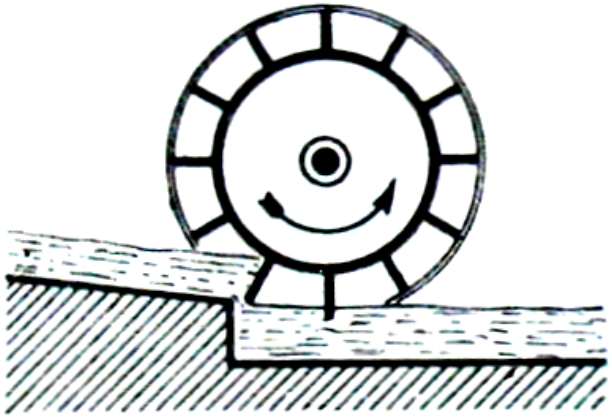
léggömböt megpörgetve elejtünk → nem függőlegesen esik le
ld. VIDEÓ-t is

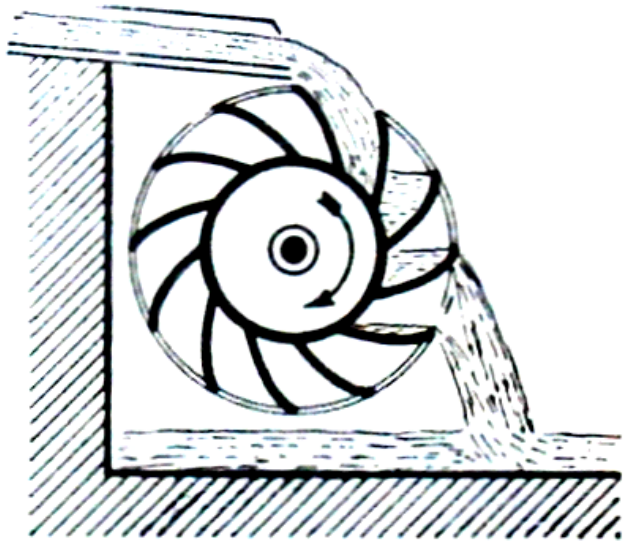
vízierőgépek :

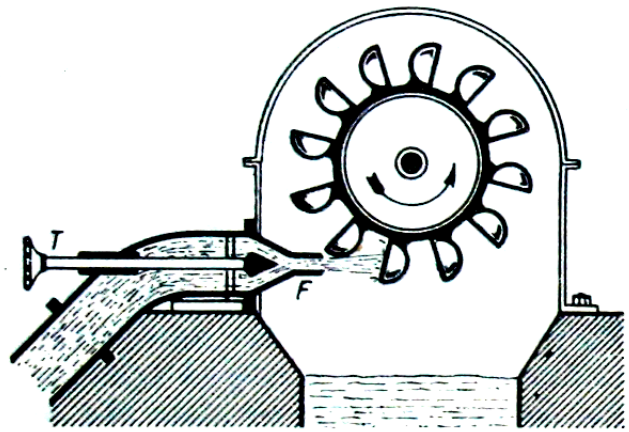
vizkerekek,
turbinák

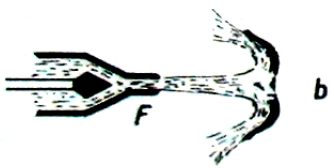
hatásfok

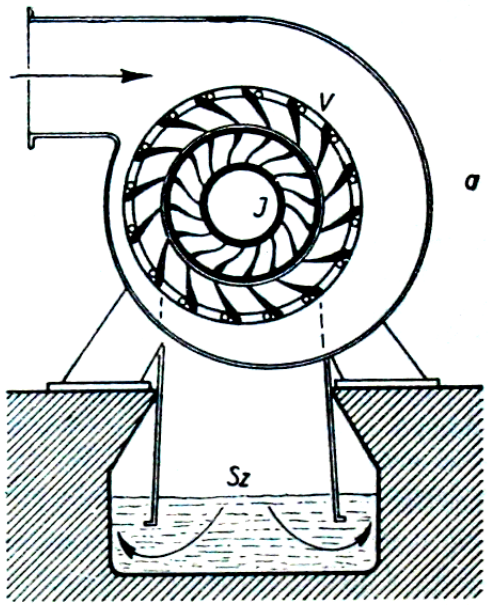
pl. túristvándi vizimalom :

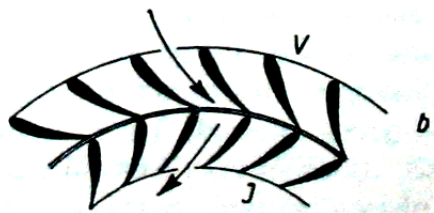


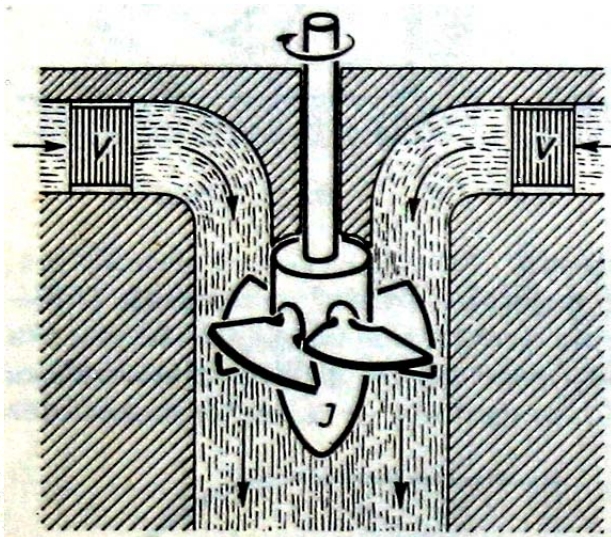












ELIN
ELIN
ESCHER-WYSS

Pelton-Turbine

Hersteller:	Escher Wyss, Ravensburg
Baujahr:	1950
Leistung:	31.000 kW / 41.600 PS
Fallhöhe:	845 m
Schluckvermögen:	4 m^3/s
Drehzahl:	500 U/min
Durchmesser:	2.760 mm
Gewicht:	6.880 kg
Betriebsstunden:	110.000 h
Erzeugte Energie:	2.480,000.000 kWh
Einsatzort:	Kraftwerk Kaprun-Hauptstufe

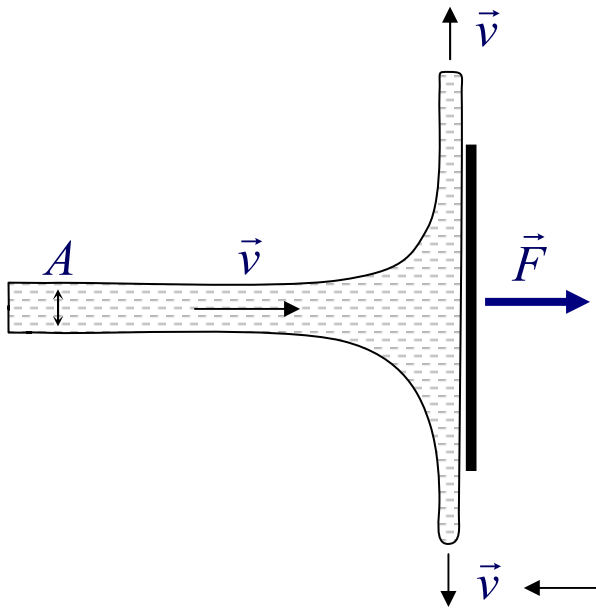
Francis-Turbine

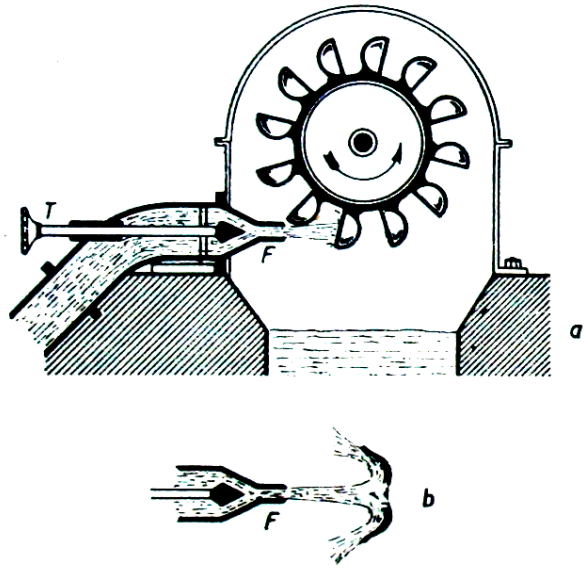
Hersteller:	J. M. Voith GmbH
Baujahr:	1957
Leistung:	31.000 kW / 42.000 PS
Füllhöhe:	142 m
Schluckvermögen:	27 m^3/s
Drehzahl:	375 U/min
Durchmesser:	2.265 mm
Gewicht:	5.850 kg
Betriebsstunden:	150.378 h
Erzeugte Energie:	3.200,000.000 kWh
Einsatzort:	Kraftwerk Schwarzach

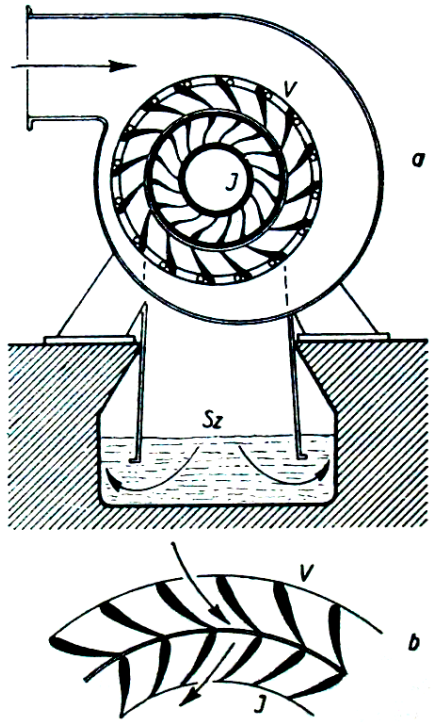
Verbund
Austrian Hydro Power

a turbina teljesítménye :

egy vsz.-en *v* sebességgel érkező, *A* keresztmetszetű vízsugár egy függ., nyugvó lapra erőhatást fejt ki :







(a gravitációtól eltekintünk)

$\vec{v}$ ← mindenhol ugyanakkora seb.-el áramlik, mert a nyomás mindenhol egyforma (Bernoulli-törv.)

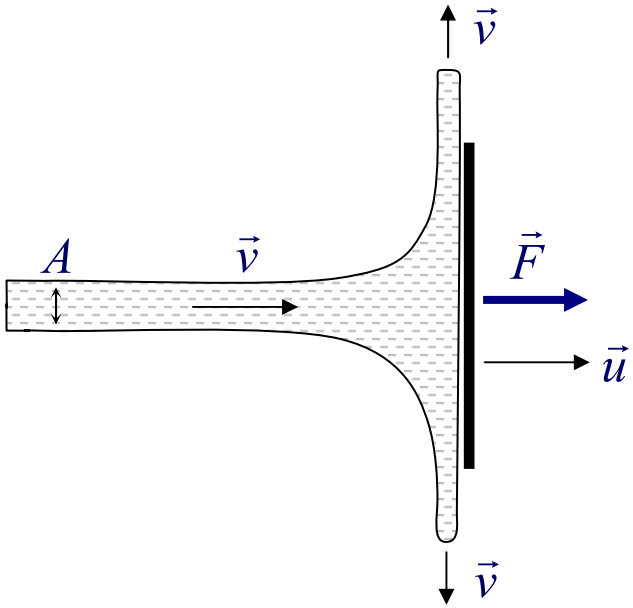
összenyomhatatlan → kontinuitási egy. is érv. → a lap mentén elfolyó össz-keresztmetszet is *A*

→ a lap miatt a folyadék a lapra merőleges sebességét veszíti el: $\left|\Delta\vec{v}\right| = v$

impulzustétel :

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{\Delta(\rho V)\cdot v}{\Delta t} = \frac{\Delta(\rho A v \Delta t)\cdot v}{\Delta t} = \rho A v^2$$

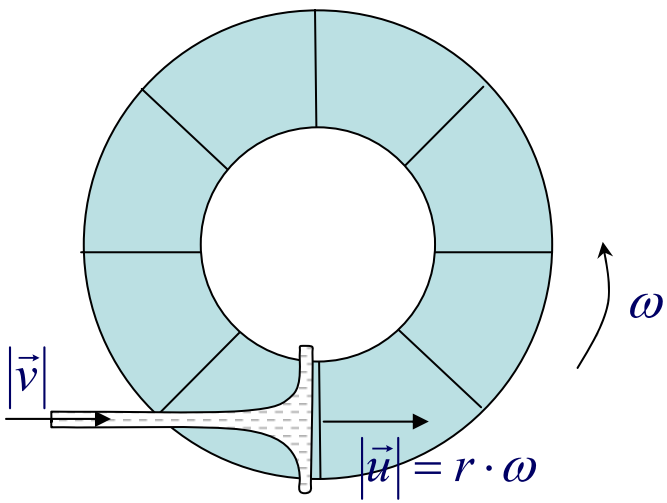
ha a lap vsz.-en *u* sebességgel mozog a folyadéksugárral egyező irányban :



a lappal együtt mozgó koord.rdsz.-ben az áramlás stacionárius ➡ az előző gondolatmenet érv., csak a foly.-sugár seb.-e *v-u* lesz a laphoz képest :

$$\left|\vec{F}\right| = \rho A (v-u)^2$$

forgó turbina esetén az *u* sebességgel mozgó lapát helyére mindig újabb érkezik ➡ a jelenség kvázistacionáriusnak vehető :



a kilépő vízsugár vsz. sebességkomponense megegyezik a lapátok *u* sebességével

a lapátoknak átadott impulzus, vagyis a rdsz.-re (= a teljes turbinára) időegység alatt kifejtett átlagos erő :

$$\overline{F} = \underbrace{\rho A v}_{\text{időegység alatt érkező víztömeg}} \cdot \underbrace{(v-u)}_{\text{sebességváltozás}}$$

pl. a Pelton-turbina esetén :

a vízsugár 180°-os eltérülést szenved

↓

álló lapát esetén $\Delta v = 2v$

↓

$$\overline{F} = 2\rho A v^2$$

u **seb.-el mozgó lapátok :**

$$\overline{F} = 2\rho A v \cdot (v - u)$$

↓

az átlagteljesítménye :

$$\overline{P} = \overline{F} \cdot u = 2\rho A v \cdot (v - u) \cdot u$$

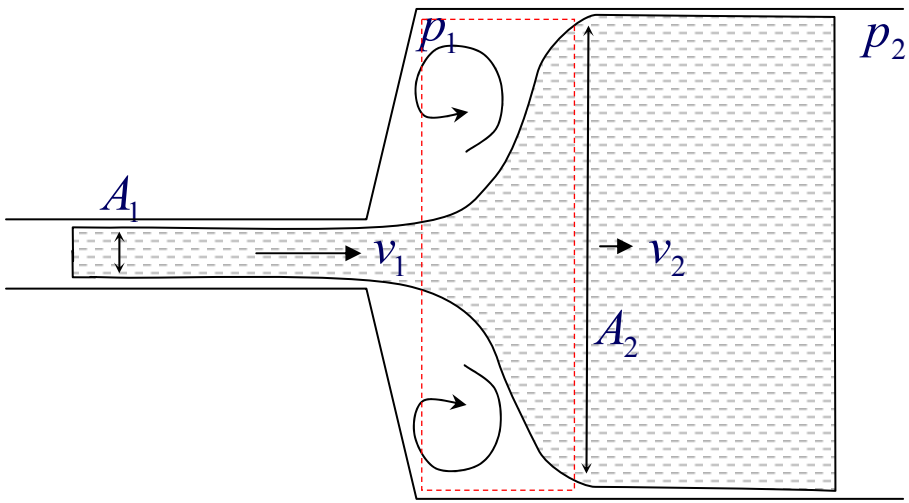
P maximuma : $\dfrac{d\overline{P}}{du} = 2\rho A v \cdot (v - 2u) = 0 \rightarrow u = \dfrac{v}{2}$ **ekkor a kilépő vízsugár seb.-e = 0, vagyis a víz az összes energiáját elveszíti a turbinán (a turbina átveszi)**

de : VESZTESÉGEK → hatásfok < 1 !!!

veszteségek áramló folyadékban :

változó keresztmetszetű cső → változó áramlási keresztmetszet

pl. hirtelen vastagabb cső → a belépő folyadéksugár csak fokozatosan bővül erre a keresztmetszetre → mögötte (mellette) örvények → nyomásveszteség lép fel :



örvények nélkül is leírható : az imp.-tétel a szaggatott vonal által közrefogott felületbe zárt folyadékra
(a felületbe időegység alatt bevitt imp. = a felületre ható eredő nyomóerővel **) :**

$$\rho A_2 v_2^{\,2} - \rho A_1 v_1^{\,2} = p_1 A_1 - p_2 A_2$$

+ a kont.egy. : $A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$\downarrow$$

$$(p_2 - p_1)_{reális} = \rho v_2 (v_1 - v_2)$$

$$\updownarrow$$

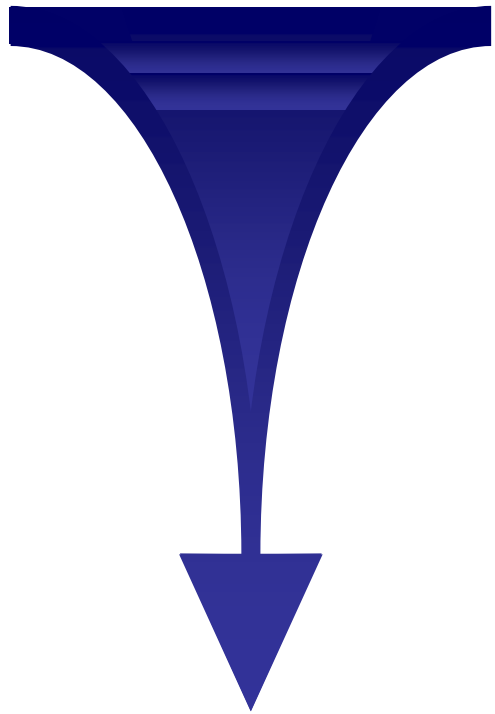
ideális foly.-ra a Bernoulli-egy. szerint $(p_2 - p_1)_{ideális} = \frac{1}{2}\rho\left(v_1^{\,2} - v_2^{\,2}\right)$ **lenne**

a bekövetkező többletnyomás-csökkenés = $\Delta p_{többlet} = (p_2 - p_1)_{id} - (p_2 - p_1)_{re} = \frac{1}{2}\rho(v_1 - v_2)^2$

= veszteség

hasonlóan hirtelen irányváltozásra is (pl. kis sugarú ív)

→ **egyenes, egyenletes vastagságú, minél vastagabb cső a jó**



CSILLAPÍTOTT REZGÉS, KÉNYSZERREZGÉS, REZONANCIA,

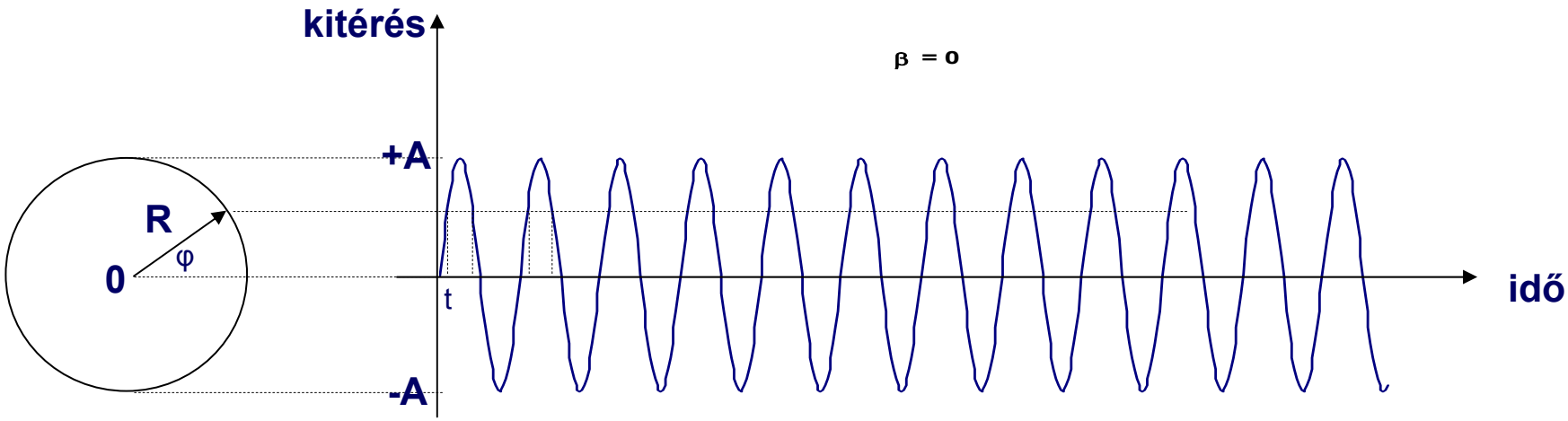
HULLÁMOK

harmonikus rezgések, fogalmak : ismétlés :

periodikus mozgás, harmonikus mozgás, kitérés, amplitúdó, fázis, kezdőfázis, frekvencia, periódusidő, körfrekvencia,

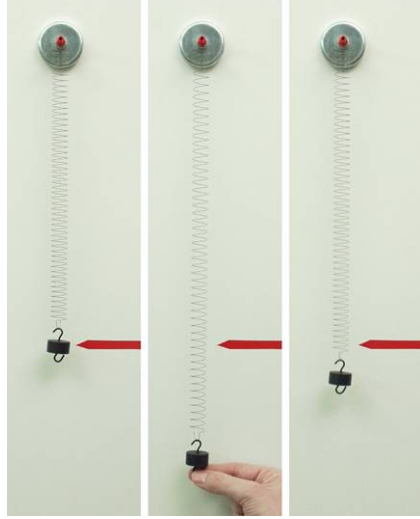
körmozgás és harmonikus rezgőmozgás kapcsolata :

Kísérlet : **harmonikus rezgőmozgás, Fizikai kísérletek 3. CD : 21′30″**



$$y = Y(t) = A \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} = A \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t = A \cdot \sin \omega t$$

így mozog pl a rúgón rezgő test :



rúgón rezgő test mozgásegyenlete :

F = -D·y

F = m·a

-D·y = m·a

y = y(t) a helykoordináta

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$-D \cdot y(t) = m \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

ez egy differenciálegyenlet

legyen y(t) = A·sinωt

$$\frac{dy}{dt} = A\omega \cos \omega t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t$$

ezeket visszahelyettesítve:

-D·A·sinωt = m·(-1)·A·ω²·sinωt

D = m·ω²

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

általánosan : **y(t) = A·sin(ωt+δ)**

rezgések összetétele :

párhuzamos rezgések összetétele :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}\right\} \quad x = x_1 + x_2$$

ha $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ → $x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

ahol

$$\begin{cases} A^2 = A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ tg\varphi = \dfrac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \end{cases}$$

speciálisan : ha $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ (azonos fázis) → $A = A_1 + A_2$

ha $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ (ellentétes fázis) → $A = A_1 - A_2$

ha $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$ → $A = A_1^{\,2} + A_1^{\,2}$

ha pl. $\varphi_1 = \pi/2$ és $\varphi_2 = 0$ → $tg\varphi = \dfrac{A_1}{A_2}$

és még $A_1 = A_2$ → $A = \sqrt{2} \cdot A$

ha $\omega_1 \neq \omega_2$ → legyen pl. $\varphi_1 = 0$ és $\varphi_2 = \varphi$

$x_1 = A_1 \cdot \sin\omega_1 t$

$x_2 = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi)$

$x = x_1 + x_2 = A_1 \cdot \sin\omega_1 t + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi)$

ha még $A_1 = A_2 = A$ és $\underbrace{|\omega_1 + \omega_2|}_{\text{gyors rezgés}} >> \underbrace{|\omega_1 - \omega_2|}_{\text{lassú rezgés}}$:

$$x = \underbrace{2A \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t - \frac{\varphi}{2}\right)}_{\text{az ampl. változik az időben !!! :}} \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$x = A(t) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

↓ lebegés

Kísérlet : lebegés hanghullámokkal (hangvillákkal)

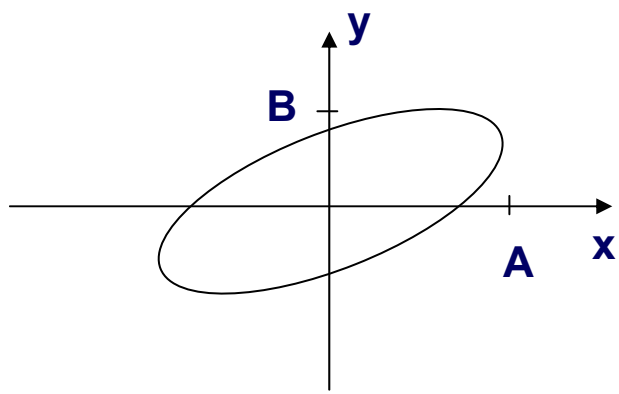
lebegés frekv.-ja: $f = f_1 - f_2$

merőleges rezgések összetétele :

$x = A \cdot \sin(\omega_1 t)$ **és** $y = B \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi)$

ha $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ➡ $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\frac{x \cdot y}{A \cdot B} \cdot \cos\varphi = \sin^2\varphi$

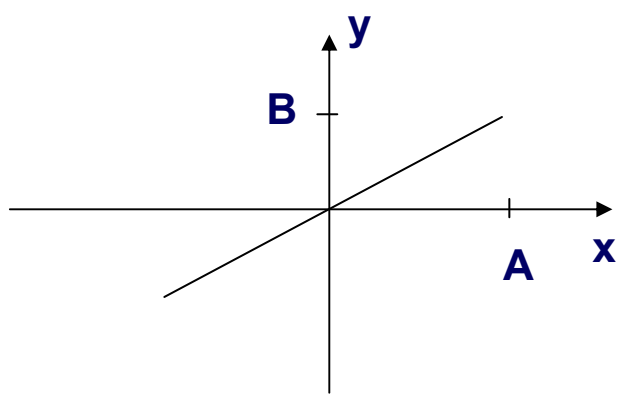
ez egy origó kp.-ú általános helyzetű ellipszis :



speciálisan : ha φ = 0 :

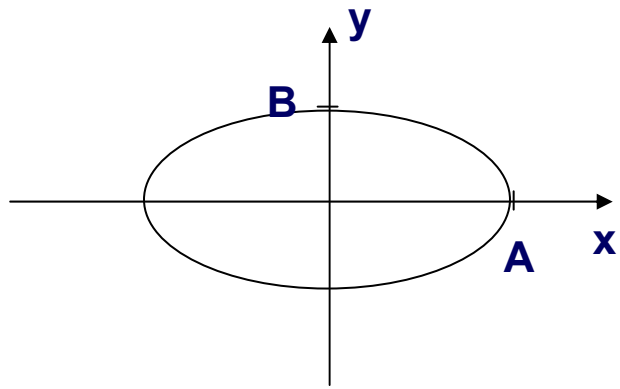
$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B}$$

lineárisan poláros rezgés



ha φ = π/2 :

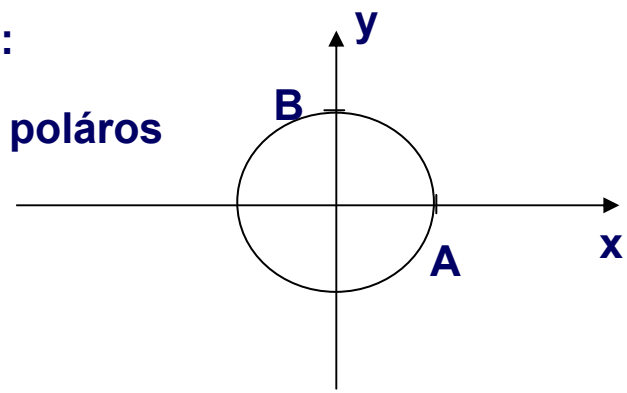
$$\frac{x^2}{A^2} = \frac{y^2}{B^2} = 1$$



elliptikusan poláros rezgés

ha még A = B :

cirkulárisan poláros rezgés



ha $\omega_1 \neq \omega_2$ → **Lissajous-görbék** → **Fizdemo**

rezgések felbontása :

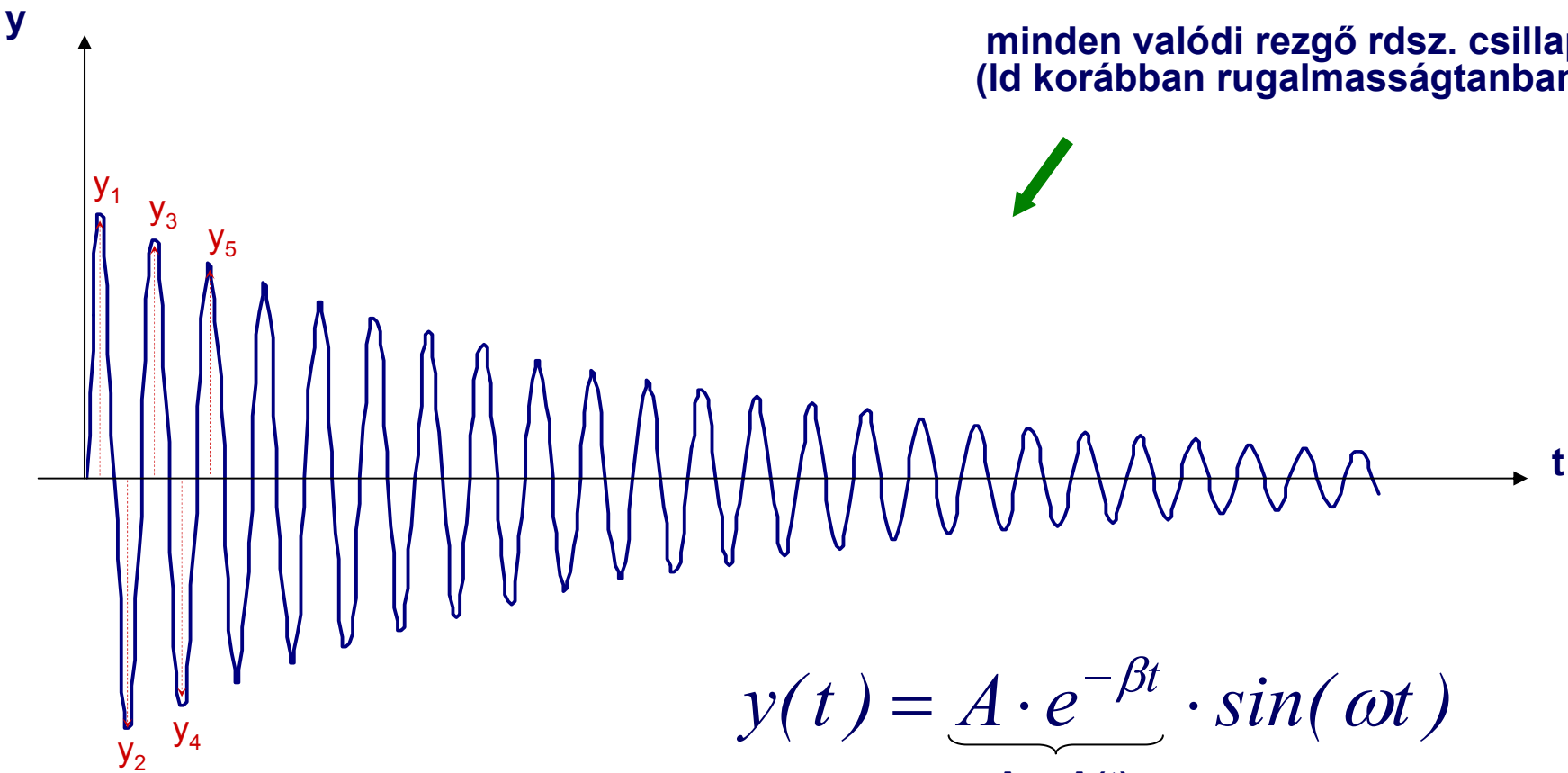
Fourier-analízis

$$x(t) = A_0 + A_1\sin(\omega t+\varphi_1) + A_2\sin(2\omega t+\varphi_2) + \ldots.$$

csillapodó rezgés : ha van csillapodás :

Kísérlet : rúgón rezgő test vagy fonálon lengő test papírkoronggal fékezve

$\beta = 0.1$



minden valódi rezgő rdsz. csillapodó
(ld korábban rugalmasságtanban is !)

$$y(t) = \underbrace{A \cdot e^{-\beta t}}_{A = A(t)} \cdot \sin(\omega t)$$

az amplitúdó az idővel exp. csökken

csillapodási hányados :

$$K = \frac{y_1}{y_3} = \frac{y_2}{y_4} = \frac{y_3}{y_5} = \ldots.$$

β = csillapítási tényező

$$A = A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}$$

$$K = \frac{y_1}{y_3} = \frac{A \cdot e^{-\beta t_1} \cdot \sin \omega t_1}{A \cdot e^{-\beta (t_1 + T)} \cdot \sin \omega (t_1 + T)} = \frac{e^{-\beta t_1}}{e^{-\beta (t_1 + T)}} = e^{\beta T}$$

a logaritmikus dekrementum: $D := \ln K = \beta T \rightarrow \beta = \frac{\ln K}{T}$

rúgón rezgő test + súrlódás vagy közegellenállás mozgásegyenlete :

F = -D·y – k·v

F = m·a

$$\Rightarrow \quad -D \cdot y(t) - k \cdot \frac{dy(t)}{dt} = m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

pl. 6πηr (Stokes-törv.)

$$-\frac{D}{m} \cdot y(t) - \frac{k}{m} \cdot \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

$\frac{D}{m} = \omega_0^2$ $\qquad$ $\frac{k}{m} = \beta = \frac{k}{2m}$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot y(t) = 0$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0{}^2 \cdot y(t) = 0$$

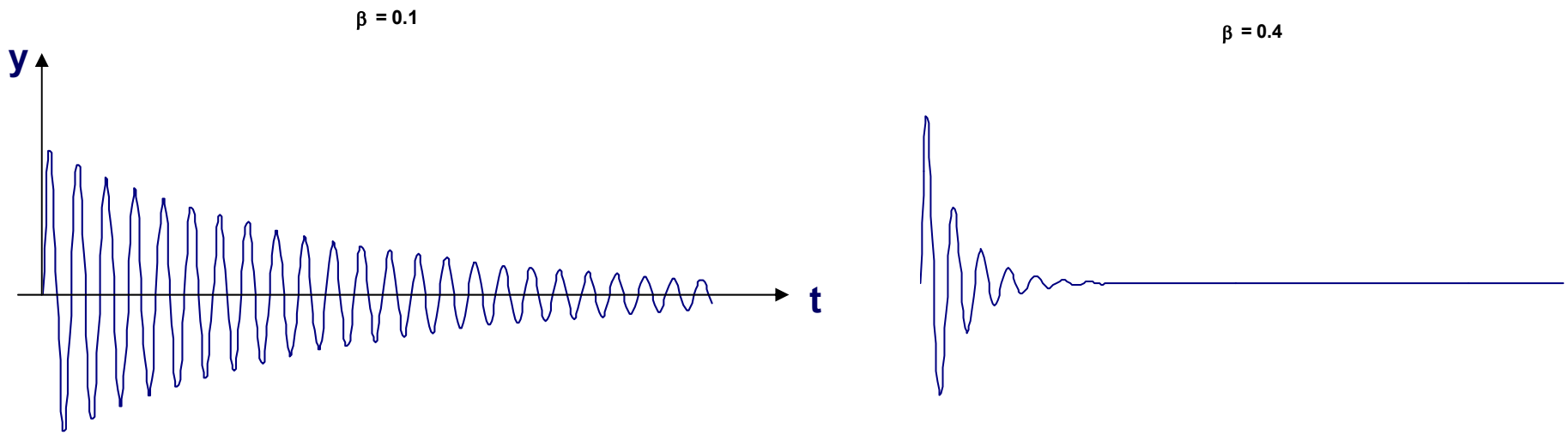
ha β = 0 ➡ **csillapítatlan rezgés**

β < ω_0 – ra a megoldás : $\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}$

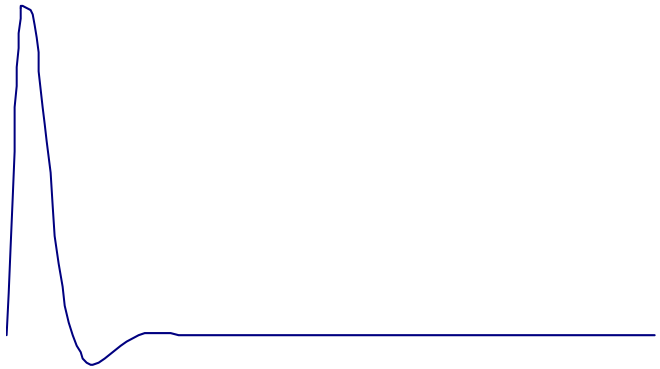
ezzel az ω-val a rúgón csillapítással rezgő testre éppen $y(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t)$

ha β nő ➡ **ω csökken** ➡ **T nő :** $T = T_0 \sqrt{1 + \frac{D^2}{4\pi^2}}$

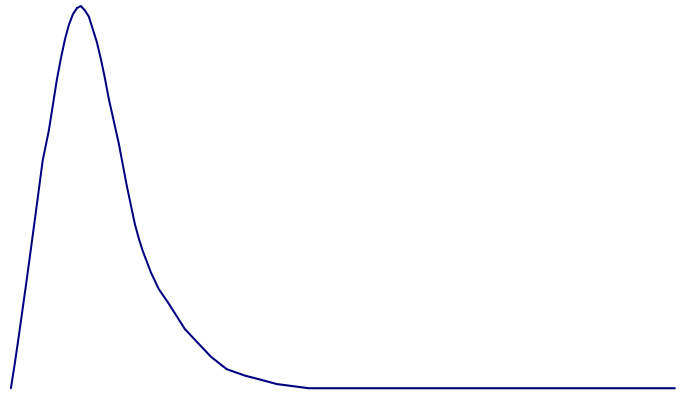
β növelésével (pl. nem levegő fékez, hanem víz, olaj, stb…) :



β = 5



β = 15



ha β elég nagy → nem lesz periodikus

aperiodikus határeset !
ha $\beta = \omega_0$

ha $\beta > \omega_0$ → aperiodikus mozgás

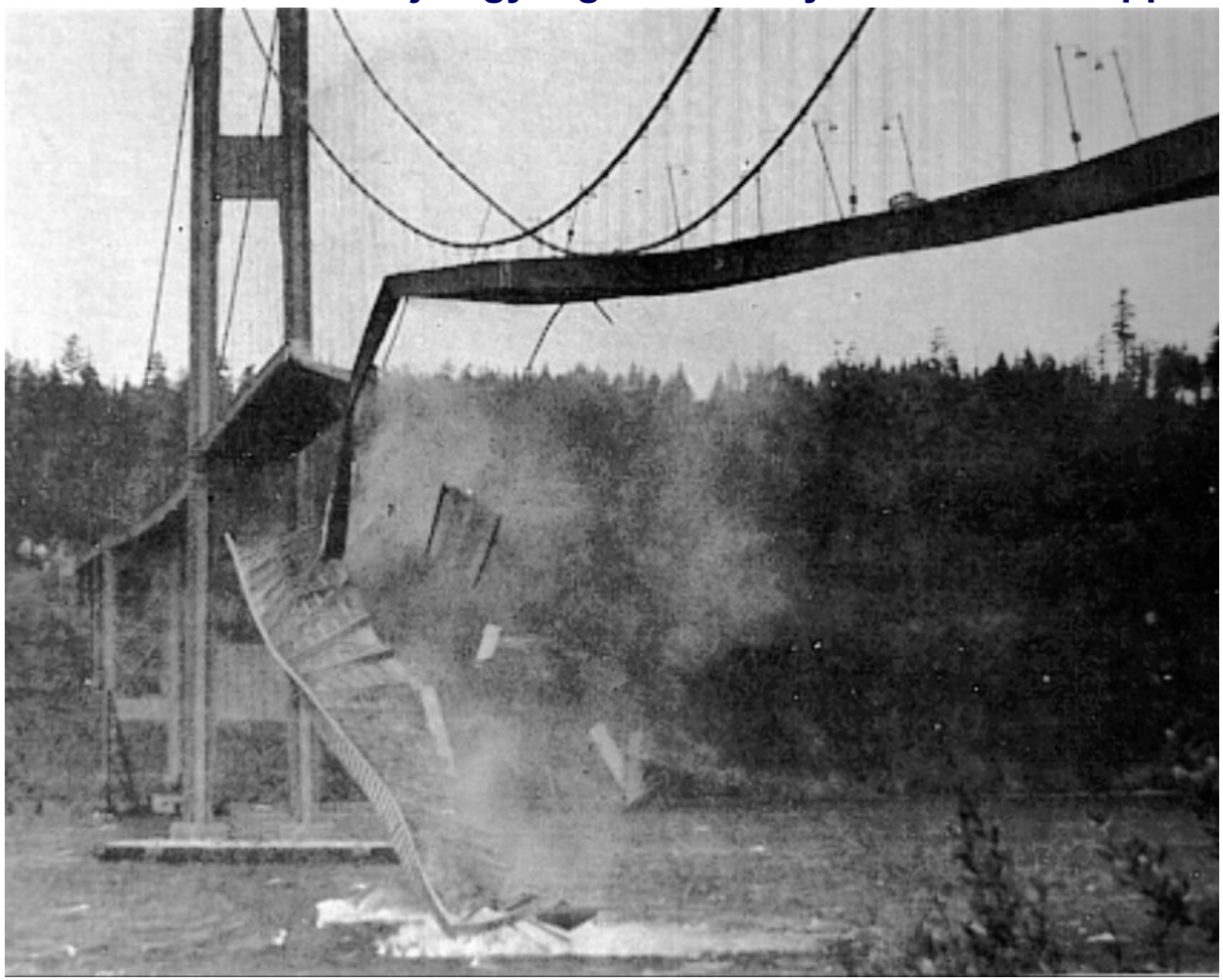
kényszerrezgés : gerjesztés : ha az energiaveszteséget pótoljuk

kísérlet : kényszerrezgés, rezonancia, Fizikai kísérletek 3. CD, 23′00″

ha a gerjesztő frekv. megegyezik a sajátfrekvenciával

rezonancia : amplitúdó nagyon megnőhet :

pl.: hinta lengetése : kicsi lökések → nagyon nagy amplitúdó
busz berezonál, ha a motor alapjárata nagyon alacsony
Tacoma híd katasztrófája : gyenge oldalirányú széllökések éppen megfelelő ütemben



→ video

kísérlet : rezonáns hangvillák, Fizikai kísérletek 3. CD: 25'48"

rúgón rezgő test + fékezés + gerjesztés :

F = -D·y – k·v + $F_0 \sin\omega t$

F = m·a

gerjesztőerő

$$-D\cdot y(t)-k\cdot\frac{dy(t)}{dt}+F_0\cdot\sin\omega t=m\cdot\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$\omega_0{}^2=\frac{D}{m} \qquad 2\beta=\frac{k}{m} \qquad a_0=\frac{F_0}{m}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\beta\cdot\frac{dy(t)}{dt}+\omega_0{}^2\cdot y(t)=a_0\cdot\sin\omega t$$

megoldás :

amplitúdó :

$$A=\frac{a_0}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

max. amplitúdó :

$$A_{max}=\frac{a_0}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2-\omega_r{}^2\right)^2+4\beta^2\omega_r{}^2}}$$

fáziskésés :

$$\delta=\operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0{}^2-\omega^2}$$

pl rúgón rezgő testre :

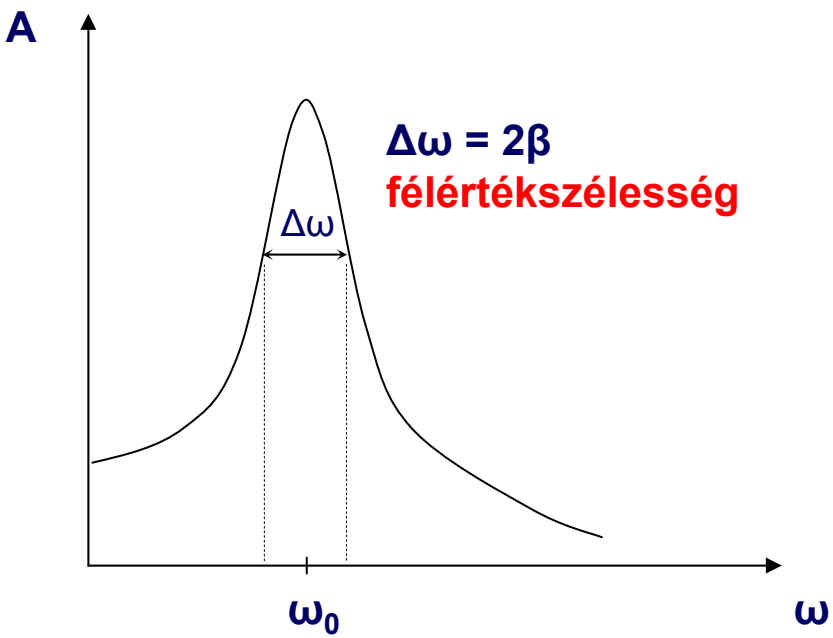
sajátfrekvencia : $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

rezonanciafrekvencia : $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

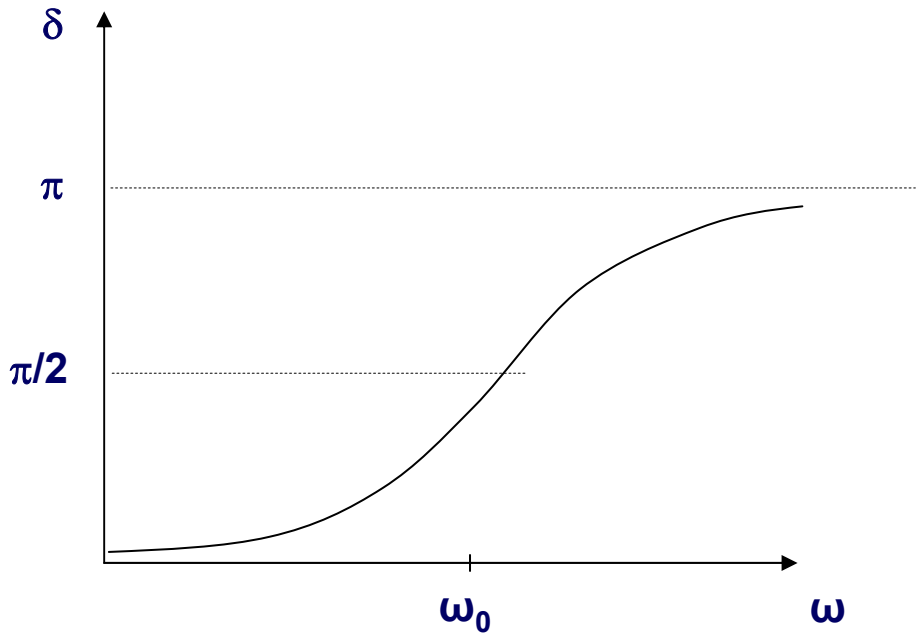
max. amplitúdó : $A_{max} = \frac{a_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_r^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_r^2}}$

fáziskésés : $\delta = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega_r^2}$

jósági tényező : $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$ **(„jó” a rezgő rdsz. ha a szélessége kicsi ω_0-hoz képest)**

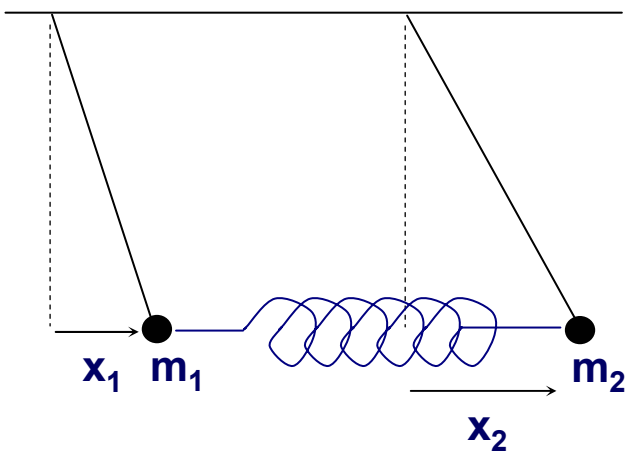


Δω = 2β
félértékszélesség



csatolt rezgések :

kísérlet : csatolt ingák, Fizikai kísérletek 3. CD: 27′39″



$$m_1 \cdot a_1 = -D_1 \cdot x_1 + c \cdot (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \cdot a_2 = -D_2 \cdot x_2 - c \cdot (x_2 - x_1)$$

ha $\omega_{1_0} = \sqrt{\frac{D_1}{m_1}}$ $\omega_{2_0} = \sqrt{\frac{D_2}{m_2}}$

$c_1 = \frac{c}{m_1}$ $c_2 = \frac{c}{m_2}$

csatolási tényezők

szoros csatolás,
laza csatolás

rezgések felbontása :

Fourier-analízis :

minden periodikus, nem harmonikus folyamat (rezgés) felírható olyan sin – és cos – rezgések összegeként, melyek frekvenciája az alaprezgés frekv.-nak egész számú többszöröse (Fourier tétele) :

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin\omega t + B_1 \cos\omega t + A_2 \sin 2\omega t + B_2 \cos 2\omega t + \ldots.$$

Fourier-együtthatók

2ω, 3ω, … = felharmonikusok

kísérlet : Fraknói ingák, **Fizikai kísérletek 3. CD: 32′10″**

hullámok:

- **mechanikai**
- **rugalmas közeg**
- **zavar-keltő tárgy**
- **(a közeg egy részecskéjét rezgőmozgásba hozza)**
- **hullám: a rezgésállapot**

- elektromágneses
- közeg nem szükséges
- hullámforrás
- (változó elektromágneses teret hoz létre)
- terjedése a térben

lökéshullám : egyszeri gerjesztés → a zavar végigfut a közegen
harmonikus hullám : időben periodikus (szinuszos) gerjesztés

kísérlet : lökéshullám végigfutása kifeszített gumikötélen vagy csavarrúgón

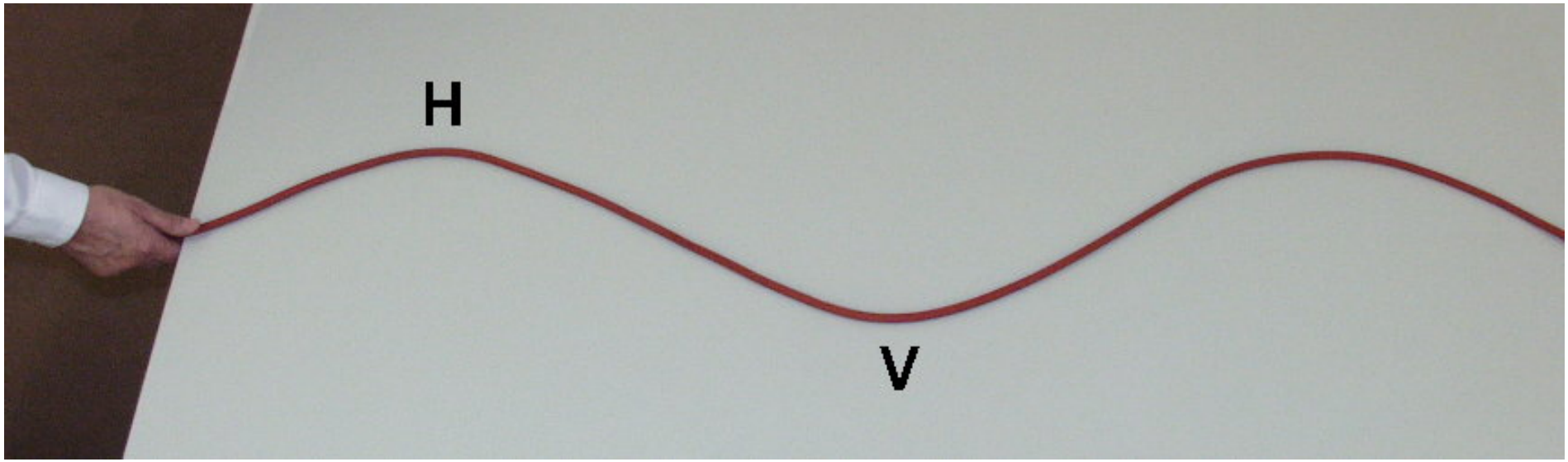
ld. még : Fizikai kísérletek (Televideo) CD, hullámok terjedése : 8′40″ - től

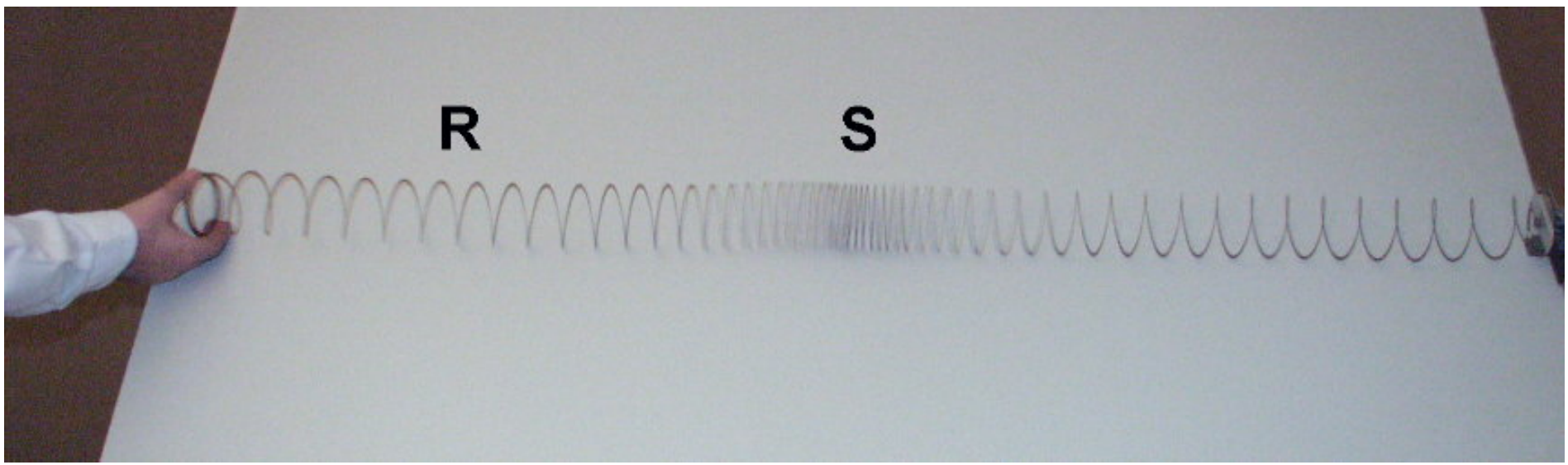
hullám különböző kiterjedésű közegekben :

vonalmenti → 1D
felületi → 2D
térbeli hullámok → 3D

hullámfajták : **transzverzális, longitudinális,**
torziós (csavarási) hullám
síkhullám, gömbhullám,

Microsoft
PowerPoint bemutató





polarizáció : elliptikusan-, cirkulárisan-, síkban poláros hullám

kísérlet : polarizáció kötélen haladó hullámokkal

hullámterjedés : $x = c \cdot t$, c = fázissebesség

hullámfüggvény :

$$y = A \cdot \sin \omega t$$

$$y = A \cdot \sin \omega (t - t^*) \qquad t^* = \frac{x}{c}$$

$$y = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{c \cdot T} \right)$$

$$\Psi = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$ ← a közeg gerjesztése

$$\Psi = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$ ← haladó hullám **hullámfüggvénye**

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\quad$ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

periodicitások :

x = állandó → **időbeli periódikusság : T**

t = állandó → **térbeli periódikusság : $c \cdot T = \lambda$ hullámhossz**

Doppler-effektus :

pl. : vonattal (szirénázó mentőautóval,…) szemben haladva a vonatduda hangja magasabb, ha már távolodunk, akkor mélyebb

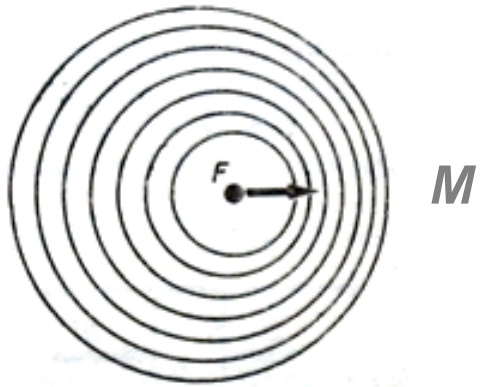
ha a hullámforrás (F) és/vagy a megfigyelő (M) mozog :

ha csak a M mozog :

$$\nu' = \nu \cdot \left(1 \pm \frac{v_m}{c}\right)$$

ha csak a F mozog :

$$\nu' = \frac{\nu}{1 \mp \frac{v_f}{c}}$$



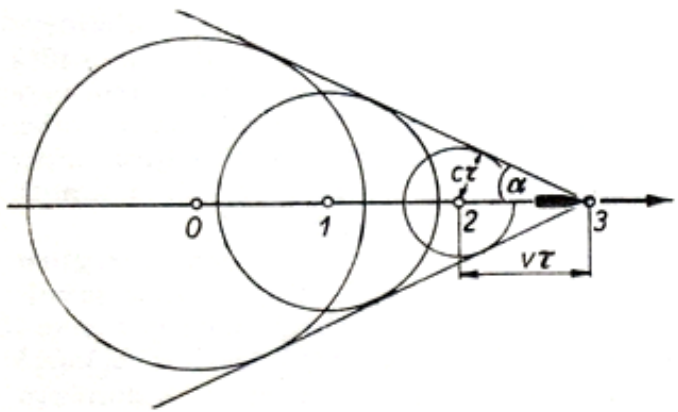
ha mindkettő mozog :

$$\nu' = \nu \cdot \frac{1 - \frac{v_m}{c}}{1 - \frac{v_f}{c}}$$

(v_f és v_m az $\overrightarrow{FM}$ irányában pozitív, ellentétes irányban negatív)

Id. még : Fizikai kísérletek (Televideo) CD, hullámok terjedése : 8′40″ - től

hangrobbanás :



rugalmas hullámok kül. közegekben :

szilárd testekben, **longitudinális hullámokra :** $c = \sqrt{E/\rho}$

transzverzális hullámokra (húrban) : $c = \sqrt{\sigma/\rho}$ gitár !

Kísérlet: **monokord**

folyadékokban : **csak longitudinális hullámok lehetnek !!! :**

E helyett a K-t lehet használni: $K = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}$

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

(kompressziómodulus)

gázokban : **ha T = áll. :** $c = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$ **(nem teljesen jó)**

gázban is csak longitudinális hullám !!!
(foly. és gázokban nincsenek nyíróerők)

folyadékok felszíni hullámai :

(nincs rugalmas erő, a gravitáció és a kapillaritás okozza)

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot \alpha}{g \cdot \lambda}}$$

ha $h << \lambda$ → $c = \sqrt{g \cdot h}$

hullámok összegződése, szuperpozíciója :

$$y_1 = A_1 \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_1} - \frac{x_1}{\lambda_1}\right)$$

$$y_2 = A_2 \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_2} - \frac{x_2}{\lambda_2}\right)$$

az eredő hullám csak akkor lesz harmonikus, ha az összetevők koherensek egymással

koherencia = a találkozási pontban a hullámok fáziskölönbségeidőben állandó, azaz $T_1 = T_2 = T$ és $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$y_1 = A_1 \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_1} - \frac{x_1}{\lambda_1}\right)$$

$$y_2 = A_2 \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_2} - \frac{x_2}{\lambda_2}\right)$$

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

ahol

$$A^2 = A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

(párhuzamos rezgések összetétele)

szélső esetek :

max. az ampl., ha $\cos(\varphi_1-\varphi_2) = 1$ → **$A = A_1 + A_2$**

az erősítés feltétele : $\underbrace{x_2 - x_1}_{\text{útkülönbség}} = n \cdot \lambda = 2n \cdot \frac{\lambda}{2}$ **(n egész szám)**

min. az ampl., ha $\cos(\varphi_1-\varphi_2) = -1$ → **$A = A_1 - A_2$**

kioltás: ha $A_1 = A_2$

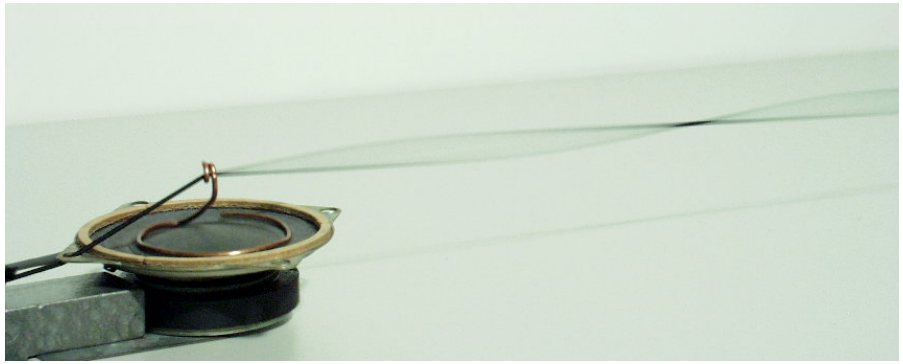
a gyengítés feltétele : $\underbrace{x_2 - x_1}_{\text{útkülönbség}} = (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$

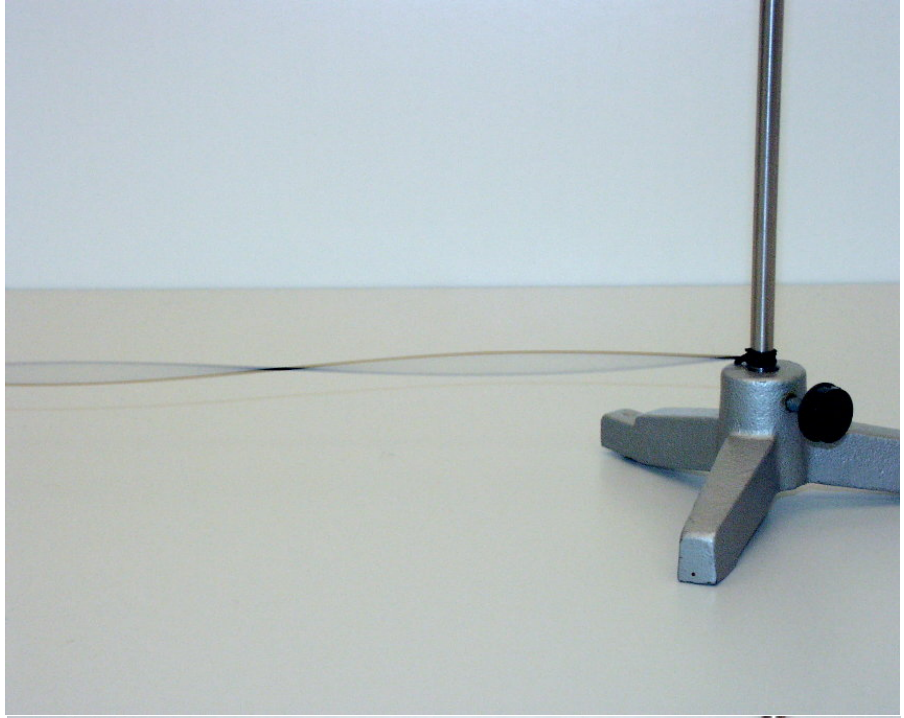
haladó és visszaverődő hullámok találkozása :

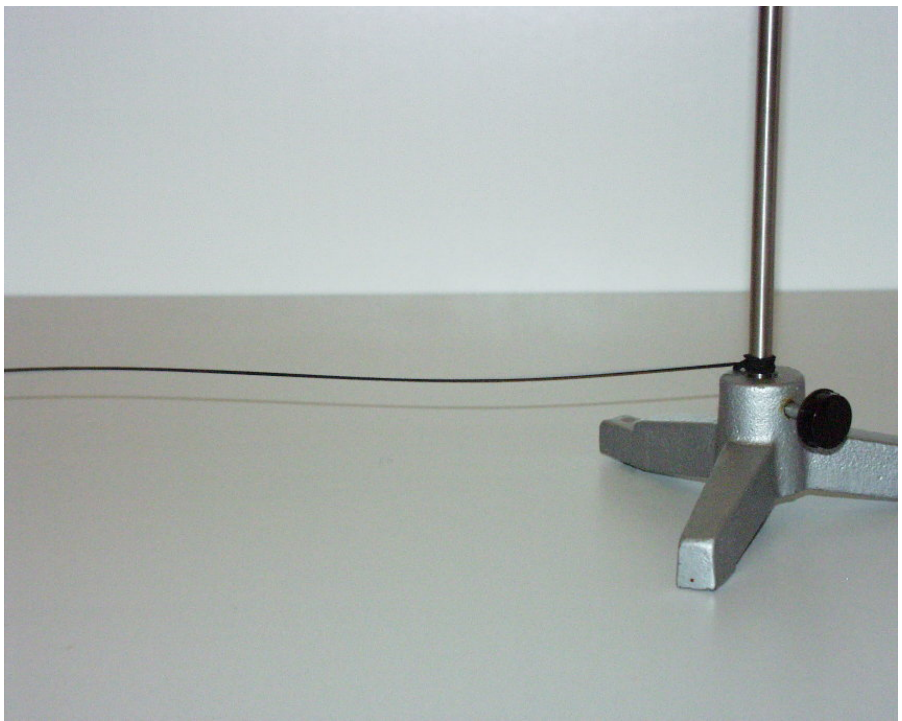
(pl. : 1D hullám visszaverődése a kötél végéről)

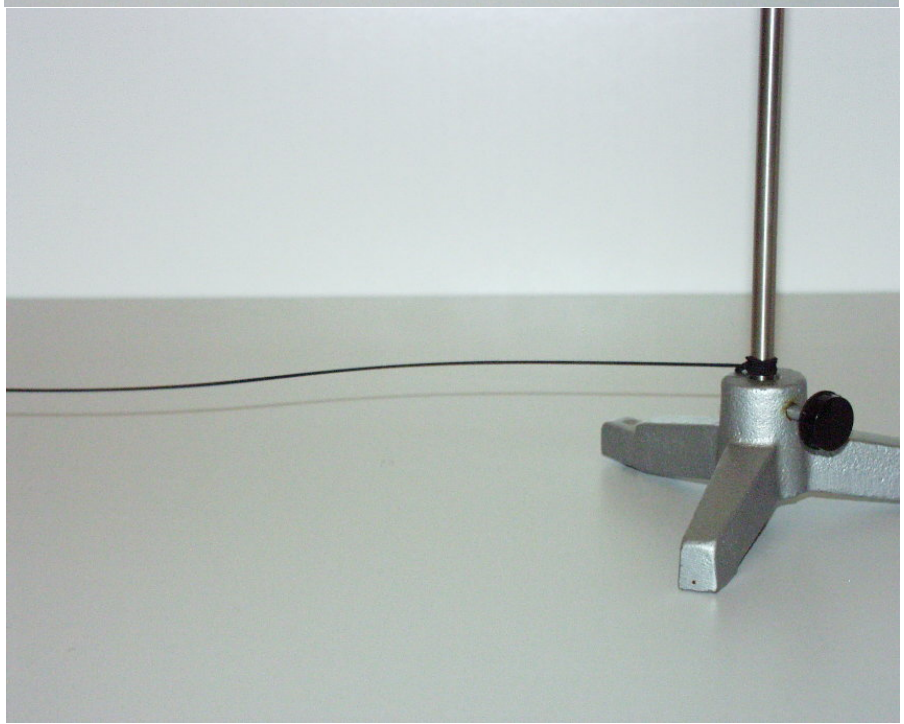
visszaverődés rögzített végről :	ellentétes fázissal indul vissza
visszaverődés szabad végről :	azonos fázissal indul vissza

Kísérlet :

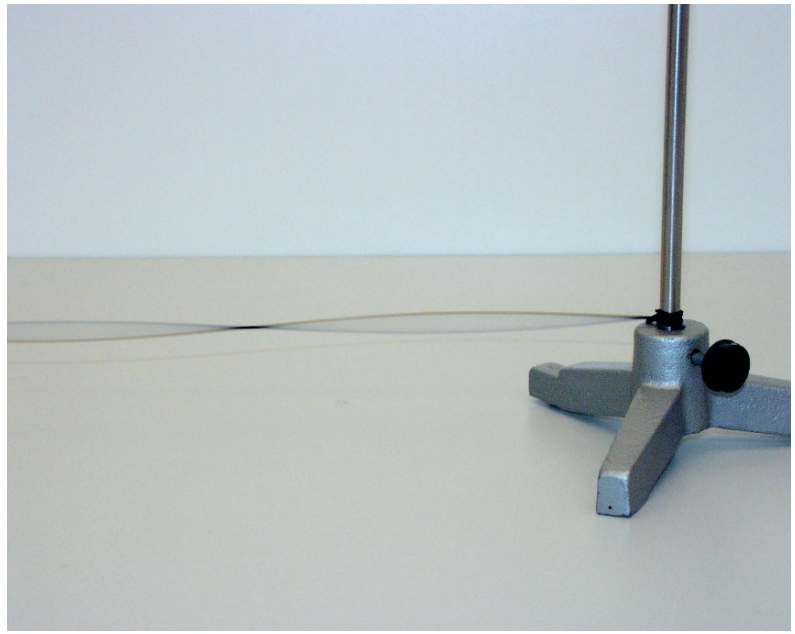


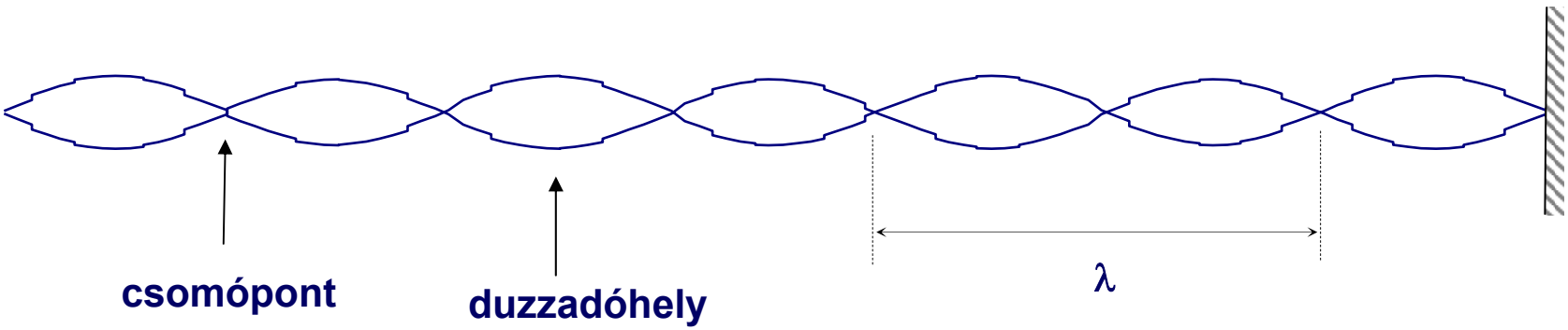






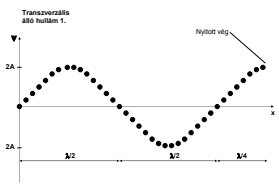
haladó és visszaverődő hullám találkozása → **állóhullám :**





csomópontok távolsága a rögzített/szabad végtől: .....

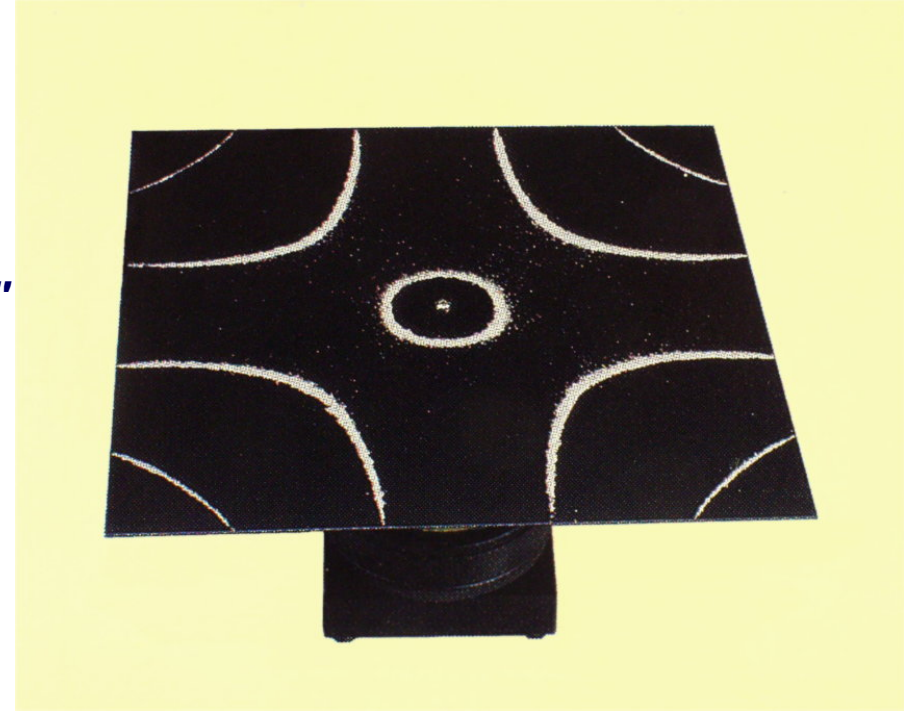
állóhullámok :

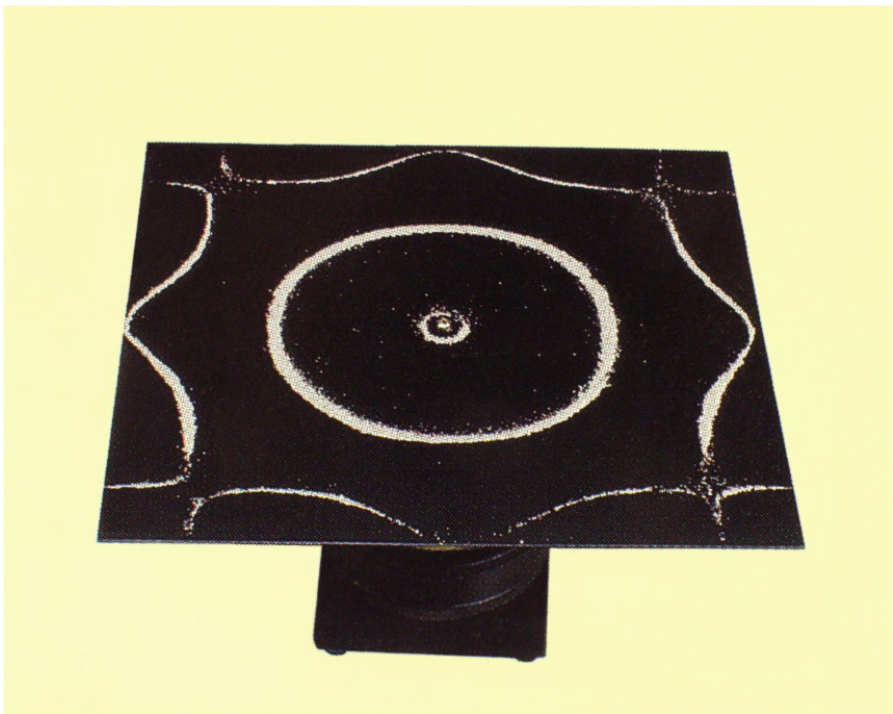


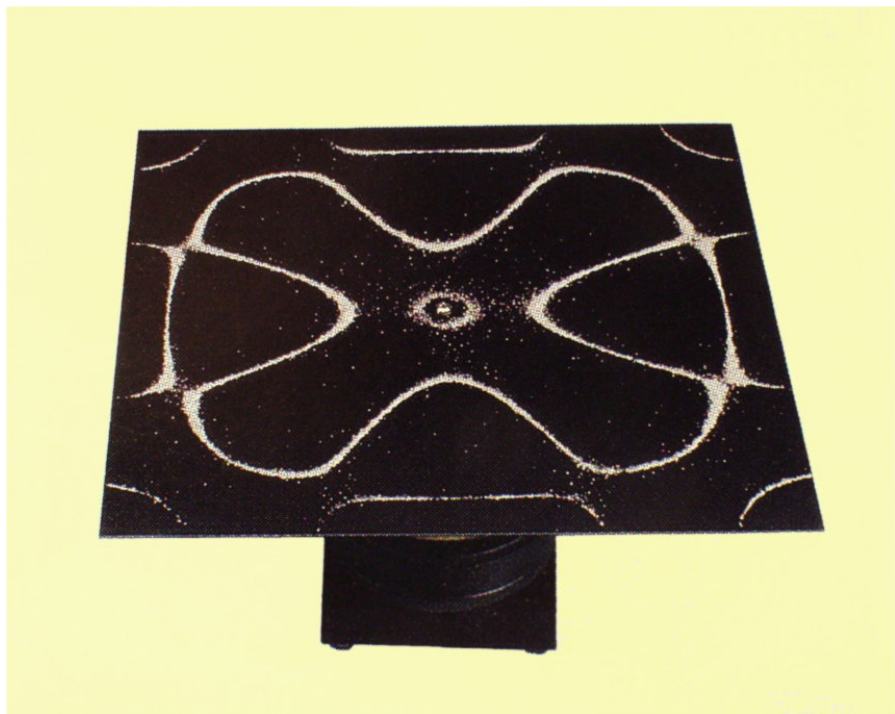
Kísérlet : Chladni-féle porábrák

lásd még : Fizikai kísérletek 3. CD: 39′12″

Kundt-cső : Fizikai kísérletek 3. CD: 35′20″





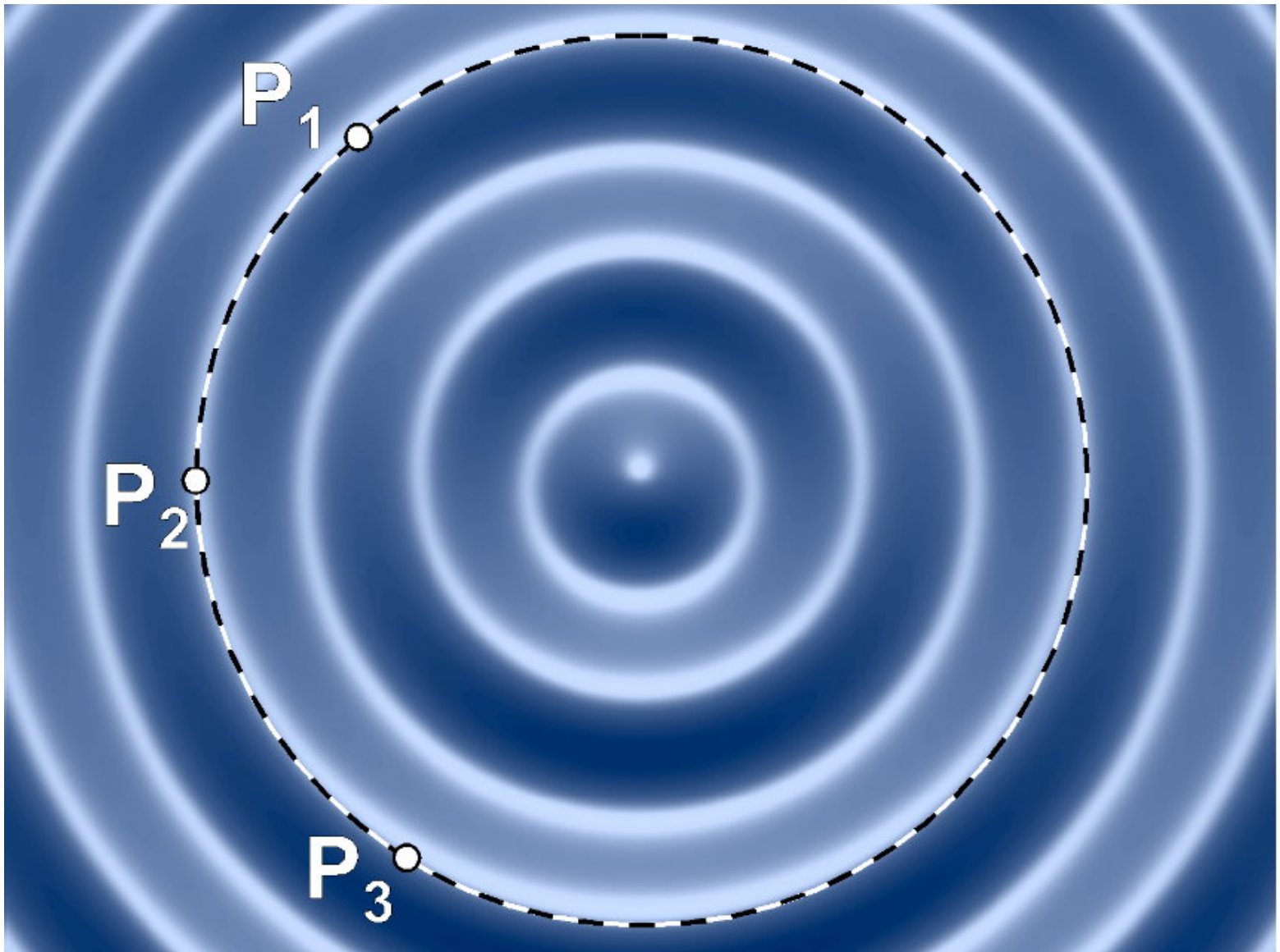


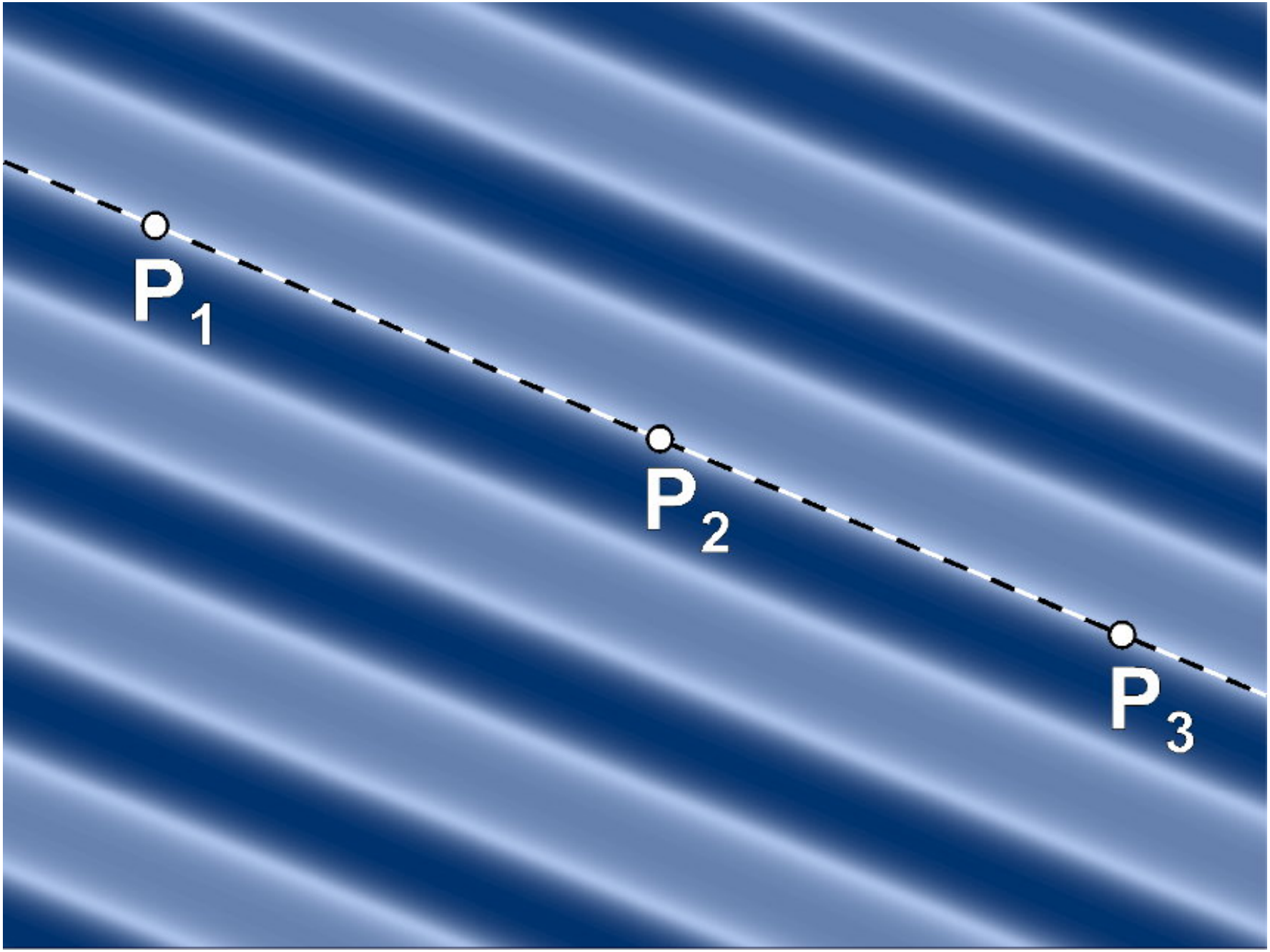
többdimenziós hullámok : **pl. víz felületén … (2D), hang (3D, pl. a robbanás)**

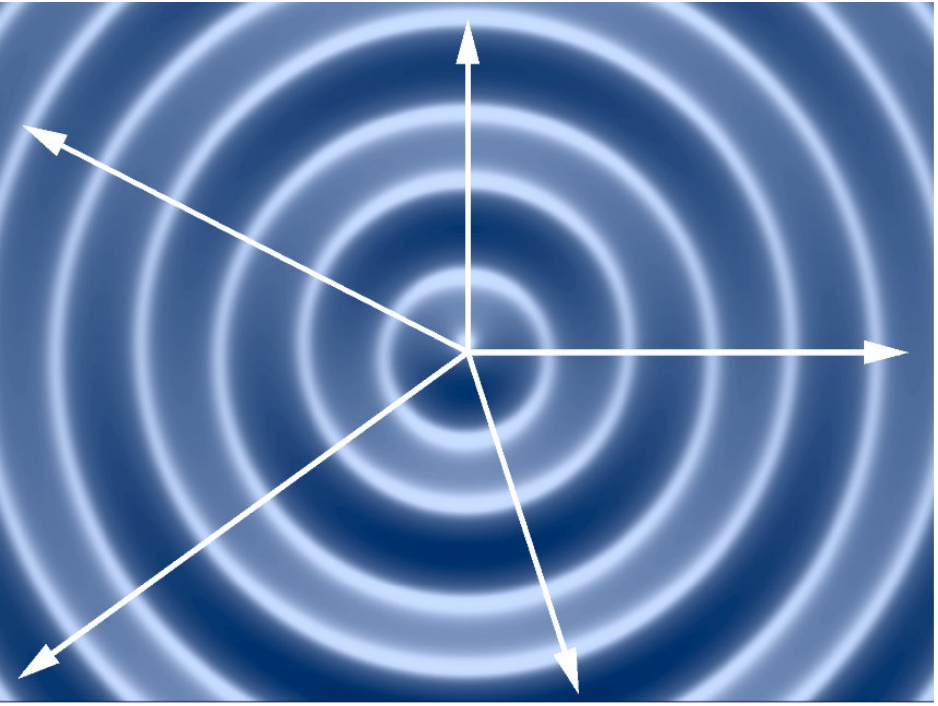
hullámjelenségek :

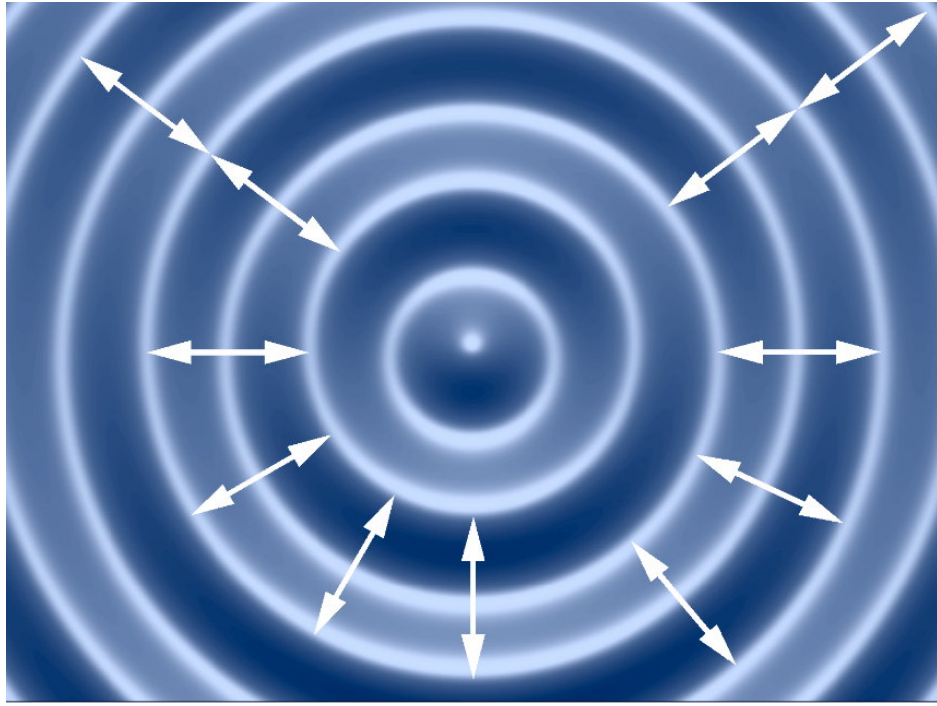
kísérlet : hullámkád

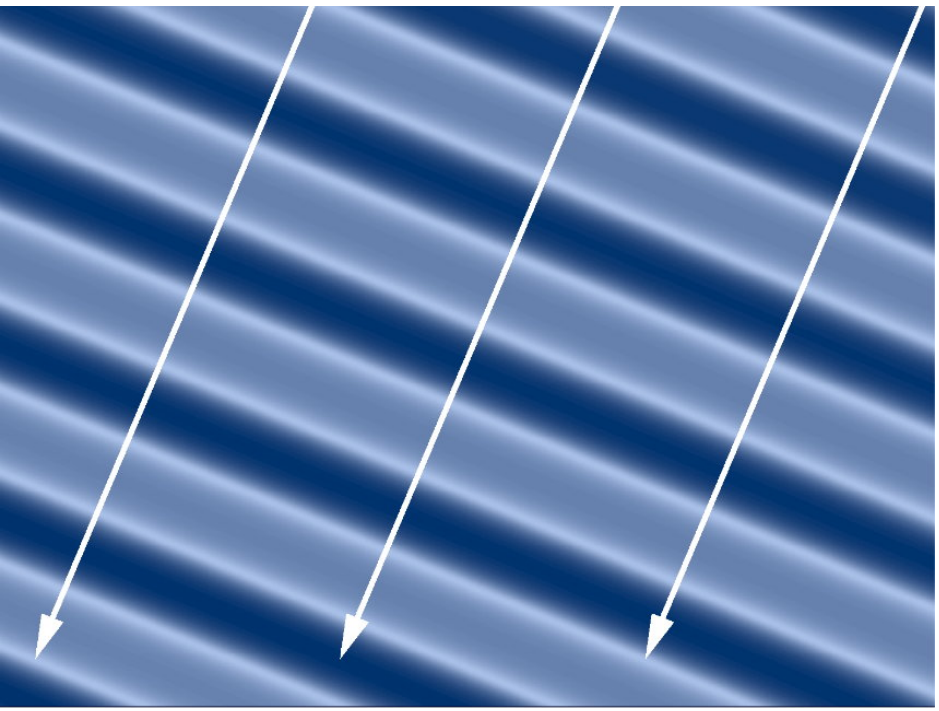
ld. még : Fizikai kísérletek (Televideo) CD, hullámok terjedése : 8′40″ - től

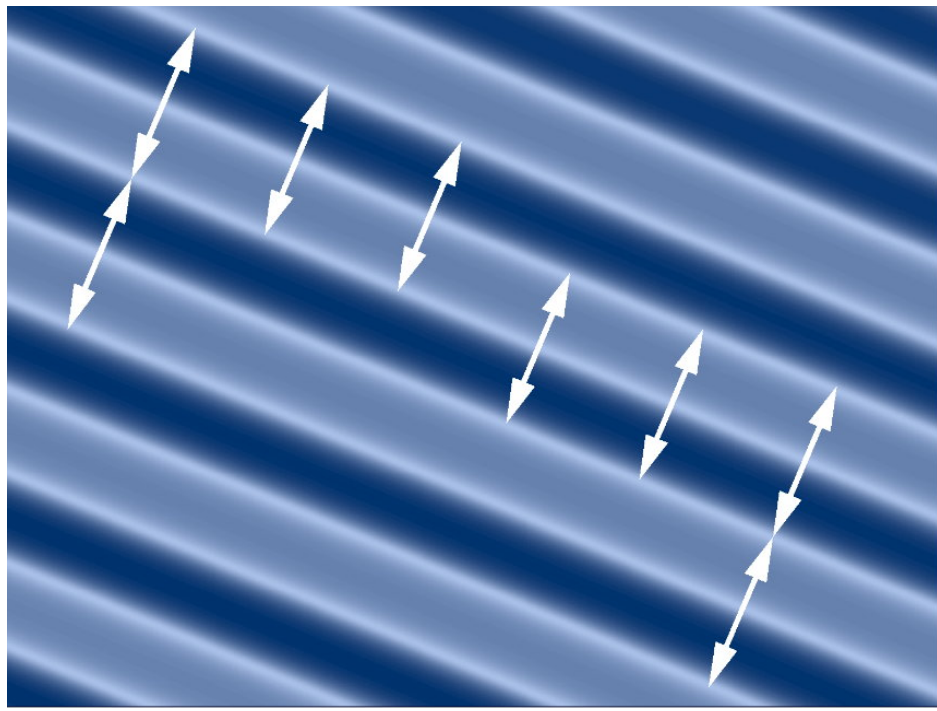


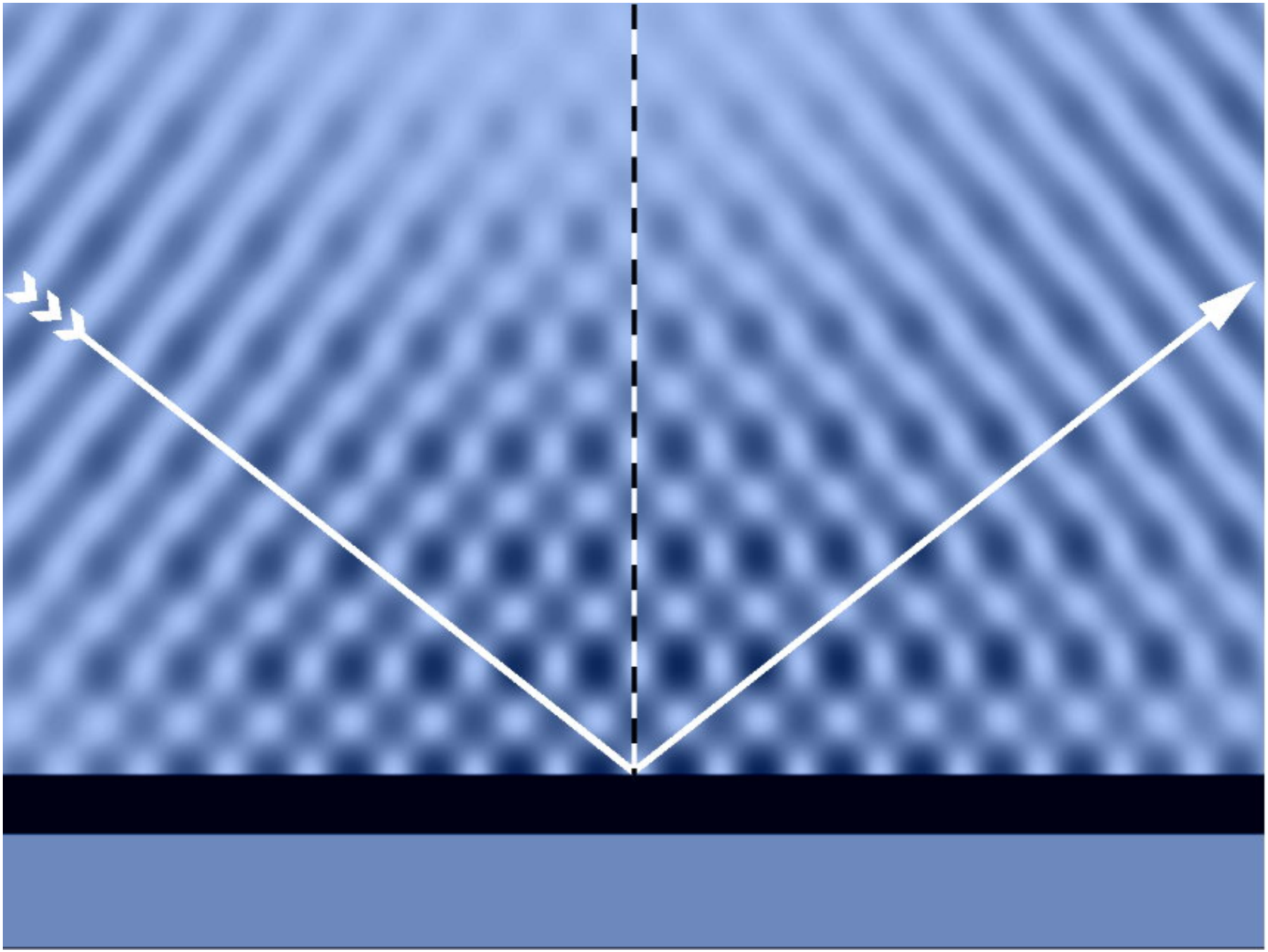

P1
P2
P3

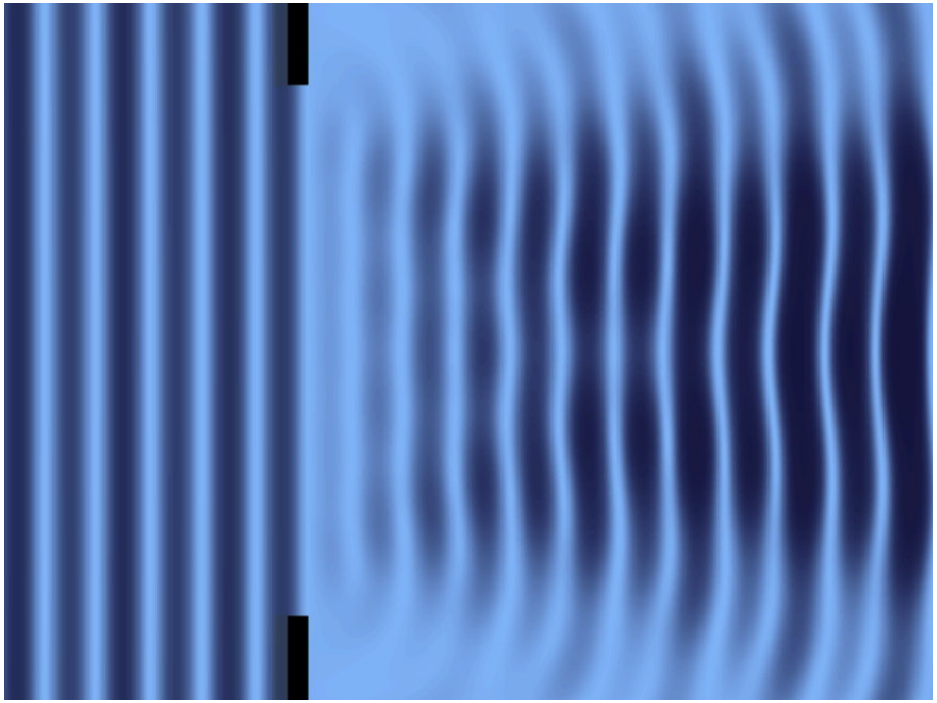


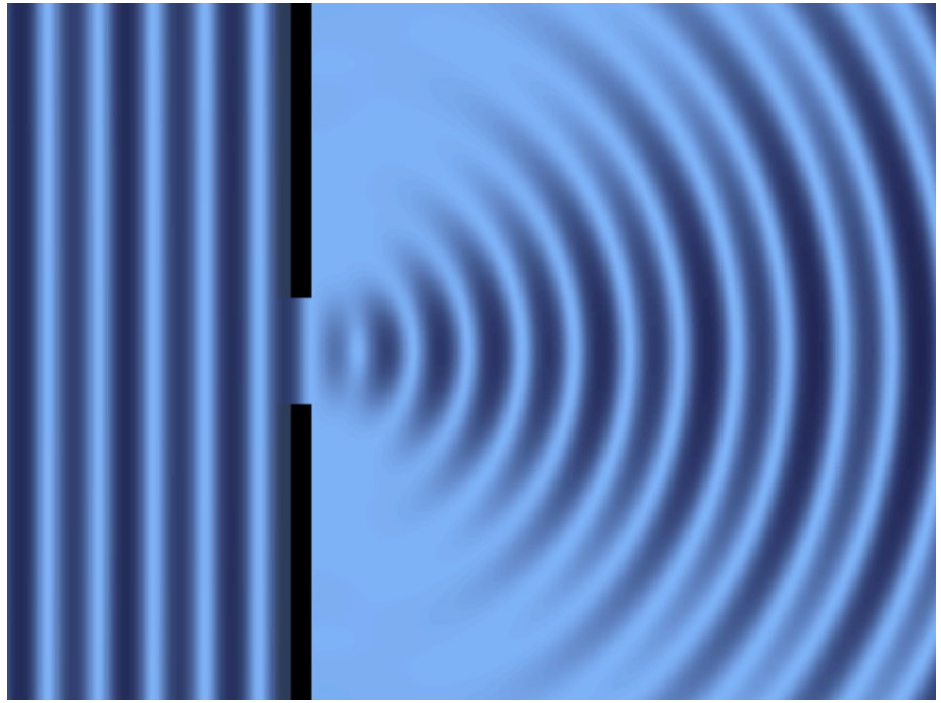


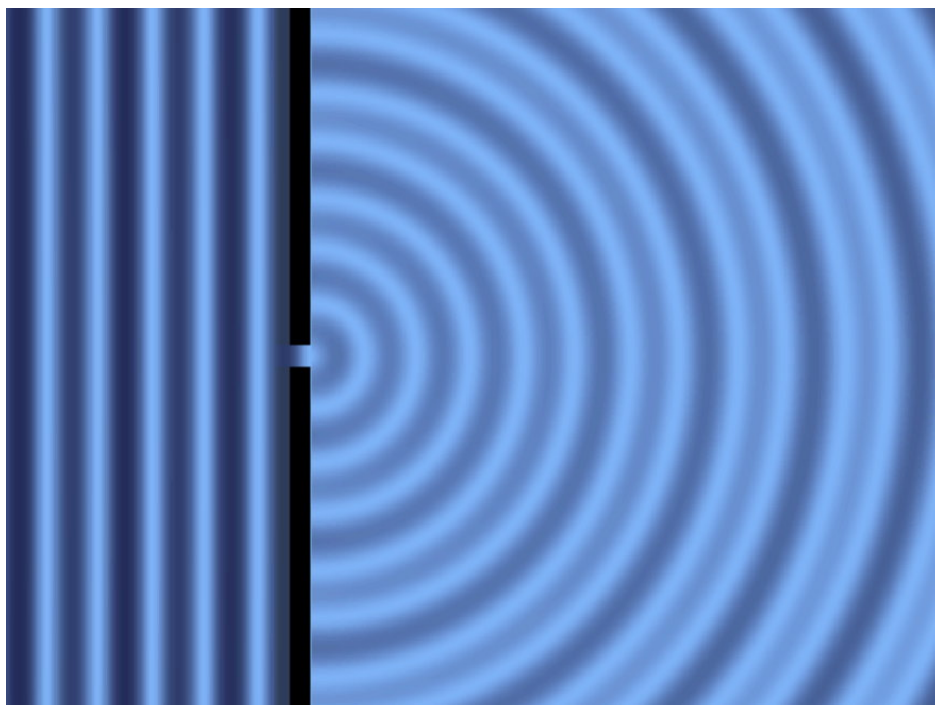


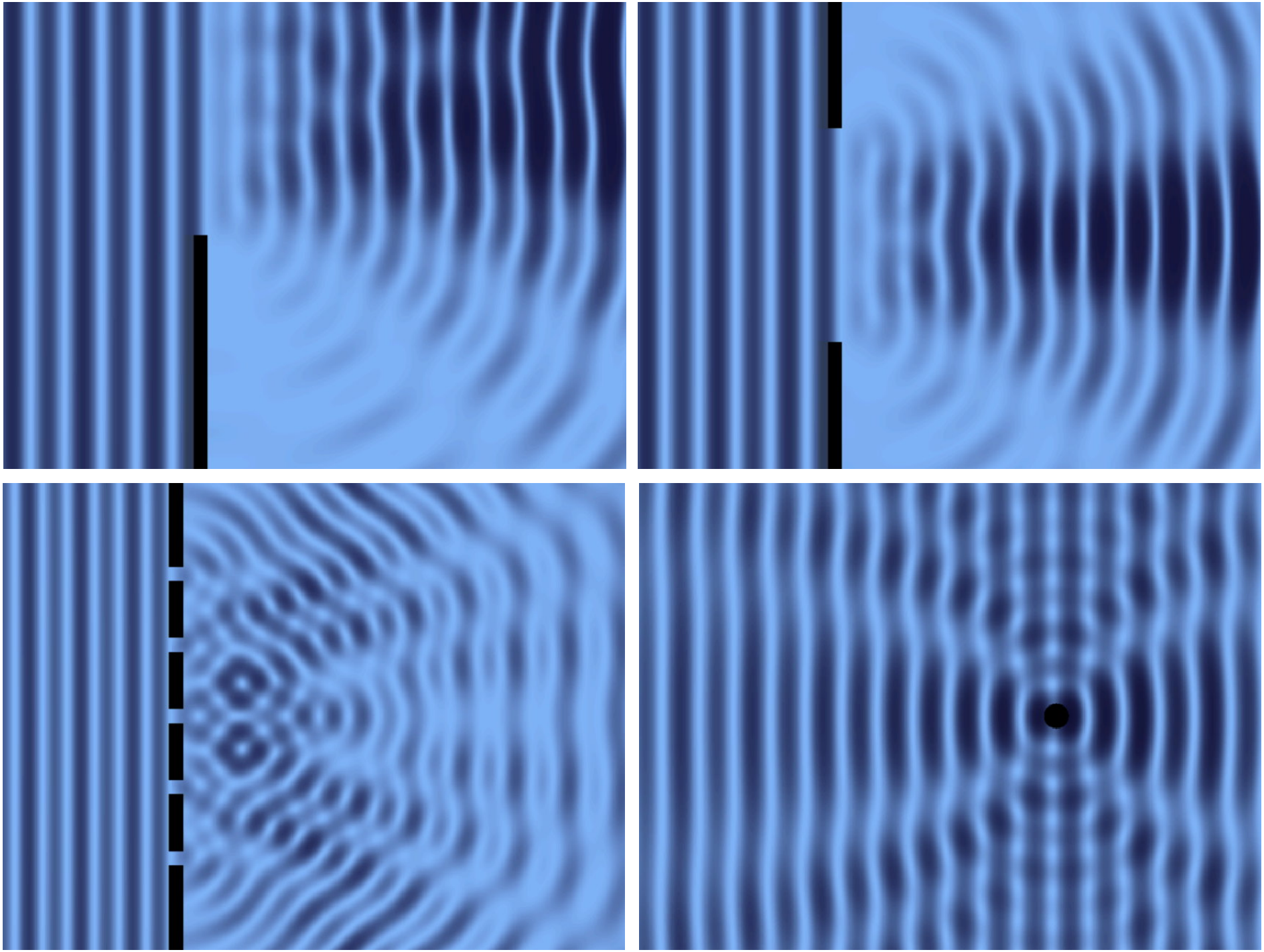


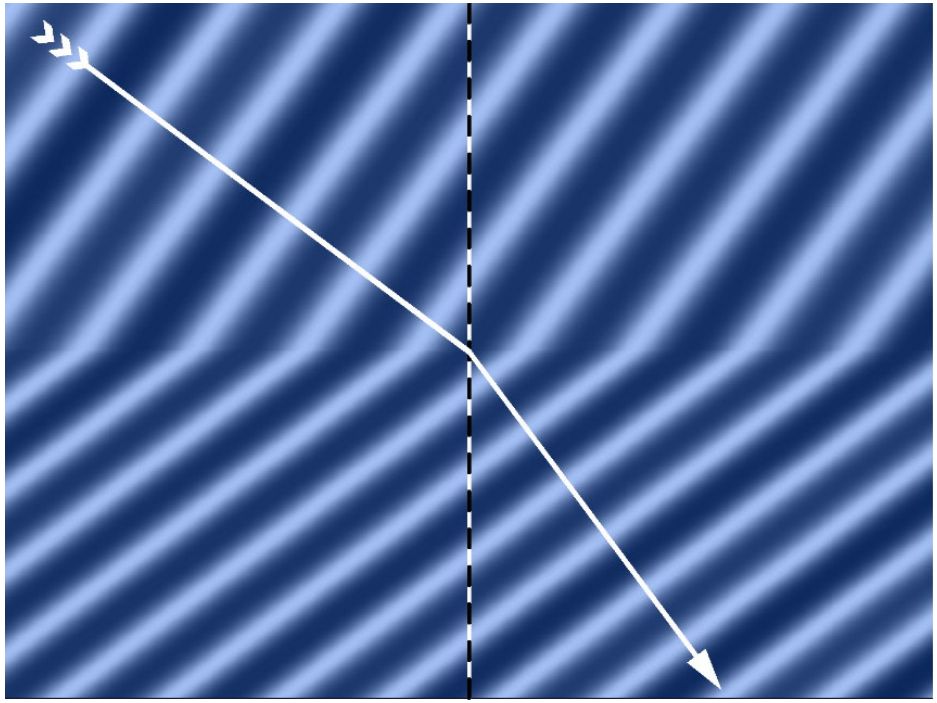


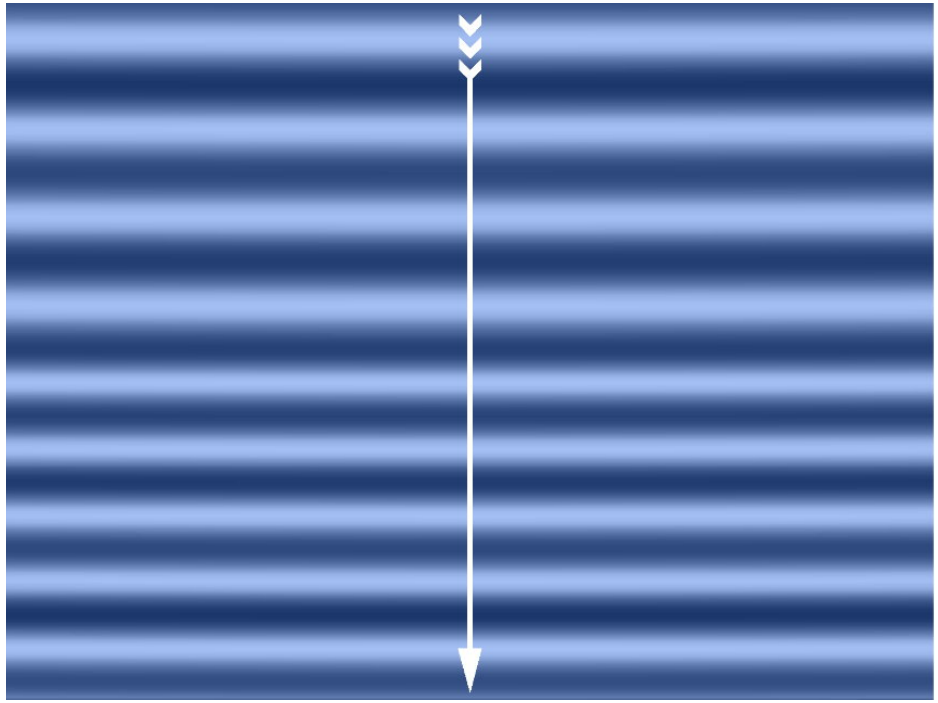




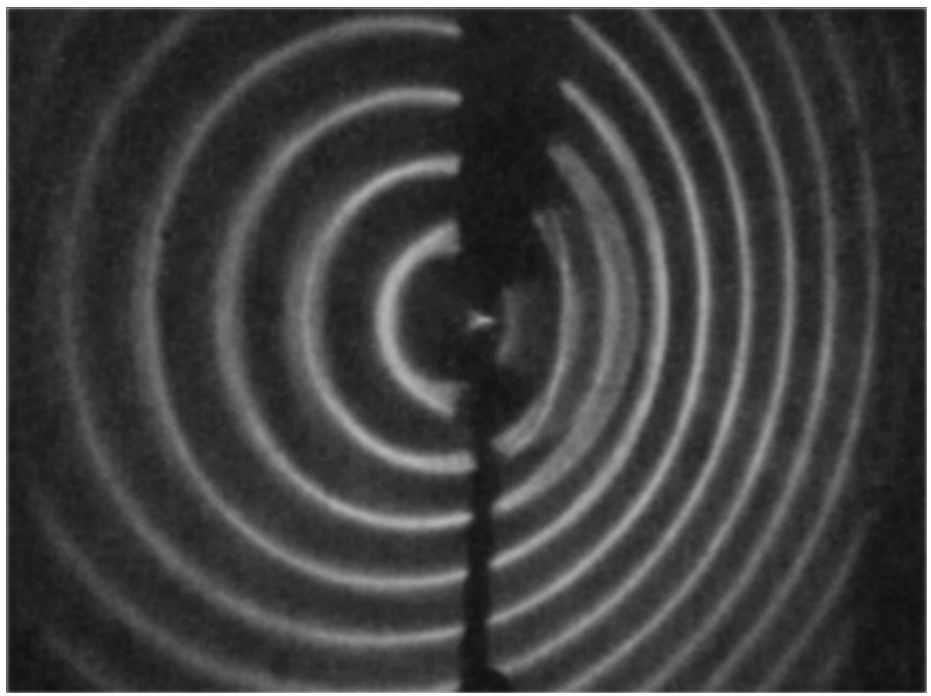




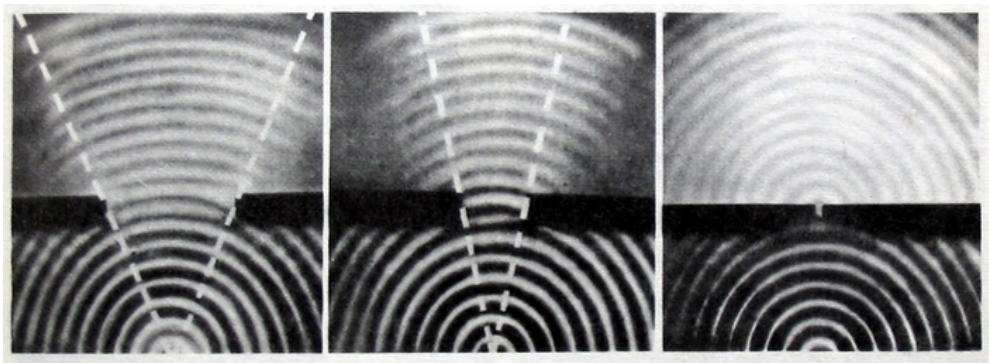


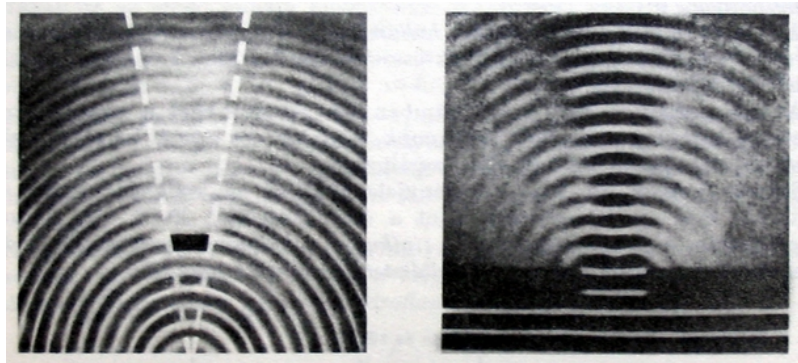


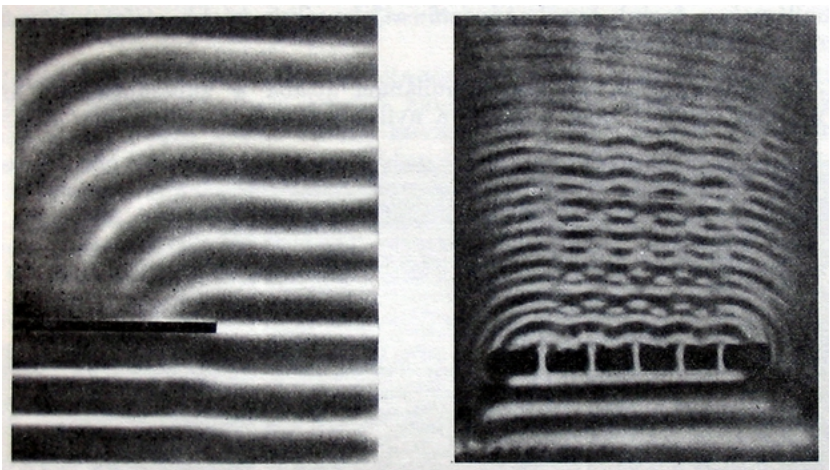
Doppler :

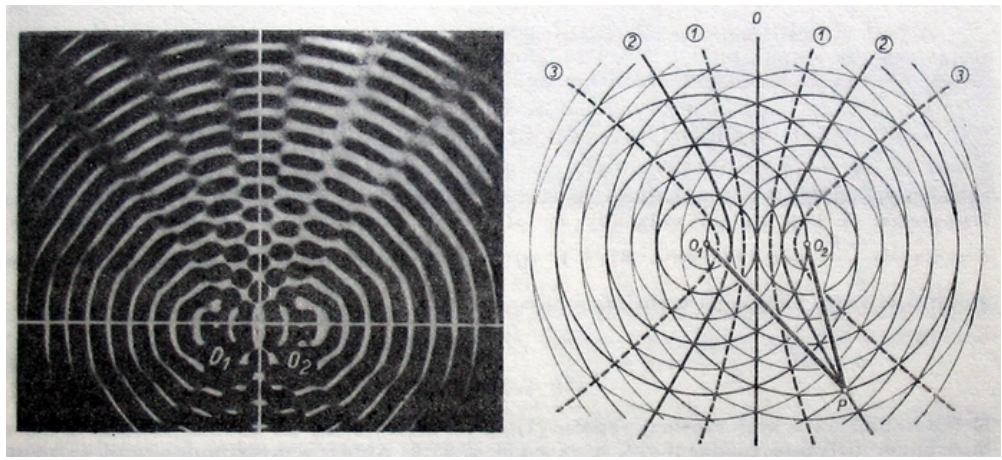


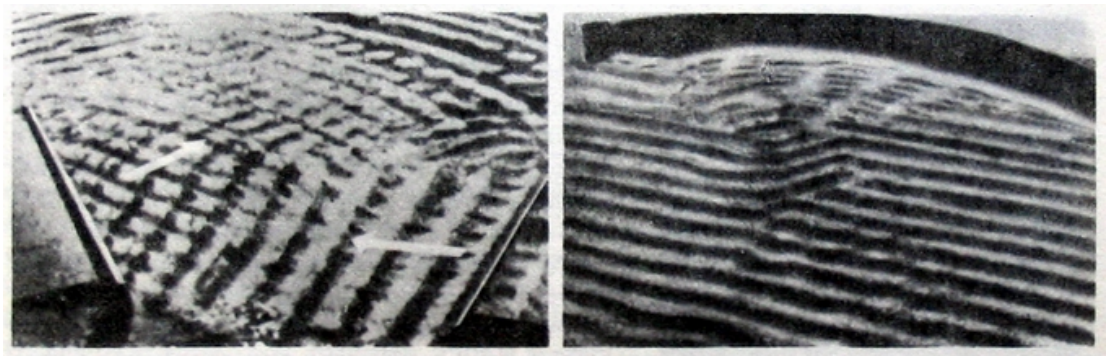
elhajlás, visszaverődés, törés, interferencia :

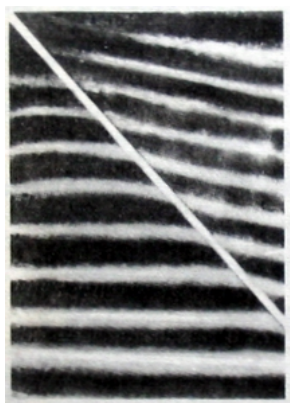












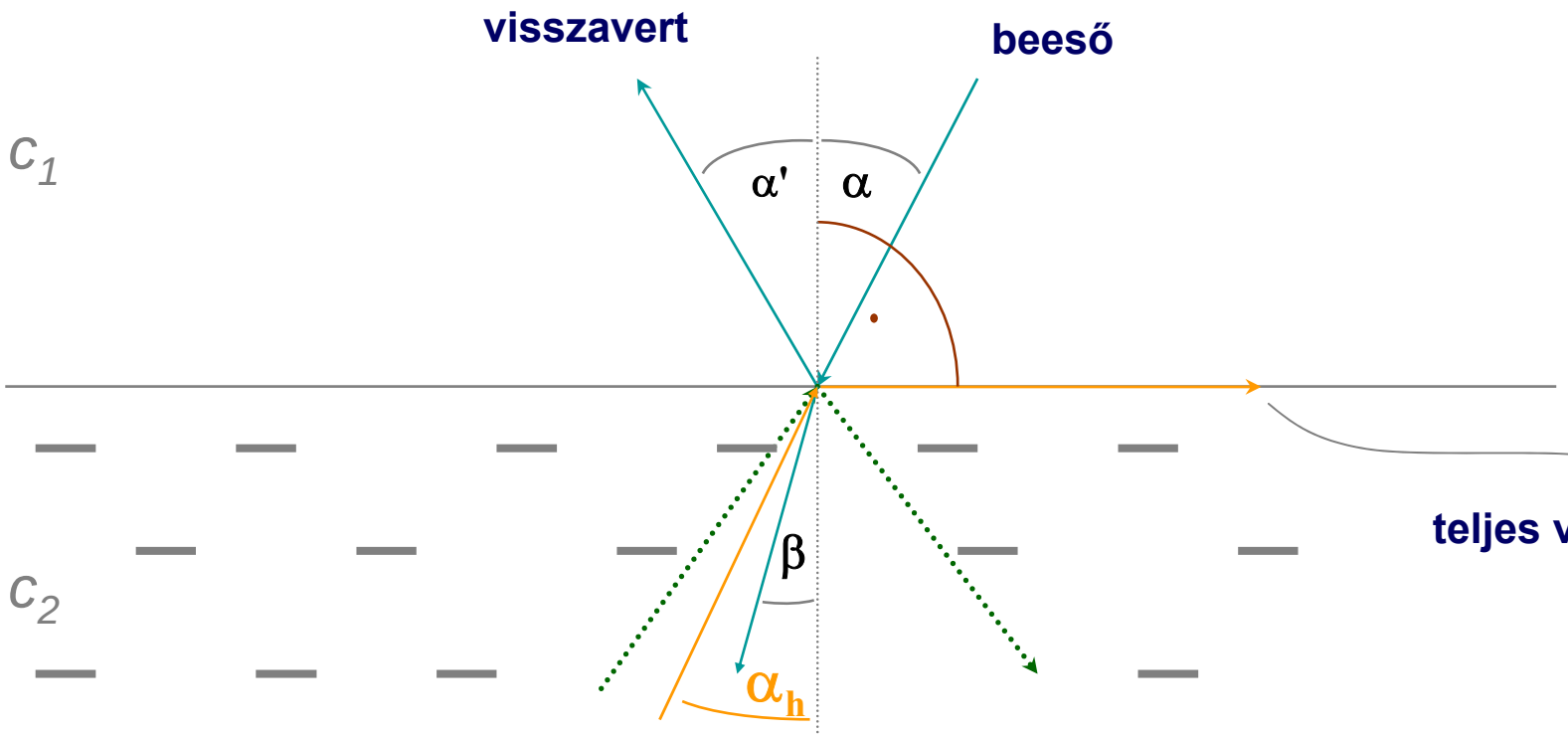
Kísérlet :

Fizikai kísérletek (Sulinet) CD :

állóhullámok
csatolt rezgések
hullámok a mélyben
lebegés bemutatása
longitudinális hullámok
rezonancia
szökőár a konyhában
transzverzális hullámok

visszaverődésre :

$$\alpha = \alpha'$$



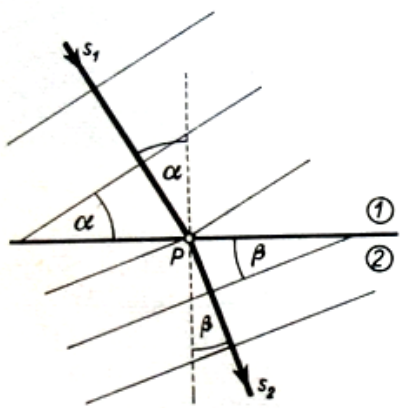
teljes visszaverődés

délibáb
„vizes úttest”
szivárvány
optikai kábel

optika, stb…

Snellius-Descartes-törv. :
törésmutató

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}$$



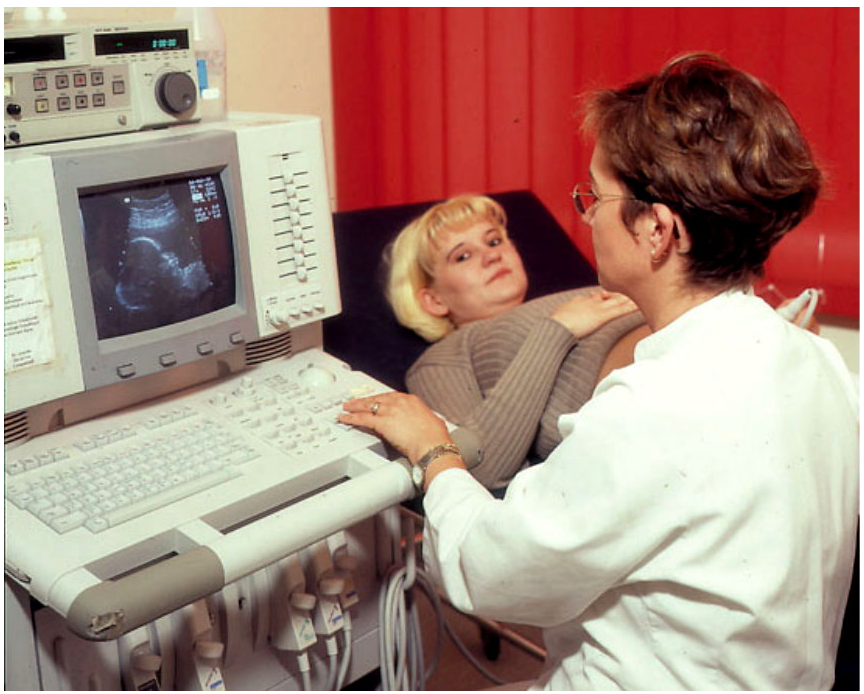
többdimenziós hullámok :

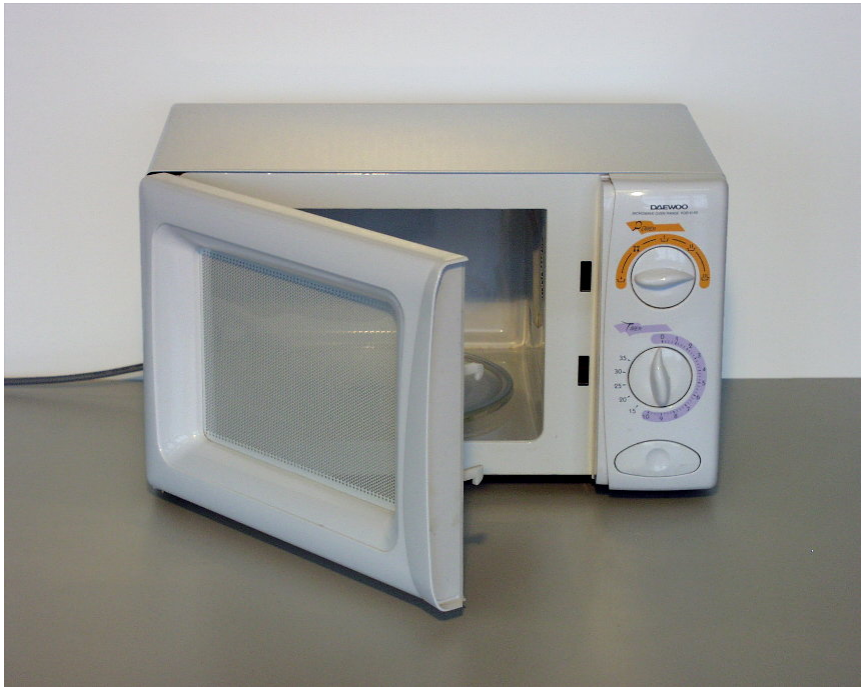
pl. víz felületén … (2D), hang (3D, pl. a robbanás)

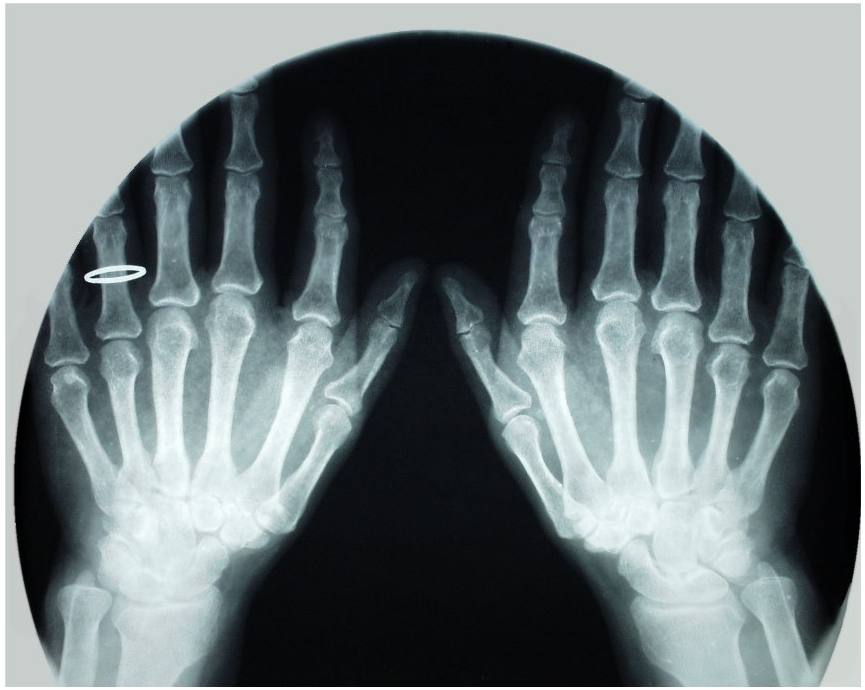
elhajlás
visszaverődés **Snellius-Descartes-törv.**
törés **törésmutató**
interferencia

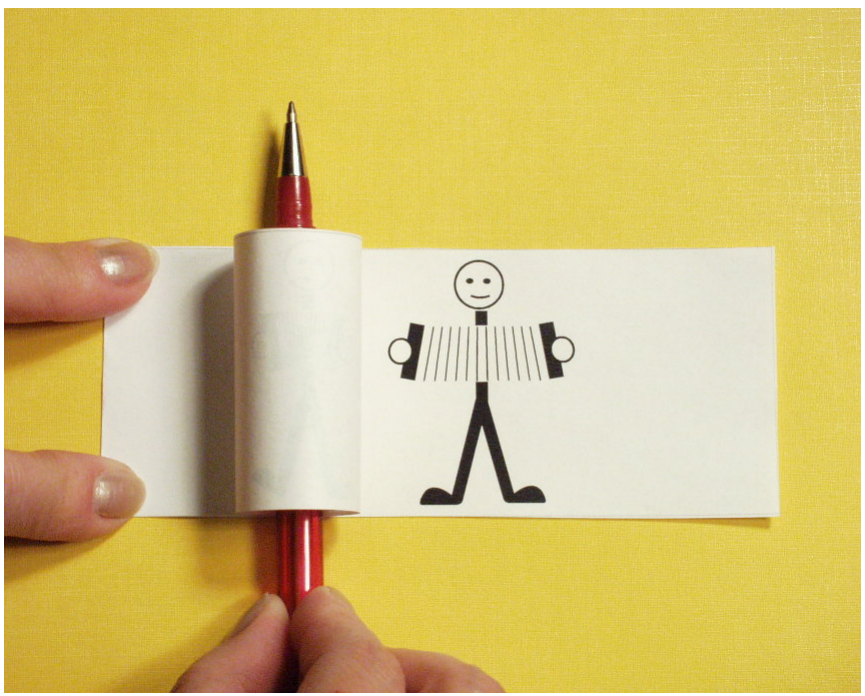
Huygens-elv
Huygens-Fresnel-elv

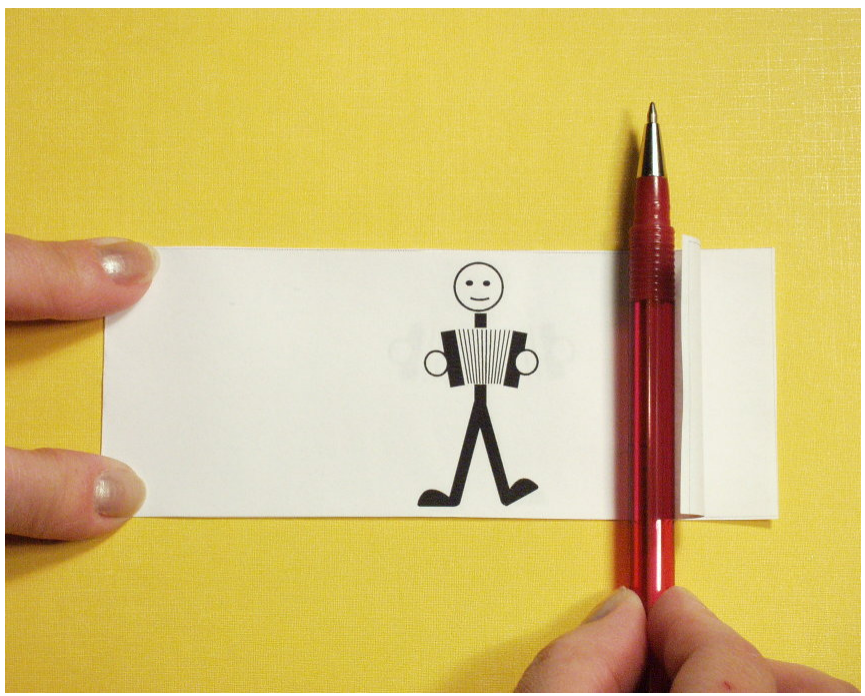
pl. : alkalmazások :



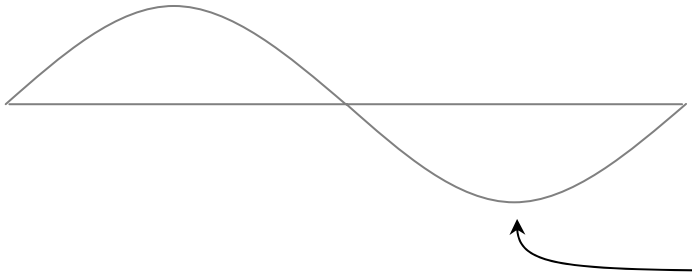

DAEWOO



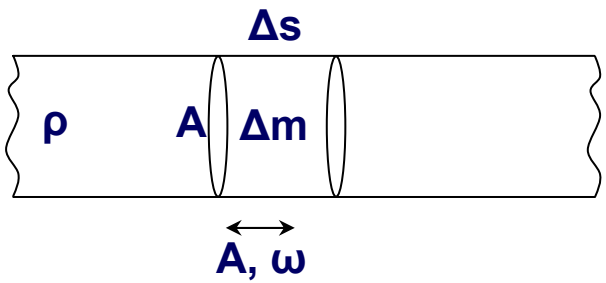




energiaterjedés hullámokban :



szélső helyzetben v = 0 és megnyúlás = 0



$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m \cdot v^2 + \frac{1}{2} D \cdot y^2 \qquad \left(D = \Delta m \cdot \omega^2\right)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m \cdot \left(A \cdot \omega\right)^2 \cdot cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}\Delta m \omega^2 \cdot \left(A \cdot sin(\omega t)\right)^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m \cdot A^2 \omega^2$$

energiasűrűség :

$$\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho \cdot A^2 \cdot \omega^2$$

intenzitás = felületegységen időegység alatt átáramló energia :

$$\left(\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A \cdot \Delta s = \rho \cdot A \cdot c \cdot \Delta t\right)$$

$$I = \frac{\Delta E}{A \cdot \Delta t} = \frac{1}{2}\rho c A^2 \omega^2$$

hangtan : 3D hullámjelenség

rezgés → közvetítő közeg → fül
(rugalmas hullám)

Kísérlet : közvetítő közeg = levegő → ha kiszivattyúzzuk, nem hallatszik :

vákuum-
szivattyú

hallható tartomány,
20 – 16000 Hz

infrahang,
20 Hz alatt

ultrahang
16kHz fölött

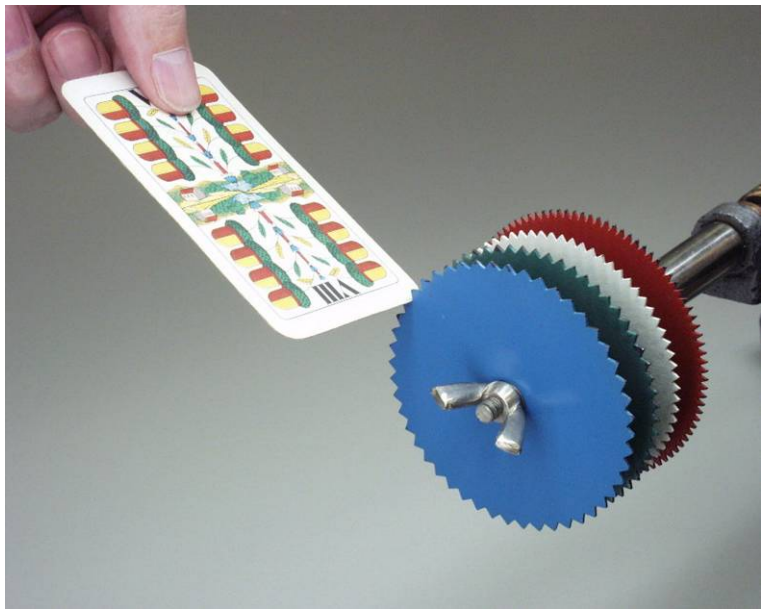
↓

épületek ledöntése : rezonancia

hangforrások : szirénák
húros hangszerek (mint a megfeszített drót rezgései, állóhullámok)
sípok (nyitott, vagy zárt végű)

Kísérlet :

hangkeltés kártyával : ⟶



vagy szirénával

hangmagasság : az alaprezg. frekv.-tól függ : nagyobb rezg.szám → magasabb hang (Galilei)

két hang viszonylagos magassága = hangköz = f_1/f_2

2:1 arányú hangköz = oktáv

20-16000 Hz → 10 oktáv (beszéd ≈ 1 oktáv, zene ≈ 7 oktáv)

hangszín : alaphang + a felharmonikusok frekvenciája és erősségétől függ

hanglebegés : $x_1 = A_1 \cdot \sin\omega_1 t$

$x_2 = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi)$

és $\omega_1 \neq \omega_2$

$$x = A(t) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

az ampl. változik az időben !!! :

ez a **lebegés**

lebegés frekv.-ja: $f = f_1 - f_2$

kísérlet : lebegés két dobozos hangvillával

a hang terjedése :

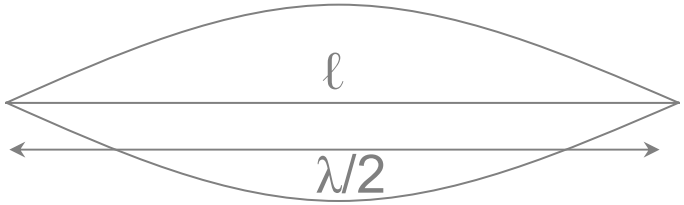
a terj. seb. függ a közegtől, hőm.-től, nyomástól,…

visszaverődés : visszhang, távolságmérés (pl. tengermélység, ultrahang denevér,…);
szócső, sztetoszkóp,…;

törés, elhajlás : a hang nagy táv.-ra is elhallatszik a földön : a kül. hőm.-ű levegőrétegekről visszaverődik;
pl. egy épületben mindenhol hallani a beszédet

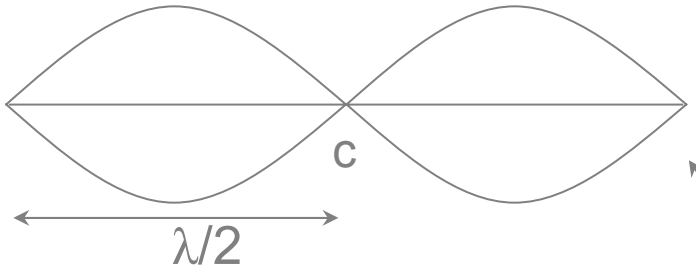
húrok rezgései :

alaphang :

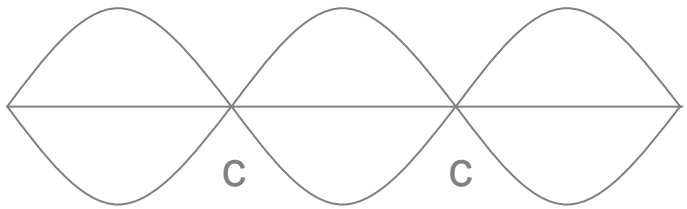


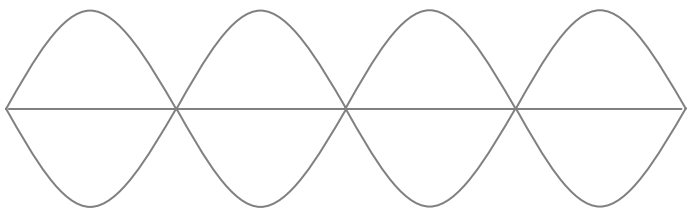
$$\ell = \frac{\lambda}{2}$$

felhangok :



$$\ell = 2 \cdot \frac{\lambda}{2}$$





$$\ell = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = n \cdot \frac{c}{2\ell}$$

pl. : hegedű, ld. korábban nagyobb ábrán

Kísérlet:

monokord :

ha a feszítőerőt 4x-re növeljük
ha a húr hosszát felére csökk. } → **az eredeti hang oktávját kapjuk**

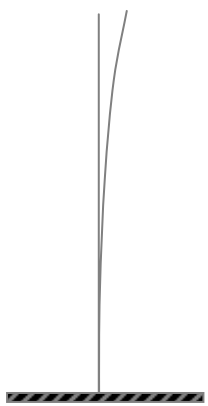
$$\nu_1 = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{F}{\rho \cdot q}}$$

a húr alaphangja

$$\nu_n = \frac{n}{2\ell}\sqrt{\frac{F}{\rho \cdot q}} = n \cdot \nu_1$$

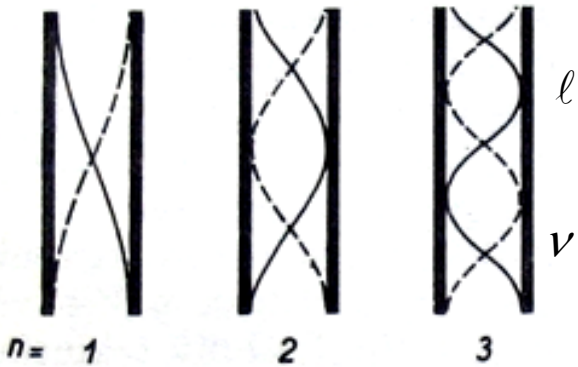
a felhangok (az alaphang harmonikusai)

pálcák rezgései :



→ **hangvilla**
doromb

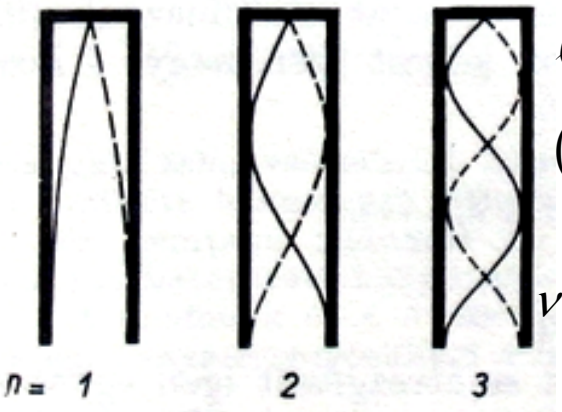
levegőoszlopok rezgései = sípok :



$$\ell = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$\downarrow$$

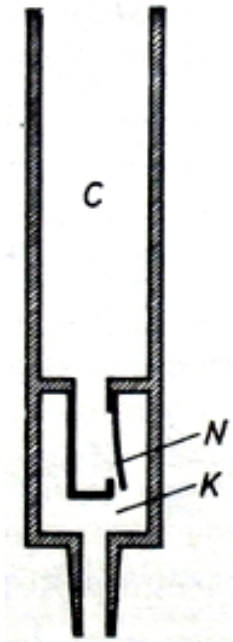
$$\nu = \frac{c}{\lambda} = n \cdot \frac{c}{2\ell}$$



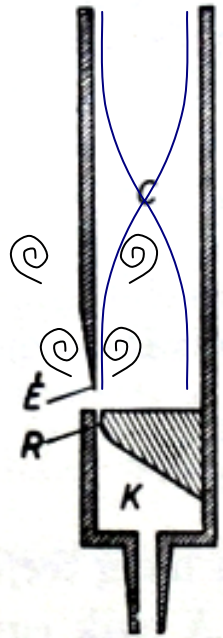
$$\ell = (2n-1) \cdot \frac{\lambda}{4}$$

$$\downarrow$$

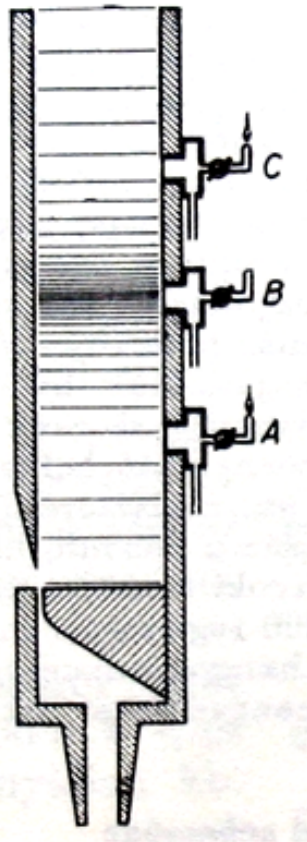
$$\nu = (2n-1) \cdot \frac{c}{4\ell}$$



nyelvsíp



ajaksíp

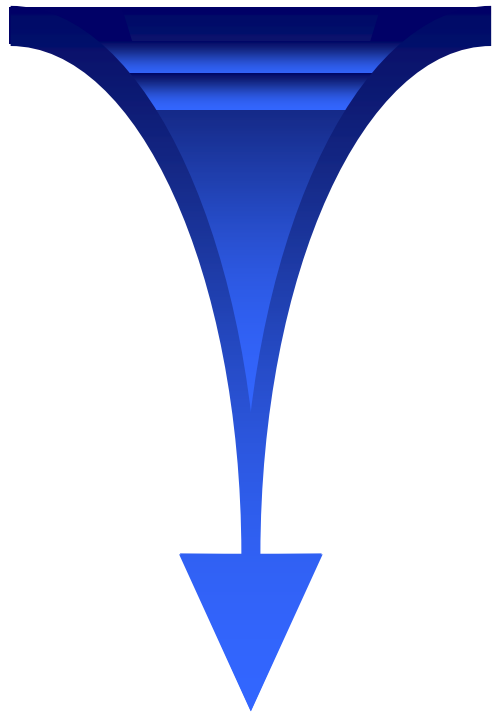


Kísérlet: sípok, furulya, stb…; sörösüveg;
hártyák (pl. dob), lemezek rezgései (Chladni-féle ábrák – ld. korábban)

Bagány Máté …

trombita :

maestro music1.wmv



ELEKTROMOSSÁGTAN

és

HŐTAN

ld. Fizika_II – ben