

MECHANIKA

1. félév

2006

Munka-, tűz-, polgári-, vagyonvédelmi oktatás

„t a r t a l o m j e g y z é k ”

Bevezetés

a fizika tárgya, helye a term.tudományok körében, a fizikai megismerés folyamata és módszerei, a fizikai mennyiségek jellege, mértékrendszerek, alapmennyiségek

Kinematika

anyagi pont egyenes vonalú és görbe vonalú mozgása
egyenletes és egyenletesen változó mozgások
merev testek mozgásai

Dinamika

Newton törvényei, impulzus, erő
alapvető fizikai kölcsönhatások (erőtörvények)
munka, energia
égi mechanika
mozgó vonatkoztatási rendszer
speciális relativitáselmélet
pontrendszer mechanikája
merev testek
deformálható testek
rezgések, hullámok
hangtan

irodalom :

1. Budó Á.: Kísérleti Fizika I.
2. Holics L.: Fizika I-II.
3. középiskolás fizika tankönyvek
4. Öveges könyvek
5. Tasnádi-Bérces-Skrapits-Litz:
Mechanika I-II + Hőtan



a fizika helye a természet- tudományok körében

élettelen természet vizsgálata

cél: a természeti jelenségek tanulmányozása,
objektív törvények megismerése, ezek
érvényességi határainak vizsgálata, és
a törvények gyakorlati alkalmazása

de : kémia, földtudomány, csillagászat is
interdiszciplináris alkalmazások (pl. kristályok vizsgálata)

a fizikai megismerés folyamata

konkrét $\Rightarrow$ általános

induktív

általános $\Rightarrow$ konkrét

deduktív

 megfigyelés = {
spontán tapasztalás (alma leesik a fáról)
tudatos kísérletezés  **mérés**

- *a fizikai jelenségek vizsgálata mesterséges körülmények között*
- kezdeti feltételek
- egyszerre csak egy fizikai mennyiséget változtatunk miközben egy másik változását regisztráljuk (ejtegetős kísérleteket végzünk)

megfigyelés



következtetés :

a Föld vonzza a többi testet

modell / elmélet alkotás :

Newton-féle gravitációs **törvény**

hipotézis / jóslás :

vajon bármelyik két test
vonzza egymást ?

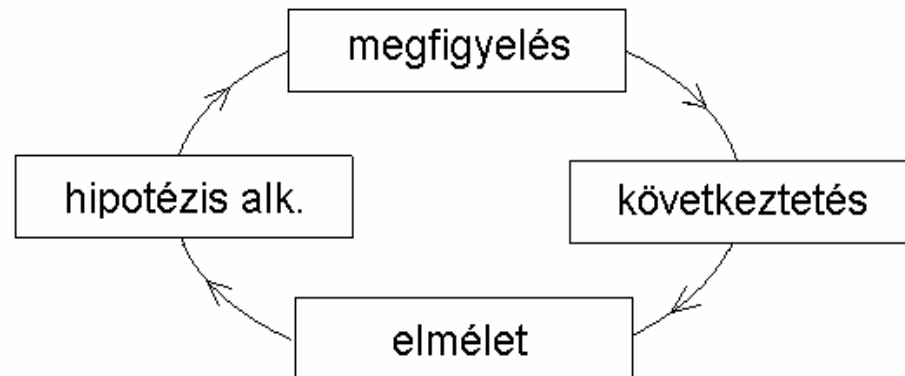


újabb kísérlet, megfigyelés



igen

*(fizikai mennyiségek
közötti összefüggések)*



a fizikai mennyiségek jellege

skalár = szám : csak nagysága van pl. tömeg

vektor = szám + irány : nagyság + irány is pl. erő

de más jellegű mennyiség is van még

(pl. mechanikai feszültség)

+ **mértékegység**

a különböző egységek nem hasonlíthatók össze !!!

műveletek vektorokkal

(+, -, skalárral szorzás,

skaláris szorzás, vektori szorzás)

öszeadódó (extenzív)	}	mennyiségek	{	pl. tömeg
kiegyenlítő (intenzív)				pl. hőmérséklet

mértérendszer, alapegységek

általában **SI** :

<i>alapegységek:</i> hosszúság,	méter	[m]
tömeg,	kilogramm	[kg]
idő,	másodperc	[s]
elektromos áramerősség,	amper	[A]
hőmérséklet,	kelvin	[K]
anyagmennyiség,	mól	[mol]
fényerősség,	kandela	[cd]

kiegészítő egységek: síkszög, radián [rad]
térszög, szteradian [sr]

származtatott egységek:

az alap- és kiegészítő egységekből algebrai műveletekkel

pl : sebesség [m/s], erő [$\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$], ...

nem SI-egységrendszer (pl USA):
inch, coll, hüvelyk, láb, mérföld, gallon, Fahrenheit, stb ...

előtétyszavak:

...					
exa	E	10^{18}	deci	d	10^{-1}
peta	P	10^{15}	centi	c	10^{-2}
tera	T	10^{12}	milli	m	10^{-3}
giga	G	10^9	mikro	μ	10^{-6}
mega	M	10^6	nano	n	10^{-9}
kilo	k	10^3	piko	p	10^{-12}
hekto	h	10^2	femto	f	10^{-15}
deka	da	10^1	atto	a	10^{-18}

...

pl : gigawatt , megawatt	erőművek teljesítménye
kilowattóra	háztartások energiafogyasztása
kilogramm	pl, alma, kenyér, stb... tömege
kilométer	távolság
de pl. a számítástechnikában 1 kilo = $2^{10} = 1024$!	
hektoliter	hordók űrtartalma
deciliter	kisebb edények űrtartalma
centiliter	még kisebb űrtartalom
deciméter , cm, mm, nm	távolságok
cg, mg, μg	kis tömegek

az ezektől kisebb ill. nagyobb egységek az atomi és még kisebb mérettartományban előforduló távolságok és energiák jellemzésére használatos

egyéb, nem SI, de használt mértékegységek:

fok, perc, másodperc (szögmérés)

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

angström (Å)

$$= 10^{-10} \text{ m}$$

fényév (távolság !!!)

$$\approx 9.46 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

hektár (ha)

$$100 \text{ m} \times 100 \text{ m}$$

liter (ℓ)

$$= 1 \text{ dm}^3$$

mázsa (q)

$$= 100 \text{ kg}$$

tonna (t)

$$= 1000 \text{ kg}$$

óra, perc, másodperc (időmérés; és év, nap, hónap, stb...)

km/h

$$3.6 \text{ km/h} = 1 \text{ m/s}$$

atmoszféra (atm)

$$= 101325 \text{ Pa}$$

bar, mbar

$$= 10^5 \text{ Pa}$$

kalória (cal)

$$= 4.1868 \text{ J}$$

kilowattóra (kWh)

$$1 \text{ Wh} = 3600 \text{ J}$$

lóerő (LE)

$$\approx 736 \text{ W}$$

celsius fok

$$0 \text{ C}^\circ \approx 273 \text{ K}$$

stb

MECHANIKA

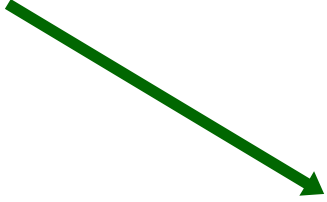
= mozgások vizsgálata
(= helyváltoztatás)



kinematika

*a mozgás leírása a szemlélő
szemszögéből.
nem keres okokat.*

- *pálya*
- *elmozdulás, elfordulás*
- *sebesség, szögsebesség*
- *gyorsulás, szöggyorsulás*



dinamika

*a mozgásfajták, a
változások **okait** vizsgálja.*

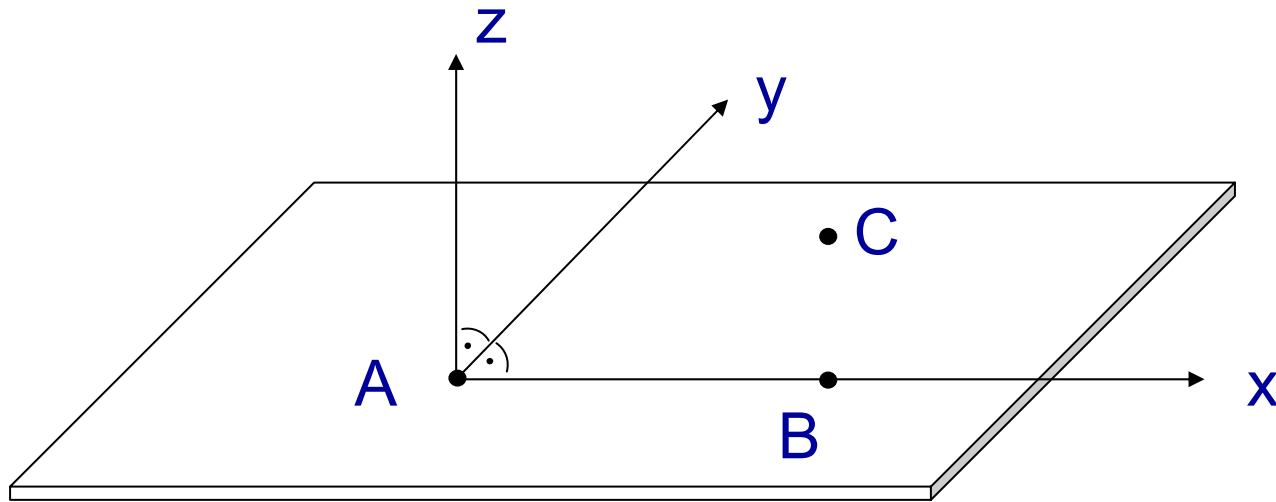
- *tömeg,*
tehetetlenségi nyomaték
- *erő, forgatónyomaték*
- *lendület, perdület*
- *energia*

vonatkoztatási rendszer : koordinátarendszer

koordinátarendszer :

három, nem egy egyenesen levő ponthoz lehet viszonyítani

vagy az ezekre illesztett tengelyekhez :



x-y-z jobbsodrású rendszer legyen

pl. egy merev testen kijelölhetjük ezeket a pontokat

földrajzi hely megadása:

origó a Föld kp.-ja

z-tengely a Sarkcsillag felé mutat, az yz sík átmegy a Greenwich angol falu csillagvizsgálóján

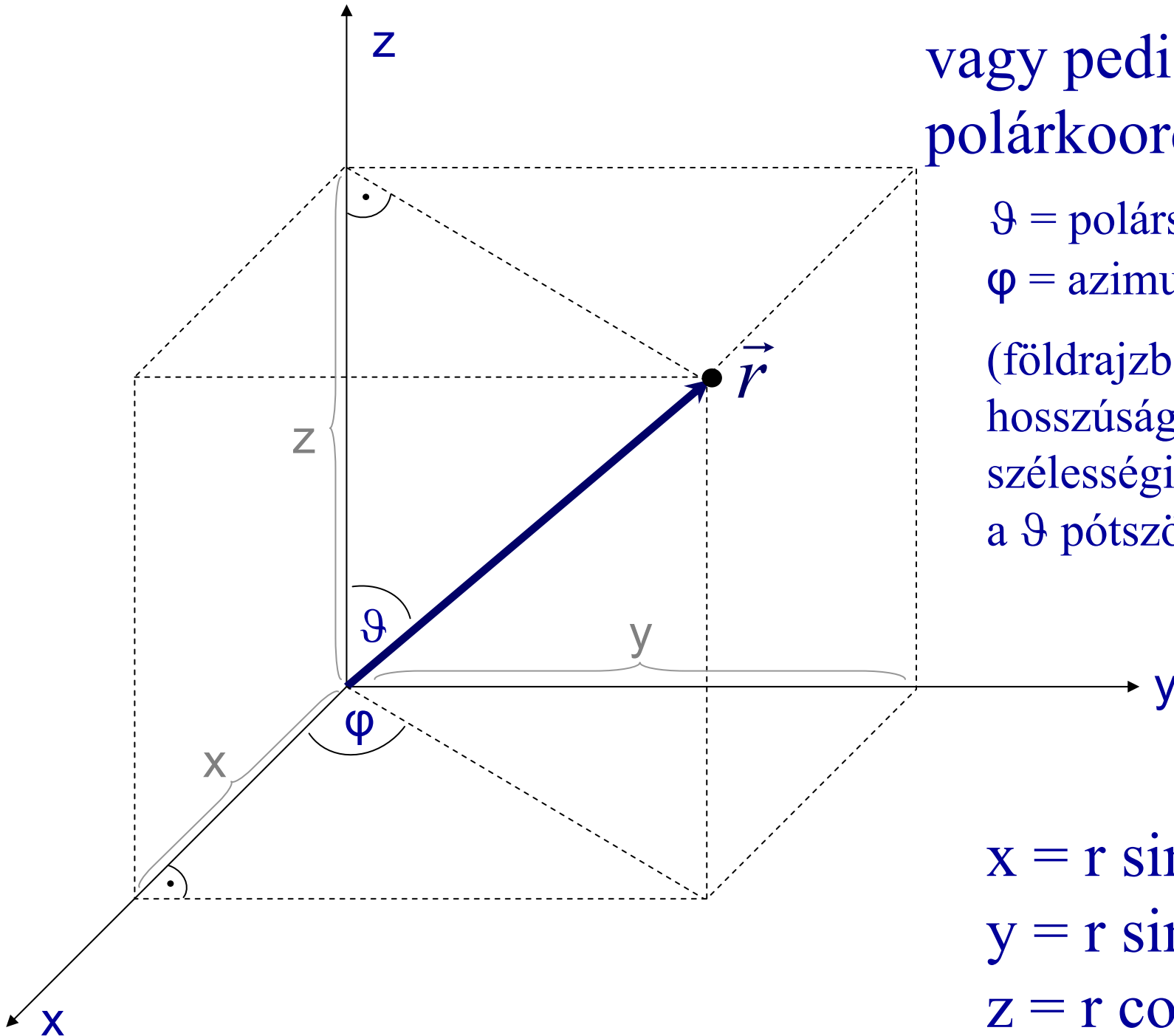
munkadarabon furandó lyuk helyének megadása:

a munkadarab élei a koordináta-tengelyek (tervrajz)

épületek, stb...

derékszögű koordinátarendszer:

pont helyzete = az yz, zx és xy síktól mért távolságok (vagyis az x-, y- és z-tengelyekre vett merőleges vetületek)



vagy pedig
polárkoordináták:

ϑ = polárszög

φ = azimutszög

(földrajzban ez a
hosszúsági fok, a
szélességi fok pedig
a ϑ pótszöge)

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

∞ sok, ehhez képest nem mozgó újabb koord.rdsz. is
megadható  **vonatkoztatási rendszer**

nem kell anyaghoz hozzárendelni

pontszerű testek	pl. Föld a Nap körül, v. vonat BP és NyH között...
pontrendszerek	pl. felrobbanó bomba repeszei, tűzijáték, ...
merev testek	pl. forgó pörgettyű, falhoz támasztott létra, ...

hétköznapi életünk során a vonatkoztatási rendszer
a **Föld**
(eltekintünk a forgástól)

kinematika

mozgás jellemzése :

milyen **pályán** mozog

mennyi **idő** alatt mennyi **utat**

tett meg, vagy :

mekkora **elmozdulása** van...

idő, időtartam, időpillanat, esemény

idő = két esemény közötti időtartam

időmérés : *periodikus* folyamatok alapján („órák”)

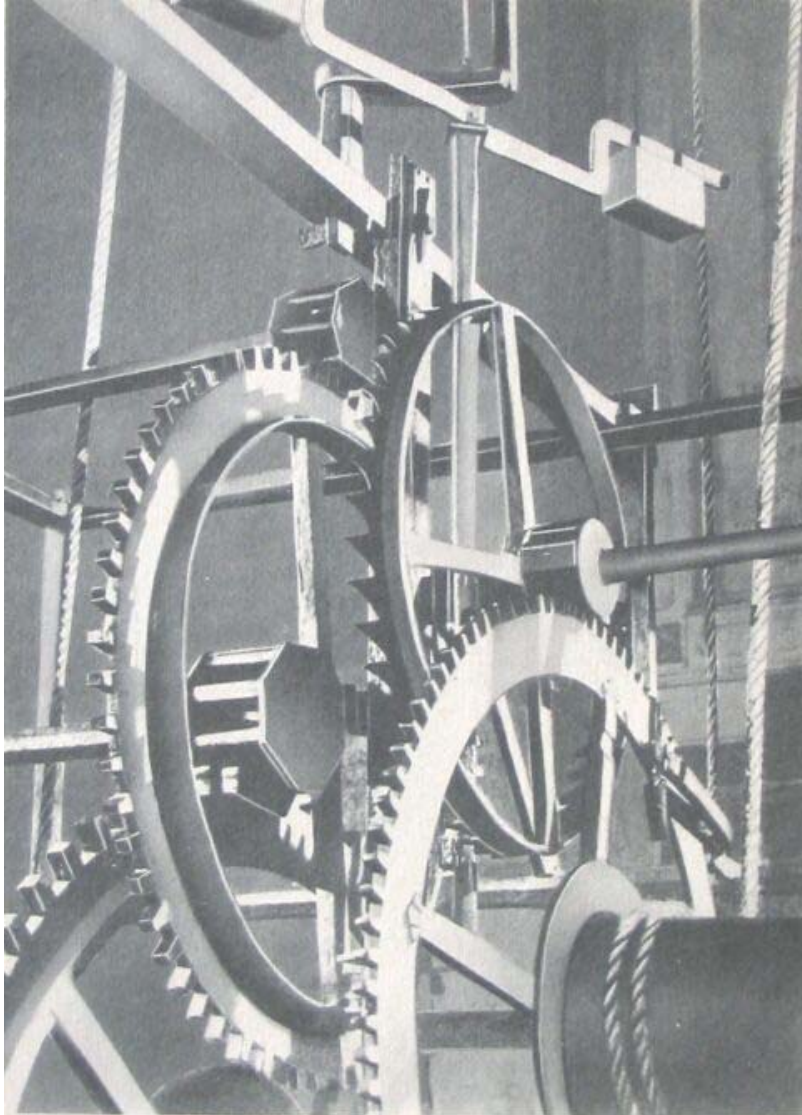
pl. csillagok járása, homokóra fordítgatása, stb...

Galilei (1583) : ingalengések egyenlő időtartamúak

 első ingaóra

(kevésbé pontos órák már előtte is voltak)

a legrégebbi mechanikai időmérő szerkezet
1386, Anglia



legpontosabb óra
atomóra (Cs)

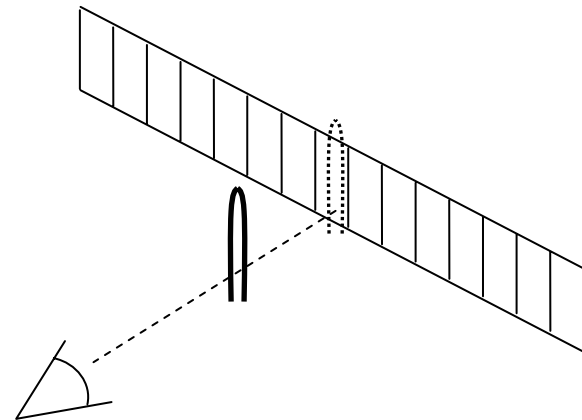
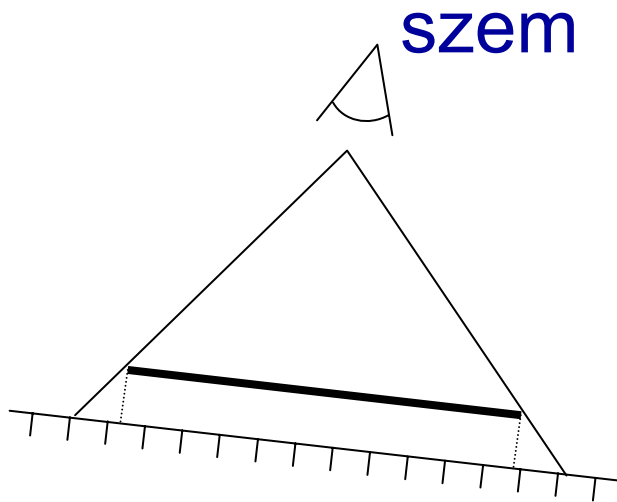
idő egysége :
másodperc

$1s = 9192631,770$
Cs-rezgés

**távolságmérés : a *méter-etalon*nal való összehason-
lítás alapján („vonalzók”)**

végpontok összeillesztése, 0 jelzés

**ha nem lehet egymás mellé tenni:
leolvasás párhuzamos fénysugarakkal (tükörskála)**

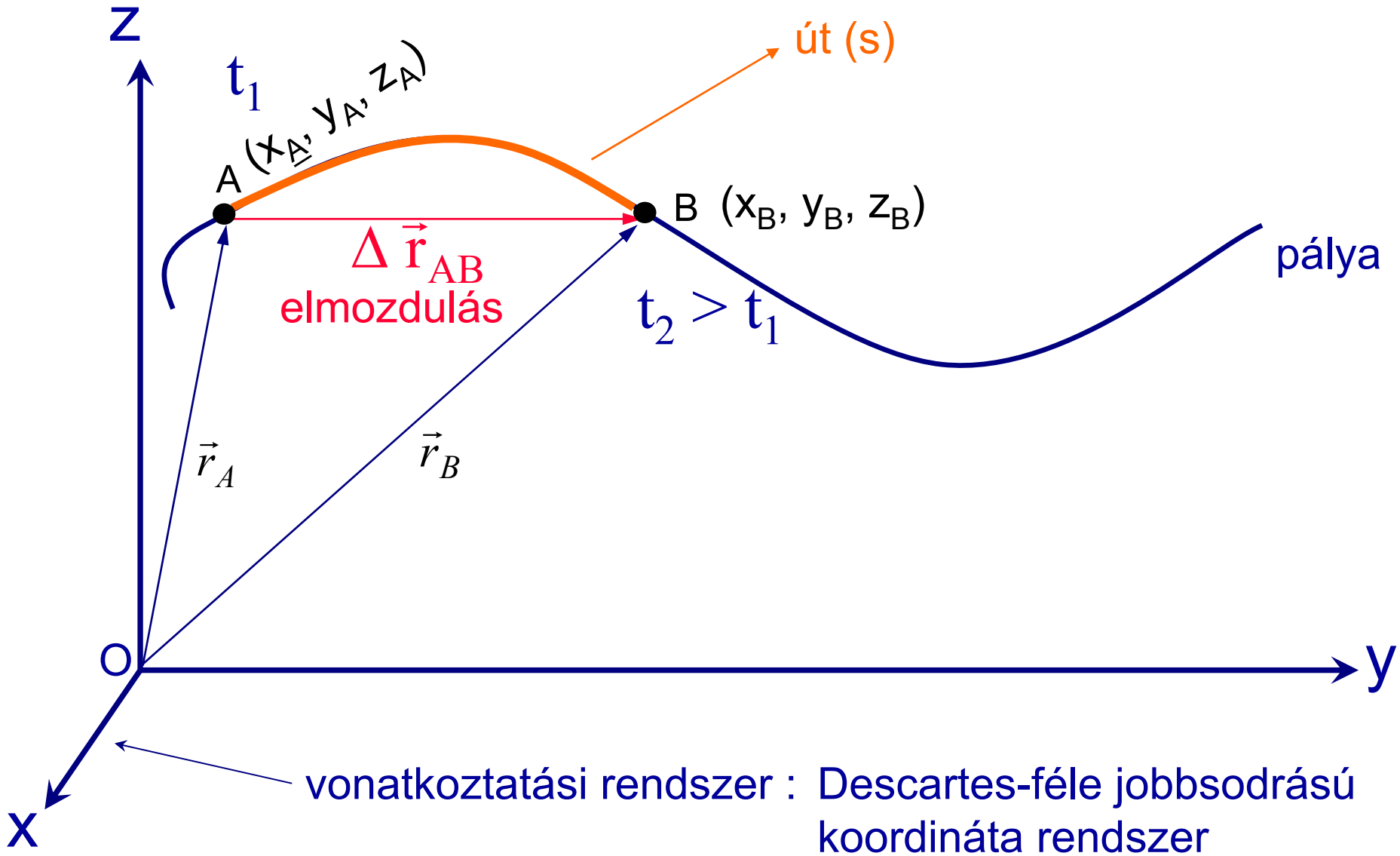


leolvasás pontosságának növelése : optikai eszközök
finommechanika (csavarmikrométer), nóniusz

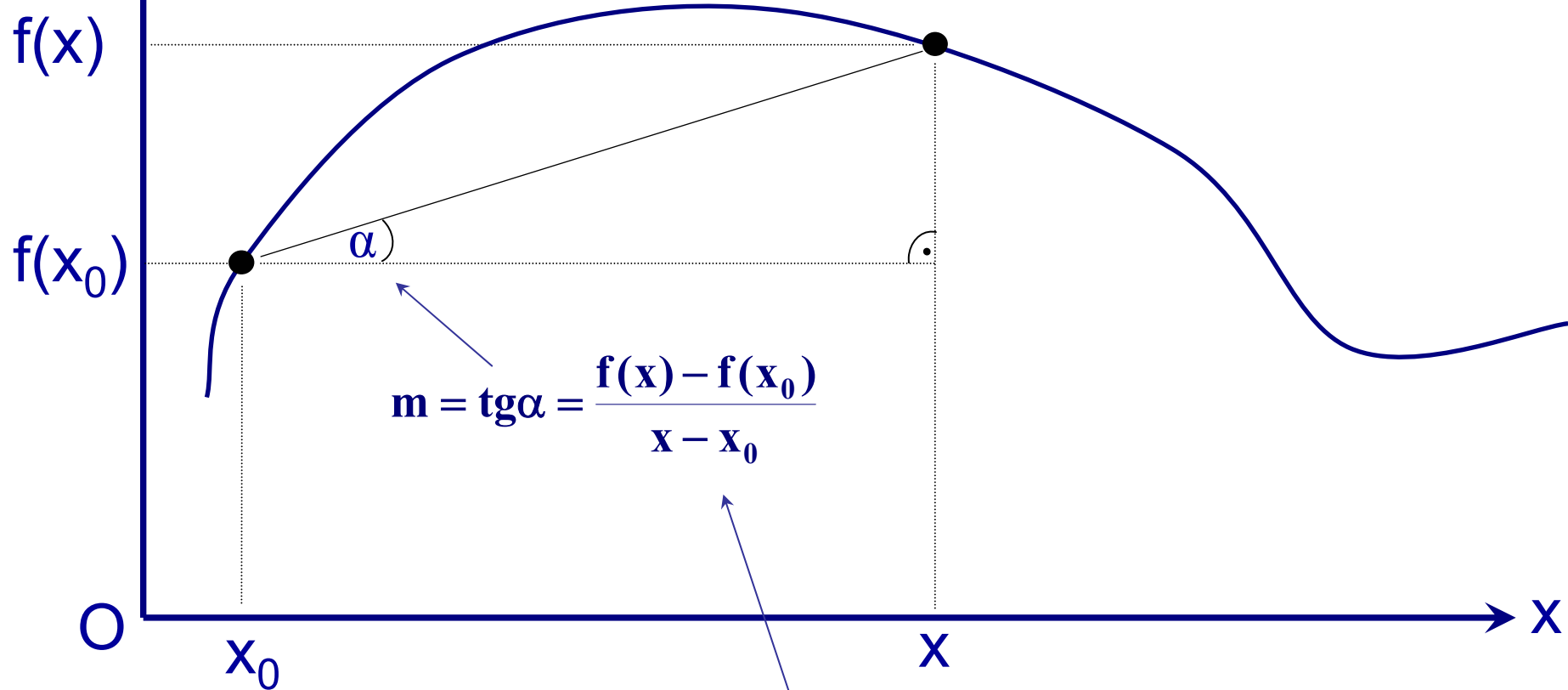
mérési pontatlanságok  pl :
 $\ell = (3,46 \pm 0,07) \text{ cm}$

labor

mozgás jellemzése :

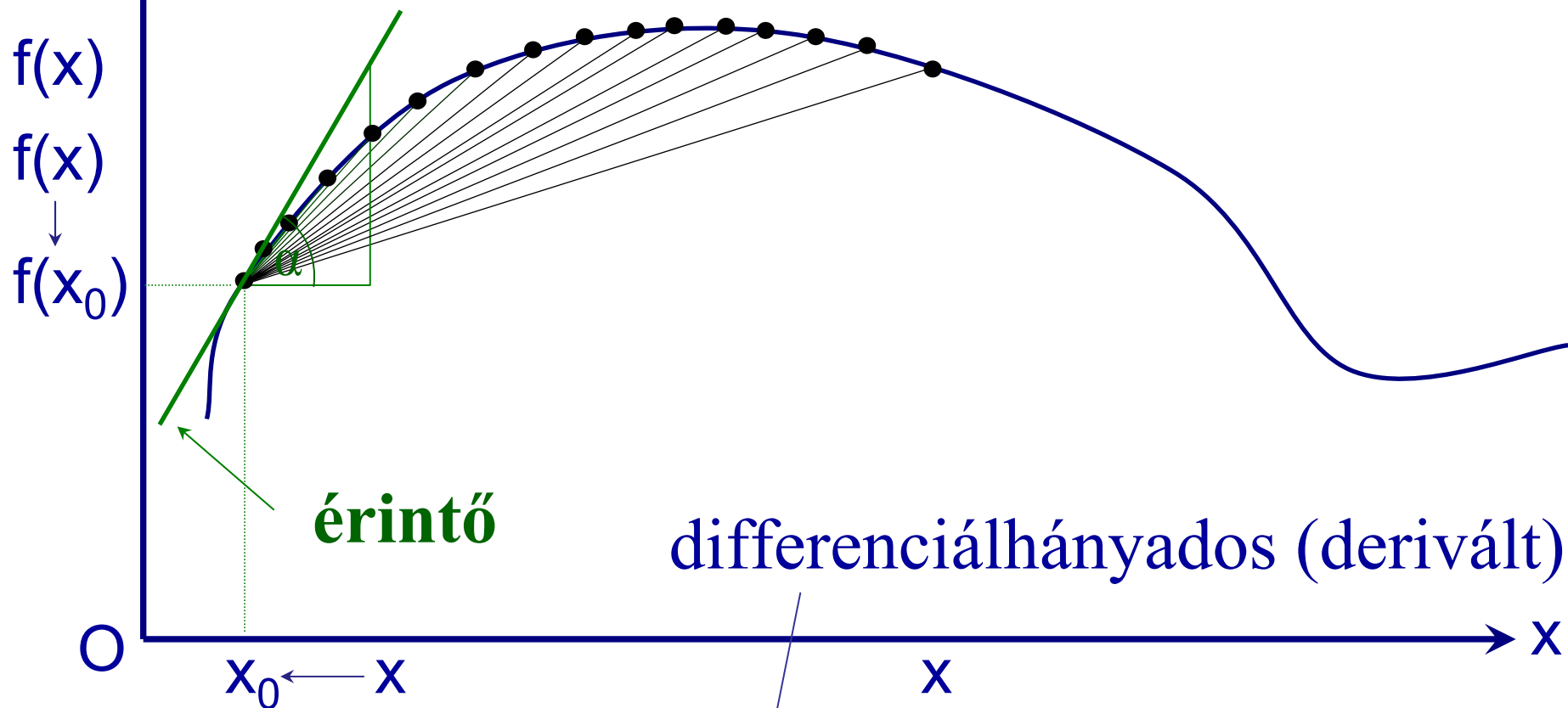


$y = f(x)$ (pl. a hely az idő fgv.-ben)



differentiálhányados

$y = f(x)$ (pl. a hely az idő fgv.-ben)

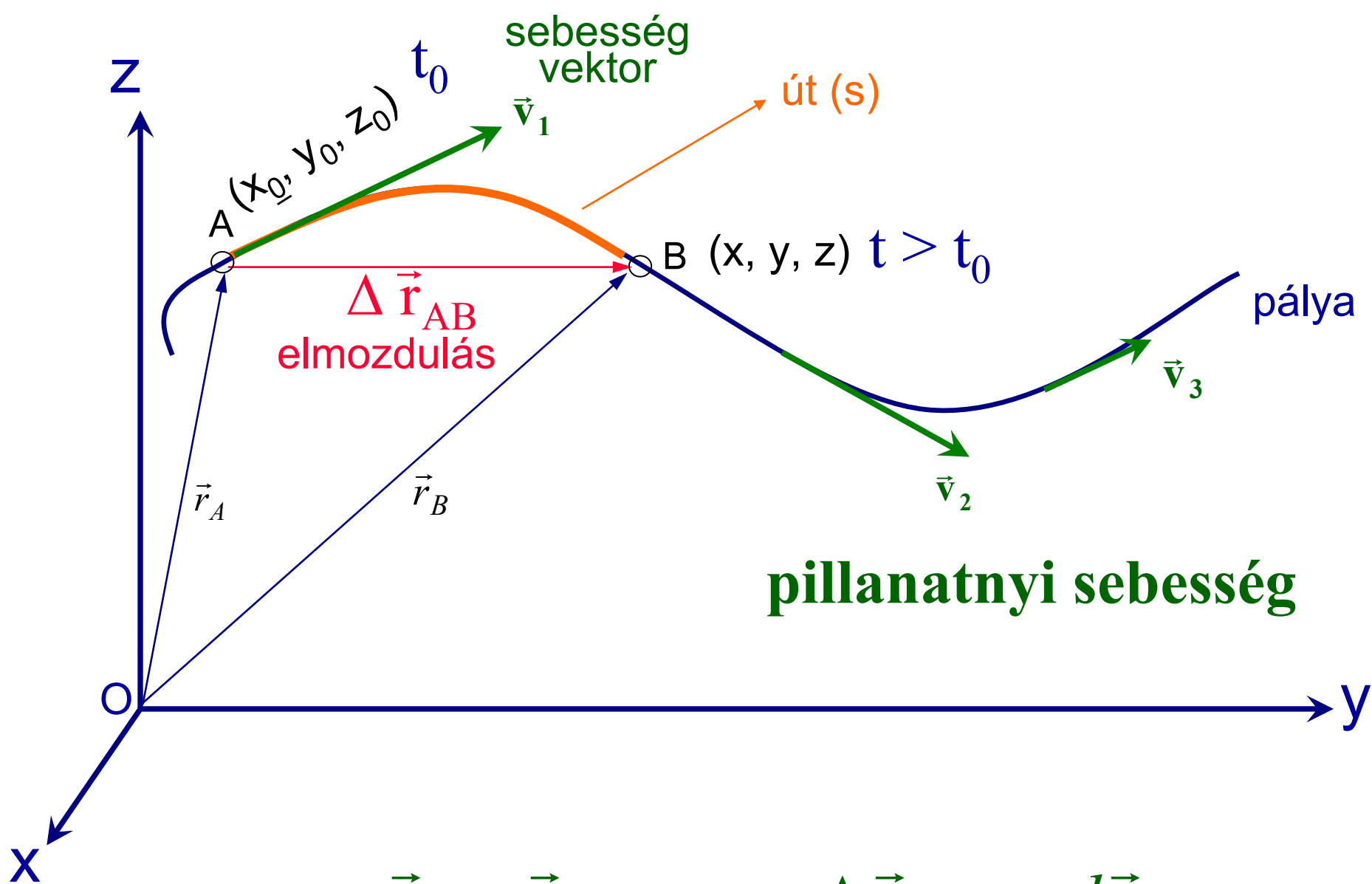


differentiálhányados (derivált)

$$m = (\operatorname{tg} \alpha) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x)$$

ha időfüggés van ($x = t$) :

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \dot{f}(t)$$



$$\vec{v} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{AB}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

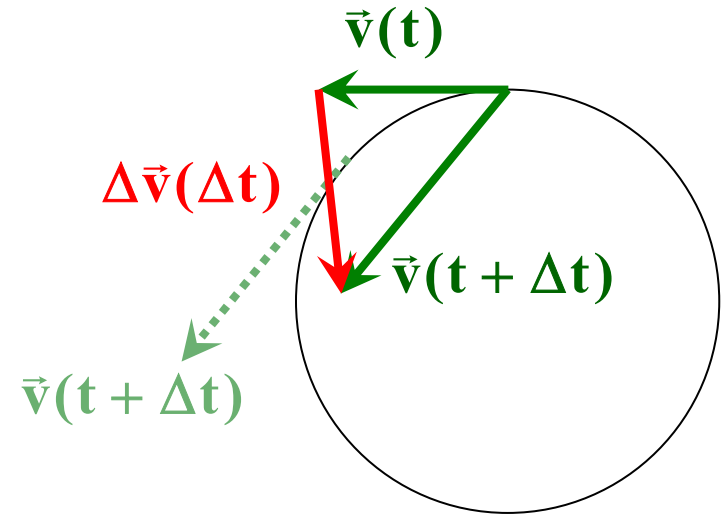
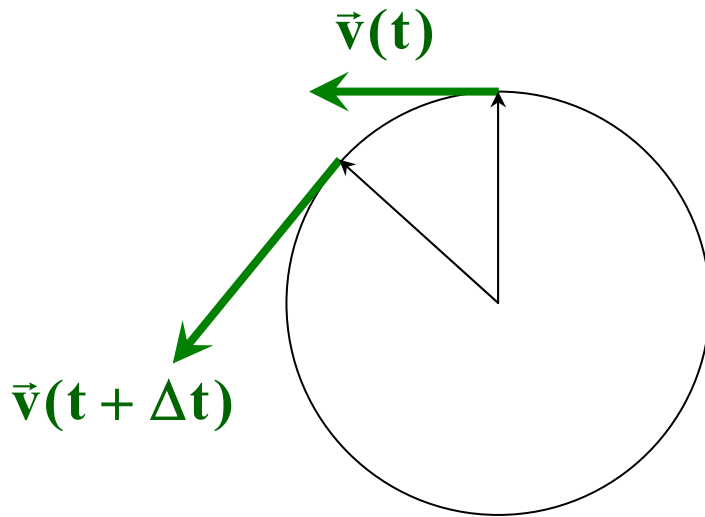
sebességvektor időben változhat



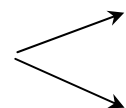
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d \vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$



gyorsulásvektor



gyorsulásvektor

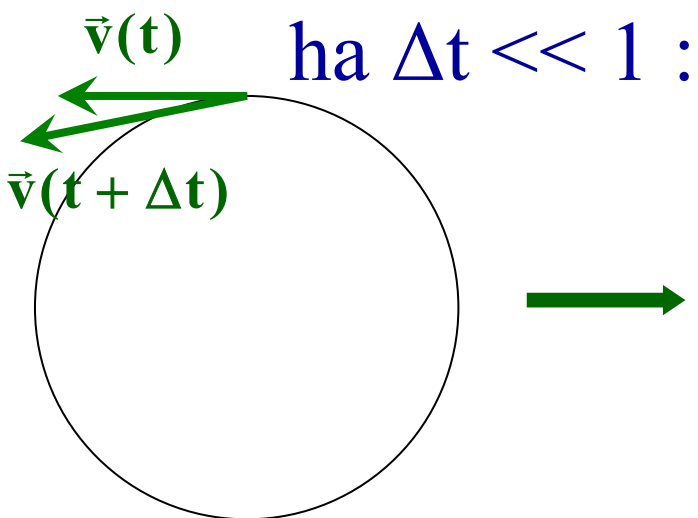


tangenciális, a_t

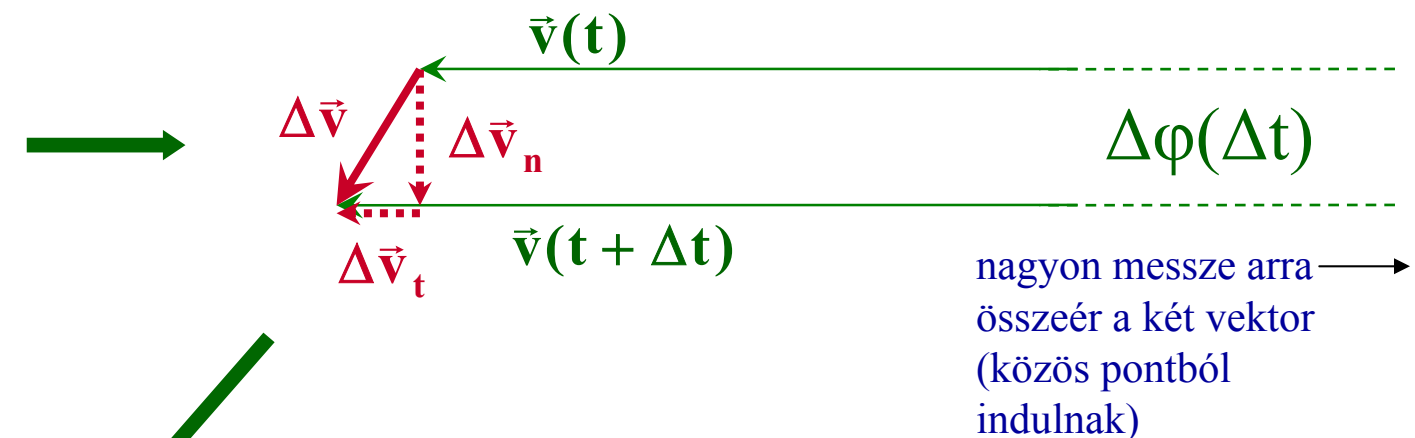
centripetális, a_{cp}

$$\Delta |\vec{v}|$$

$$\Delta \vec{v}$$



kinagyítva :



$$\left. \begin{aligned} |\Delta \vec{v}_t| &= |\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)| \\ |\Delta \vec{v}_n| &= v(t) \cdot \Delta \varphi_v \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} / \Delta t \text{ és} \\ \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \end{array} \left\{ \begin{aligned} \mathbf{a}_t &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} \left(\equiv \ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{r} \cdot \ddot{\varphi} = \mathbf{r} \cdot \beta \right) \\ \mathbf{a}_n &= \mathbf{v}(t) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi_v}{\Delta t} \left(= \mathbf{r} \cdot \omega^2 = \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{r}} \right) \end{aligned} \right.$$

mozgásfajták

haladó mozgás

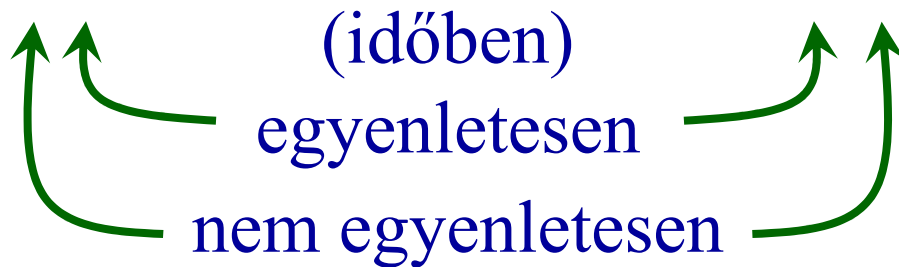
- egyenletes
- változó

*körmozgás,
forgó mozgás*

- egyenletes
- változó

*rezgőmozgás,
hullámmozgás*

- harmonikus
- anharmonikus



pl. : haladó mozgás :

pl. vonat a sinen, gyalogos a járdán, stb...

legegyszerűbb mozgás :

egyenesvonalú egyenletes mozgás:

pálya : egyenes

sebesség : időben állandó

(vektor !) $\longrightarrow \vec{a} = 0$

pl. : vonat a nyílt egyenes pályán
mozgólépcső, ...

kísérlet :

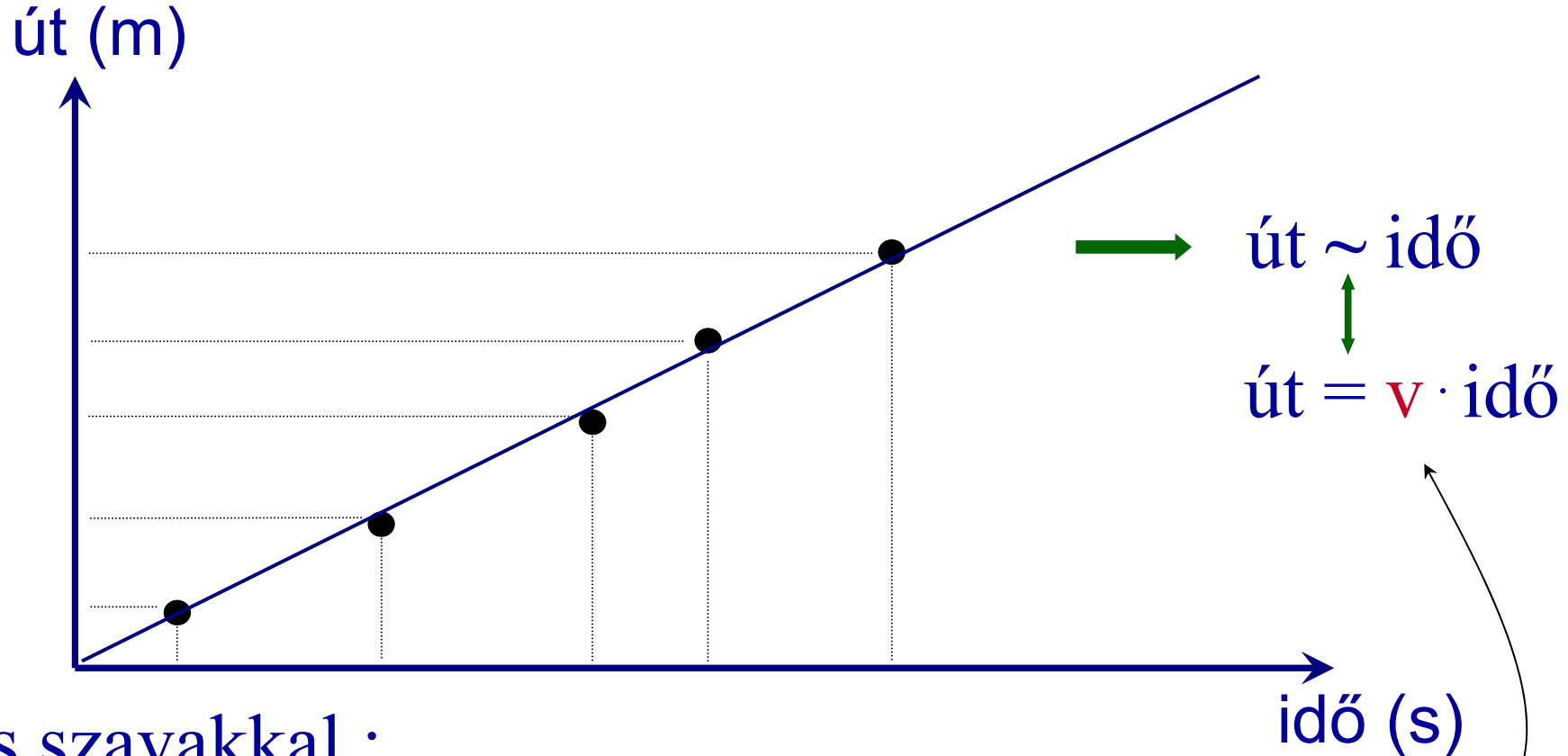
Mikola-cső

 (gimnáziumi tanár volt
a múlt század első felében)

tapasztalat :

a buborék által megtett utak az idők
függvényében egyenest adnak :

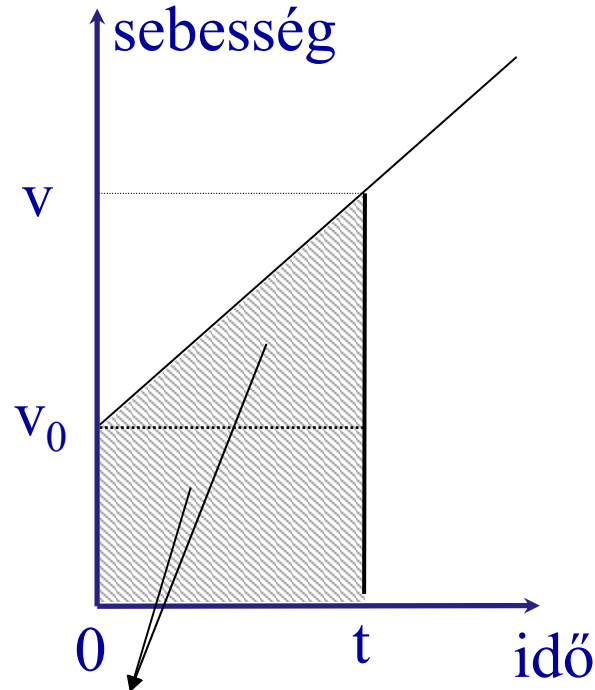
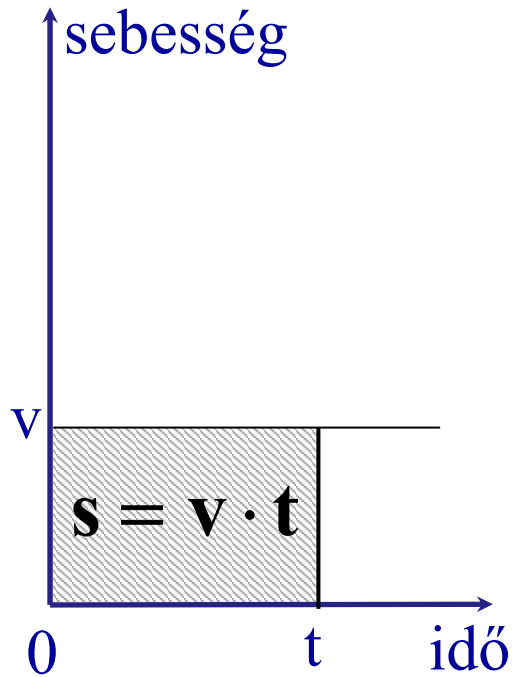
tapasztalat : a buborék által megtett utak az idők függvényében egyenest adnak :



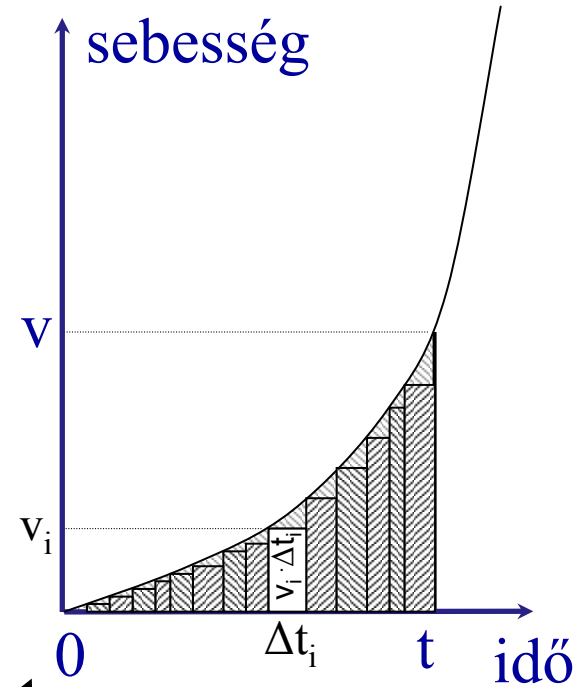
más szavakkal :
az egyforma idők alatt megtett utak egyformák

$$v = \frac{\text{megtett út}}{\text{közben eltelt idő}} \equiv \frac{s}{t} = \text{sebesség}$$

a megtett út meghatározása a v-t grafikonról :



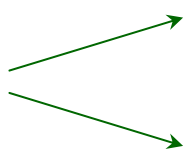
$$s = v_0 \cdot t + \frac{v - v_0}{2} \cdot t$$



$$s \approx s_0 + \sum_{i=1}^n v_i(t_i) \cdot \Delta t_i$$

út = görbe alatti terület

$$s = s_0 + \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

sebesség  **pillanatnyi sebesség**
átlagsebesség

pl. : autó v. vonat NyH és BP között,
időnként megáll

feladat : egy gépkocsi egy utat odafele 60 km/h sebességgel,
visszafele 80 km/h sebességgel tesz meg. Mekkora a
teljes (oda-vissza) útra számított átlagsebessége ?
(68.5 km/h)

átlagsebesség $\neq$ sebességek átlaga !!! $\bar{\mathbf{v}} = \frac{\text{összes út}}{\text{összes idő}}$

(mert lassabban hosszabb ideig megy)

hasonlóan „egyszerű” mozgás még :

egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás:

pálya : egyenes

sebességvektor : időben nem állandó :

iránya állandó

nagysága időben egyenletesen nő

 $\vec{a} > 0 \quad (\mathbf{a}_t)$

pl. : vonat az állomásról elindul
és gyorsít (egyenes pályán)

kísérlet :

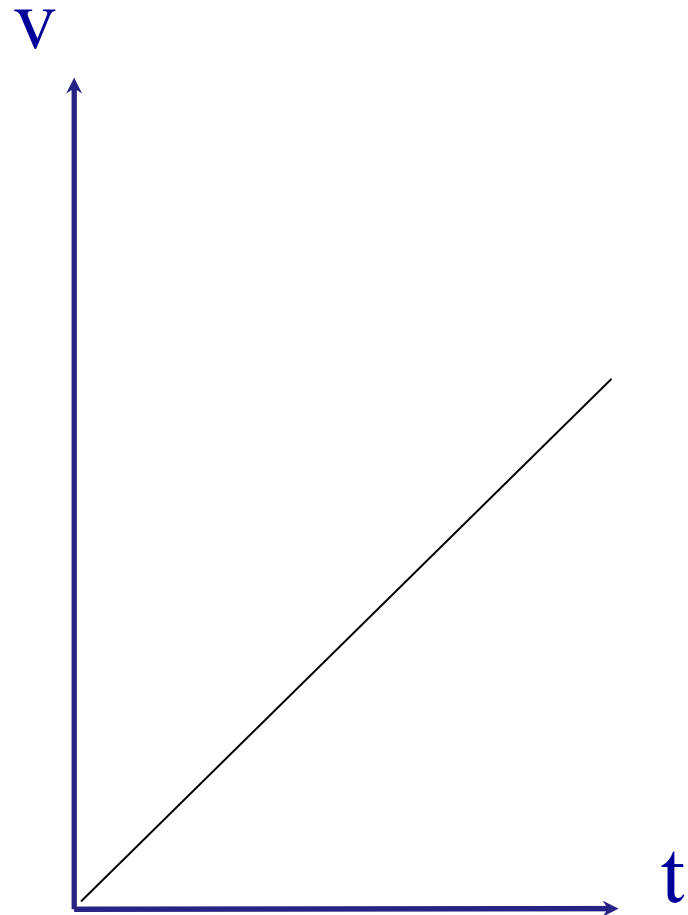
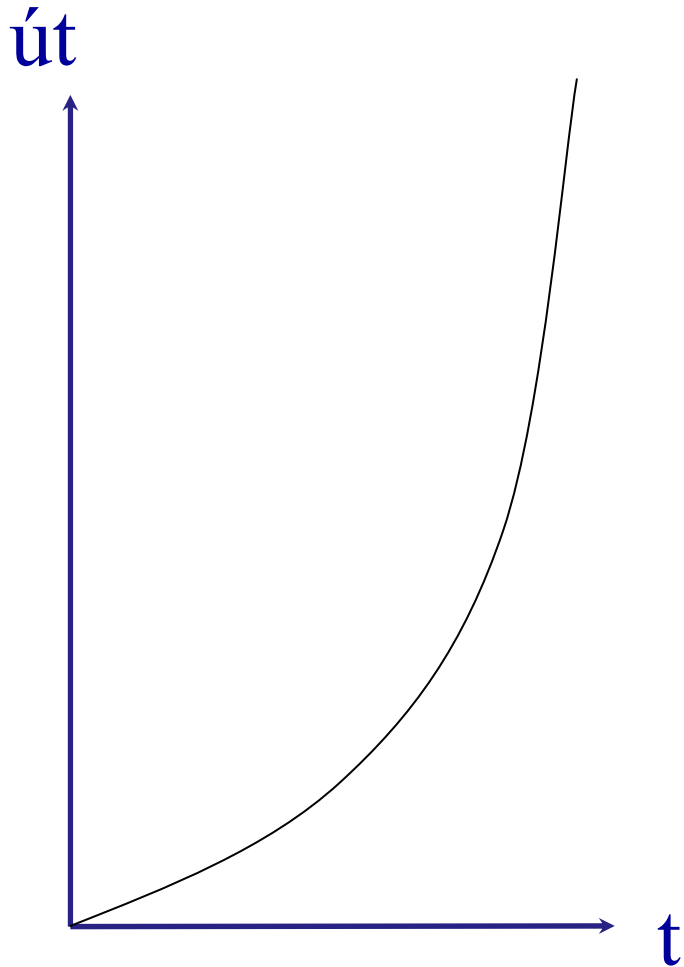
lejtőn leguruló golyó
(különböző hajlásszögeknél)

tapasztalat : $s \sim t^2 \longrightarrow$ parabola

$s \sim t^2$ konkrétan :

$$s = \frac{\mathbf{a}}{2} \cdot t^2 \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot t$$

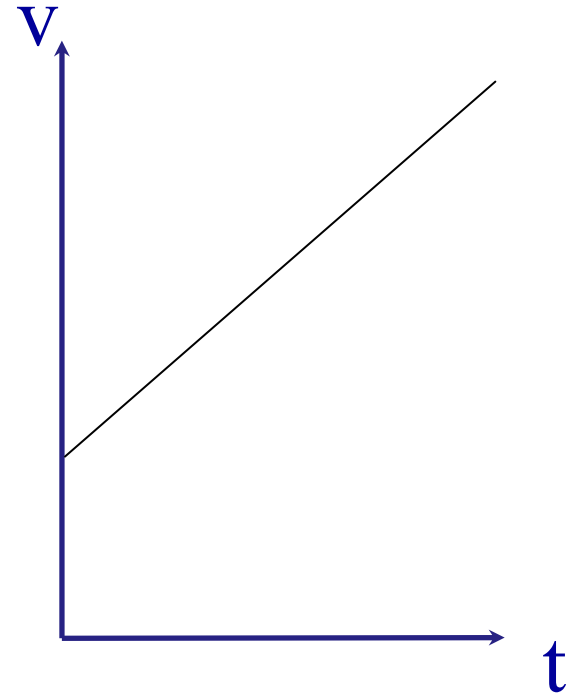
gyorsulás



lassulásnál : $-\mathbf{a}$

nem nulla kezdősebességről
induló mozgás :

$$\mathbf{s} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{t} + \frac{\mathbf{a}}{2} \cdot \mathbf{t}^2 \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{t}$$



szabadesés :

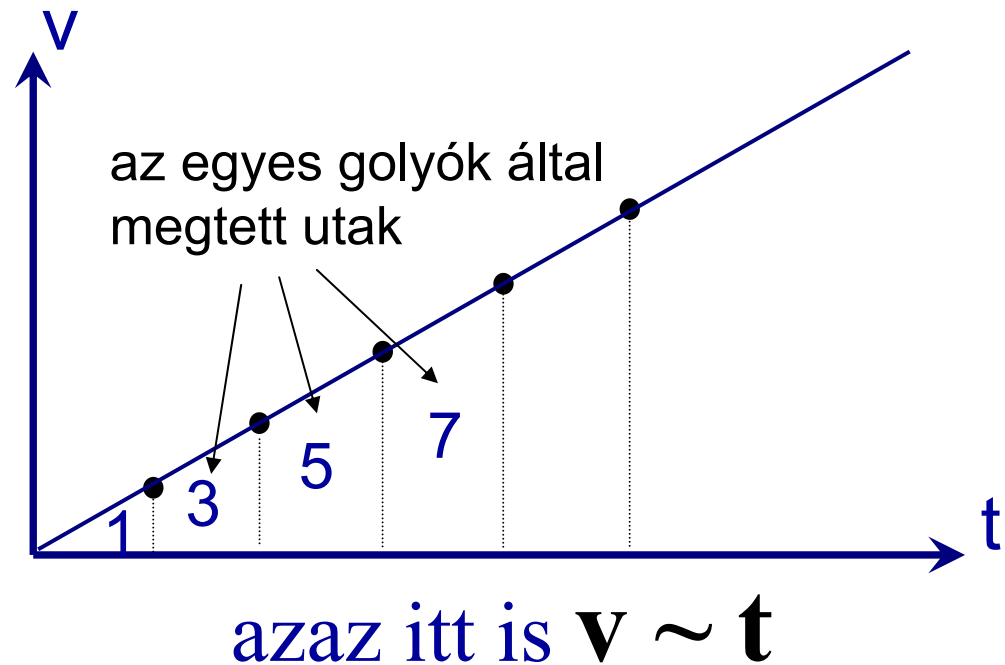
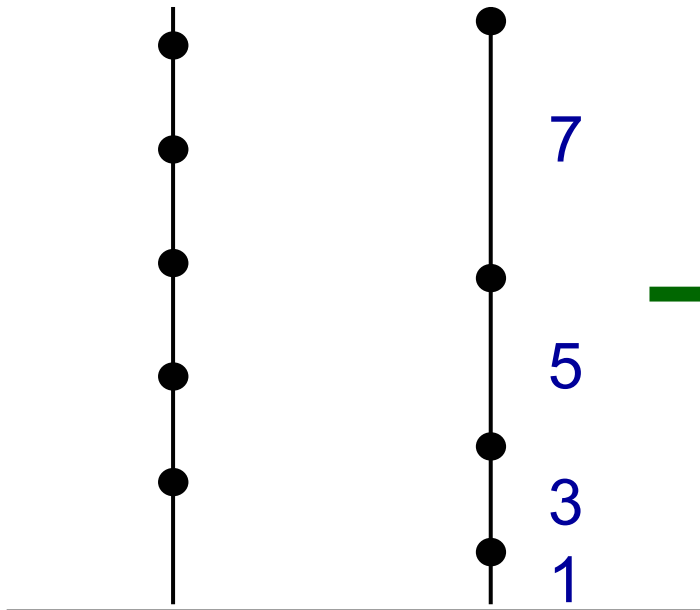
elejtett test mozgását csak a Föld vonzása befolyásolja

első kísérleti vizsgálata : Galilei

Galilei :

„ ... az eső, nehéz test szabad mozgása állandóan gyorsul... amennyire én tudom, még senki sem állapította meg, hogy a távolságok, melyeket egy nyugvó állapotból induló test egyenlő intervallumok alatt befut, úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan egész számok, kezdve az egységgel... „

kísérlet : ejtőzsinór



$v \sim t$  a szabadesés is egyenesvonalú,
egyenletesen gyorsuló mozgás

kísérlet : papírdarab és vasgolyó ejtése levegőben
ejtőcső  nem egyszerre érkeznek le

kísérlet : papírdarab és vasgolyó ejtése
(vákuumban)  egyszerre érkeznek le



minden szabadon eső test
gyorsulása ugyanakkora !!!
= nehézségi gyorsulás,
 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

$$\left. \begin{aligned} v &= g \cdot t \\ s &= \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{aligned} \right\}$$



g pontos mérése: Eötvös Loránd; ingák, stb...

pl. : kút mélységének mérése beledobott kővel $\approx 5t^2$

függőleges hajítás lefelé, felfelé :

= nem nulla kezdősebességű szabadesés $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g} \cdot \mathbf{t}$

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{t} + \frac{\mathbf{g}}{2} \cdot \mathbf{t}^2$$

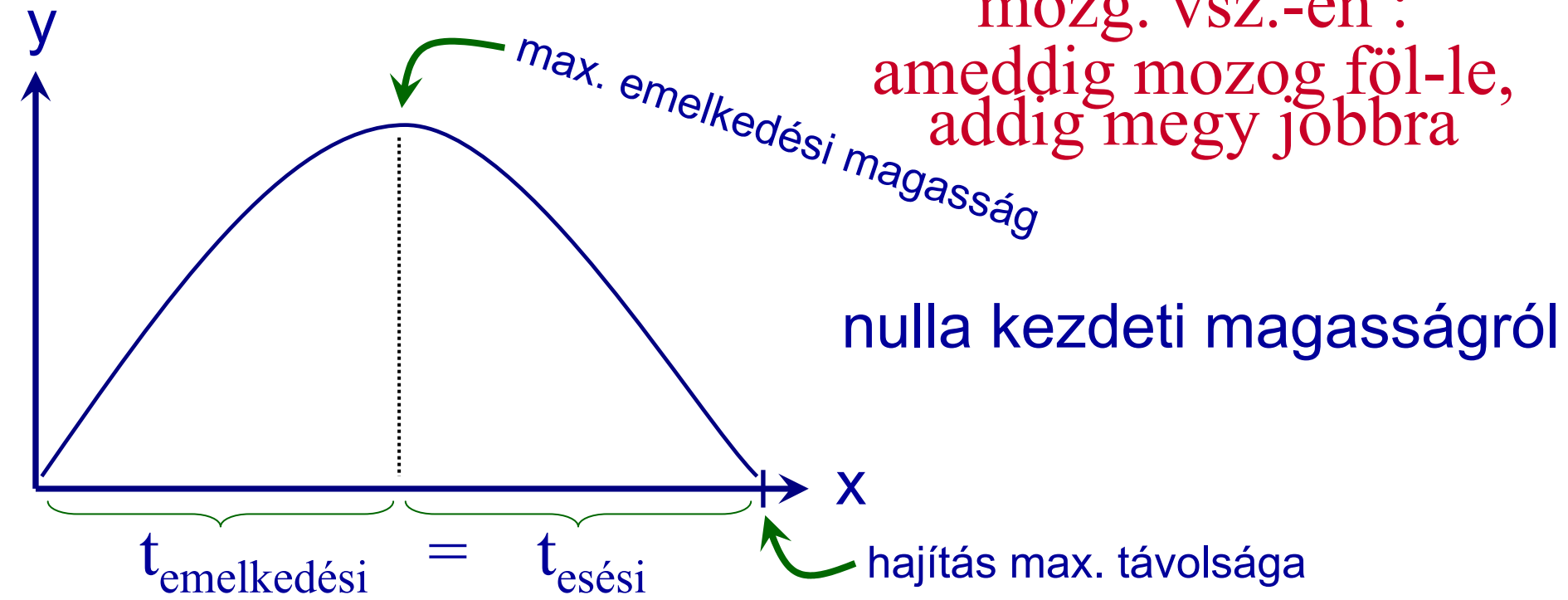
ferde hajítás (vízszintes hajítás) :

függőleges és vsz. komponensekre bontva :

függ. hajítás felfele
+

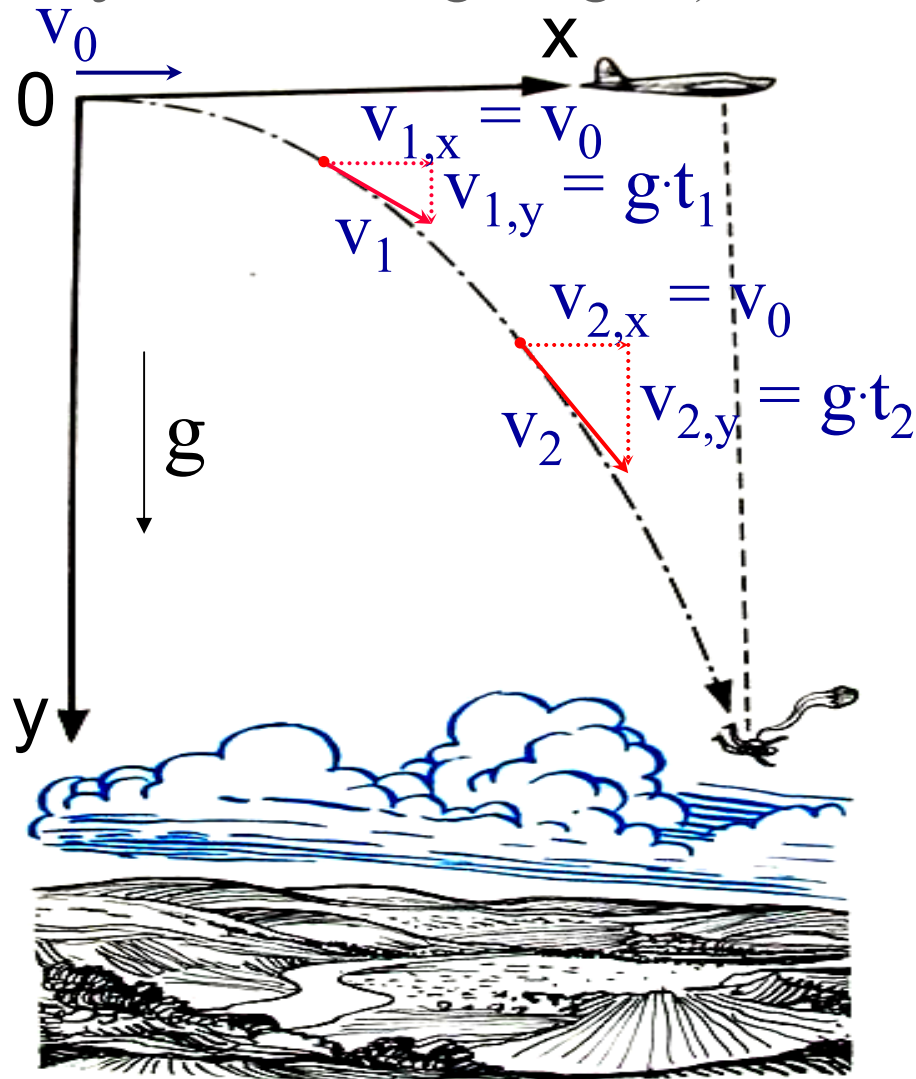
egyenesvonalú egyenletes
mozg. vsz.-én :

ameddig mozog föl-le,
addig megy jobbra

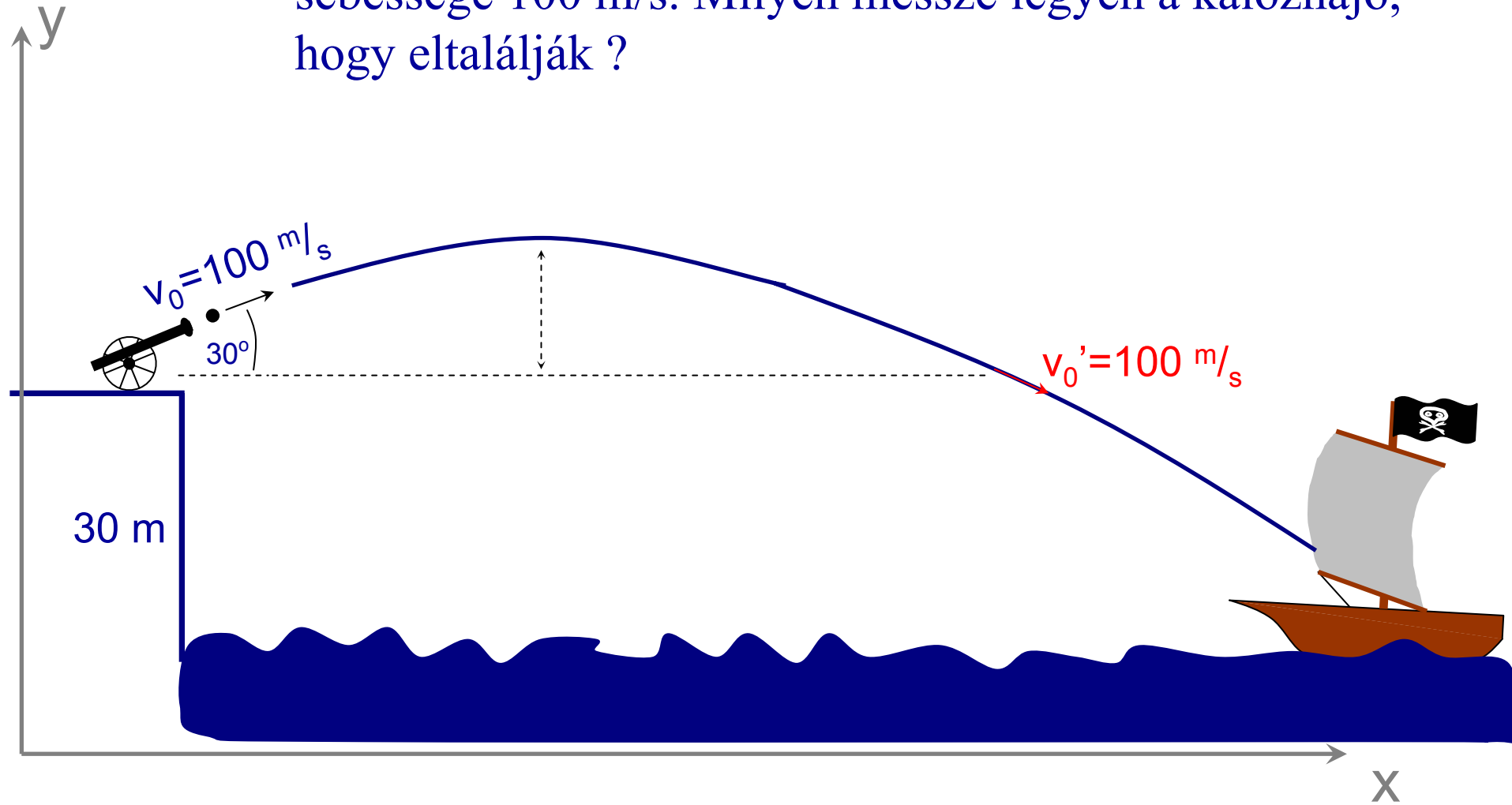


nulla kezdeti magasságról

feladat : egy 150 m magasan szálló repülőgépről csomagot
dobnak ki. Mennyivel a cél előtt kell a csomagot kidobni,
ha a gép sebessége 200 km/h ? (304 m)
(= vsz. hajtás adott magasságból)



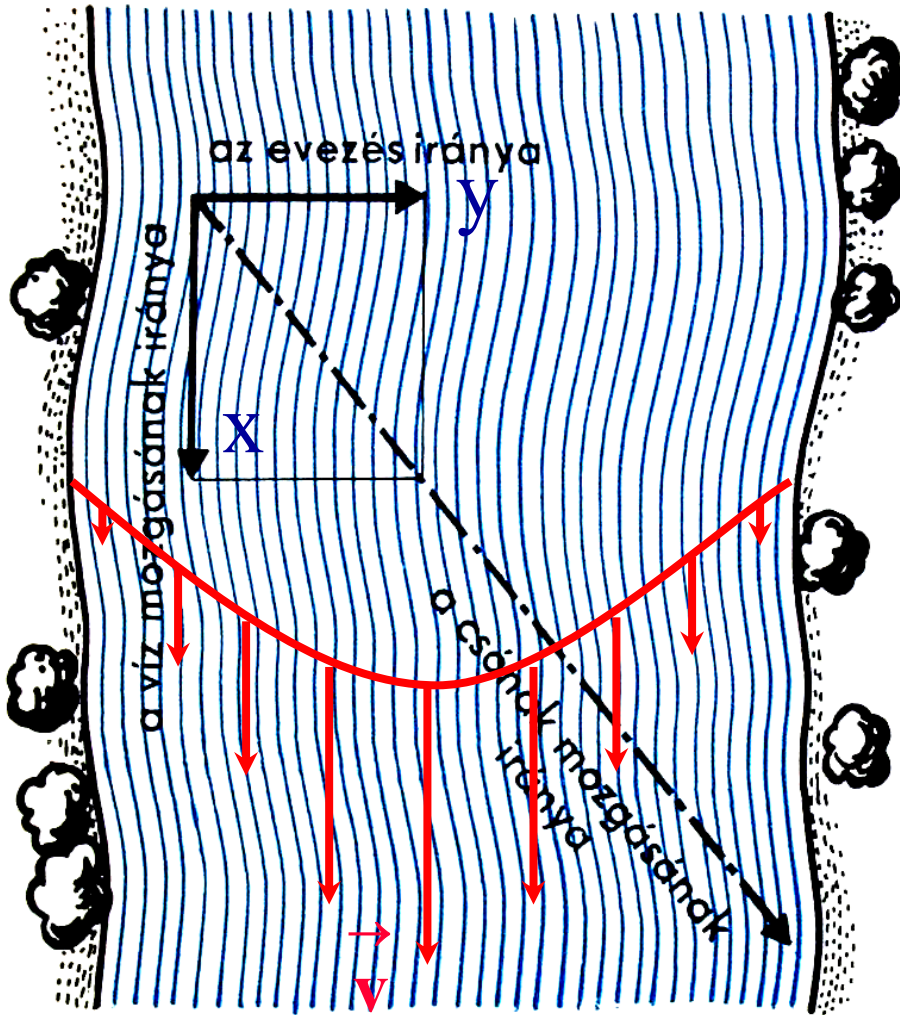
feladat : egy 30 m magas sziklaperemről 30°-os szögben lőnek
ágyúval az érkező kalózhajóra. A lövedék kezdő-
sebessége 100 m/s. Milyen messze legyen a kalózhajó,
hogy eltalálják ?



$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2, \text{ és } v_{0x} = \text{áll.}$$

mozgások összetevése :

folyón egy csónak megy keresztül, hol ér partot ?



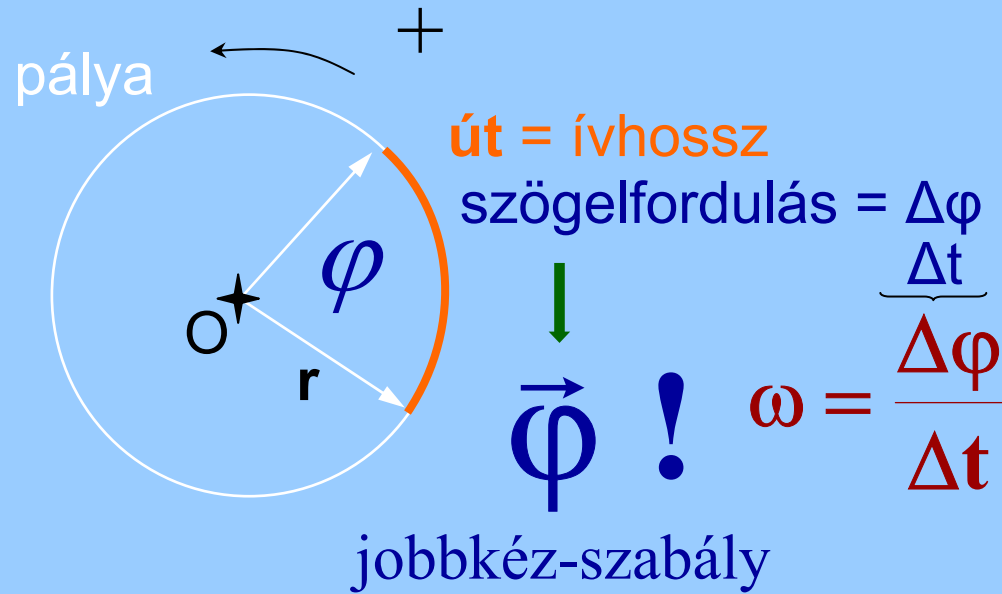
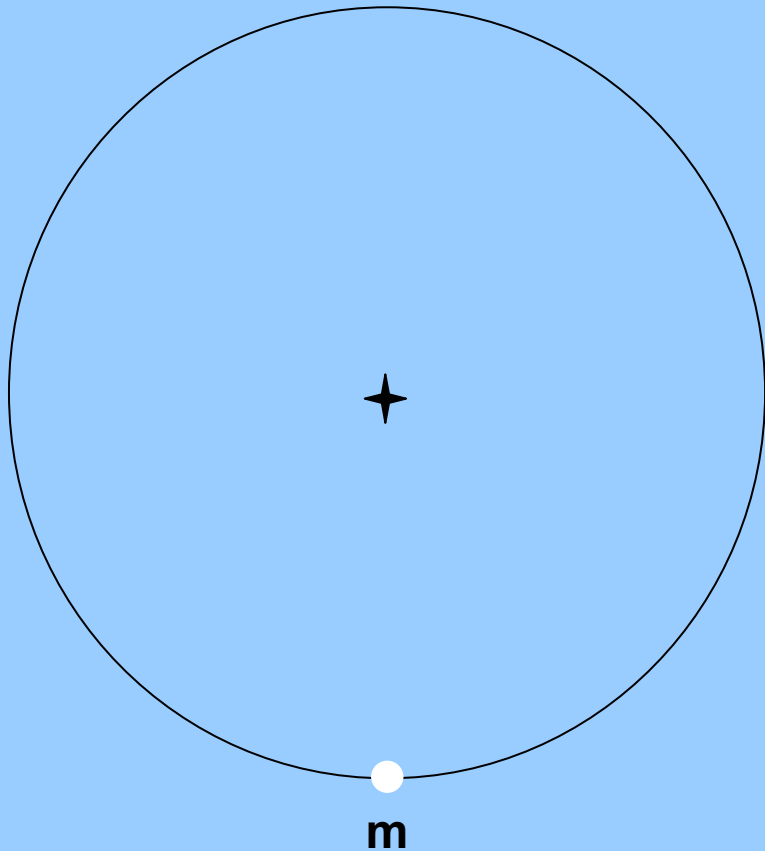
pl. :

$$v_x = v_0 \left(1 - \left(2 \frac{y}{L} \right)^2 \right)$$

vektorok összeadása pontosabban később !

körmozgás : $\rightarrow$ egyenletes
 $\rightarrow$ egyenletesen gyorsuló (lassuló)

egyenletes körmozgás :
 $\omega = \text{áll.}$



periódusidő : $T \rightarrow 2\pi$
fordulatszám : $f \rightarrow 1/T$

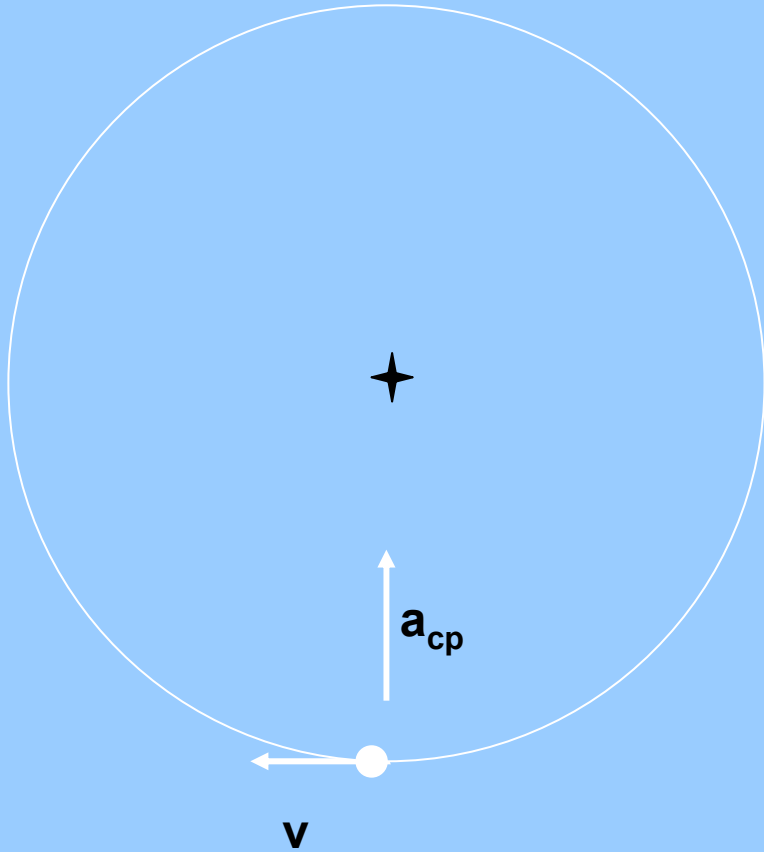
szögsebesség : $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$

$$\varphi = \omega \cdot t$$

$$s = r \cdot \varphi$$

$$v = r \cdot \omega$$

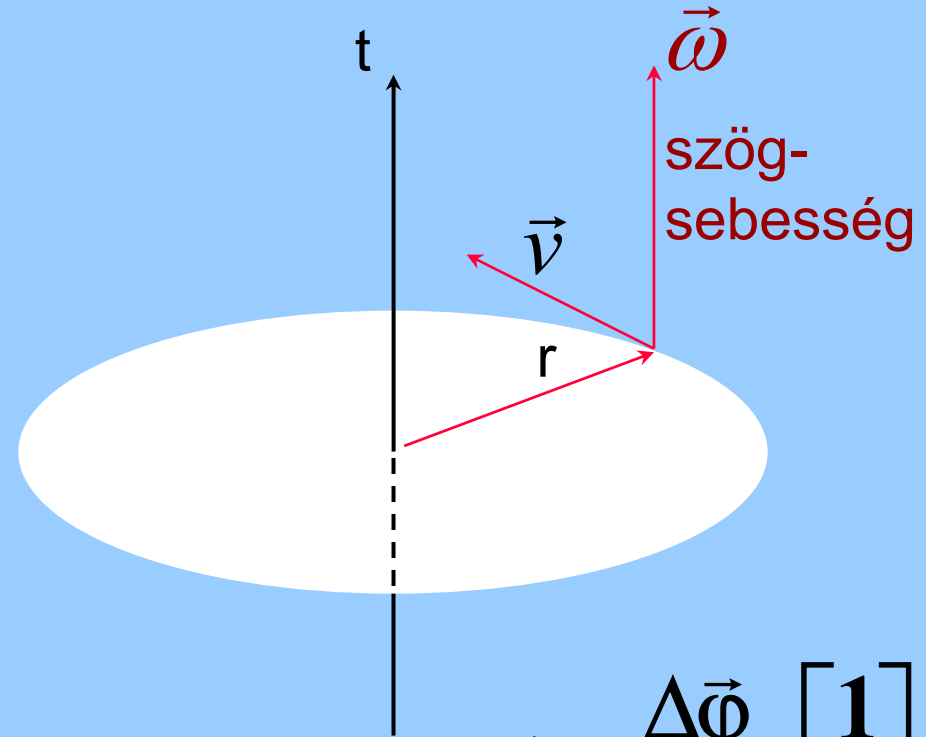
$a_t = 0$, de $a_{cp} \neq 0$:



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$$

$\vec{\phi} !$



$$\vec{\omega} = \frac{\Delta \vec{\phi}}{\Delta t} \left[\frac{1}{s} \right]$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} !$$

egyenletesen változó körmozgás :

$$a_t = \text{áll.}$$

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \text{áll.}$$

$$a_t = r \cdot \beta$$

$$\omega = \beta \cdot t$$

$$v = r \cdot \omega$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \beta \cdot t^2$$

$$s = r \cdot \varphi$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{áll.}$$

$$v = a \cdot t$$

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

mozgás tetszőleges pályagörbén :

a pályagörbét minden pillanatban egy-egy körpályával helyettesíthetünk



egyenletes mozgás

egyenletesen változó mozgás

} szabályai érvényesek

rezgőmozgás : $\begin{cases} \text{harmonikus} \\ \text{anharmonikus} \end{cases}$

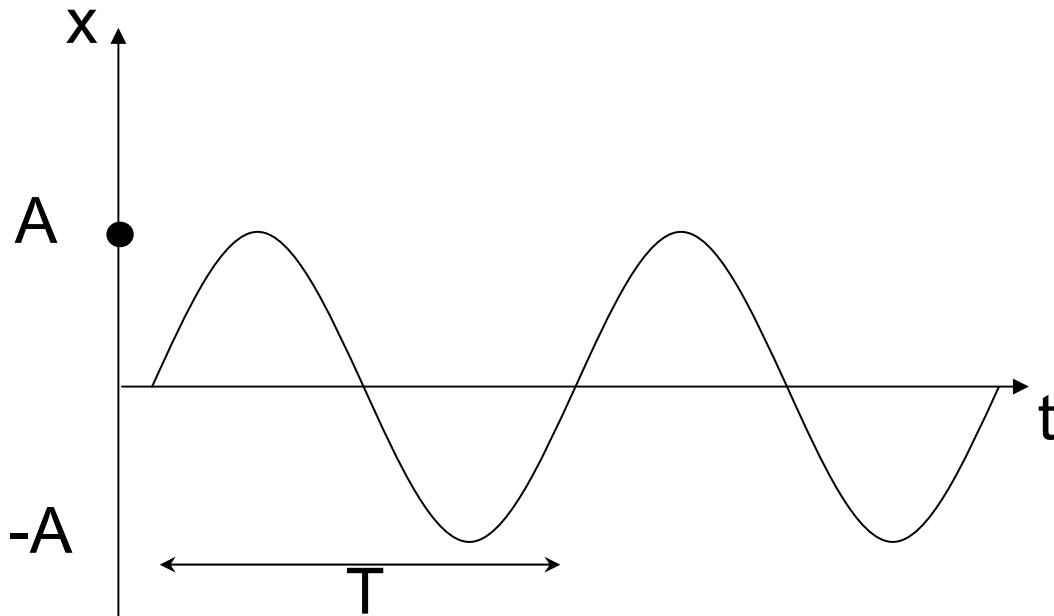
harmonikus rezgőmozgás :

$$\mathbf{x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_0\right) = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T} + \varphi_0\right)}$$

↑
amplitúdó

↑
körfrekvencia

$T =$ periódusidő/rezgésidő
 $f = 1/T$, frekvencia

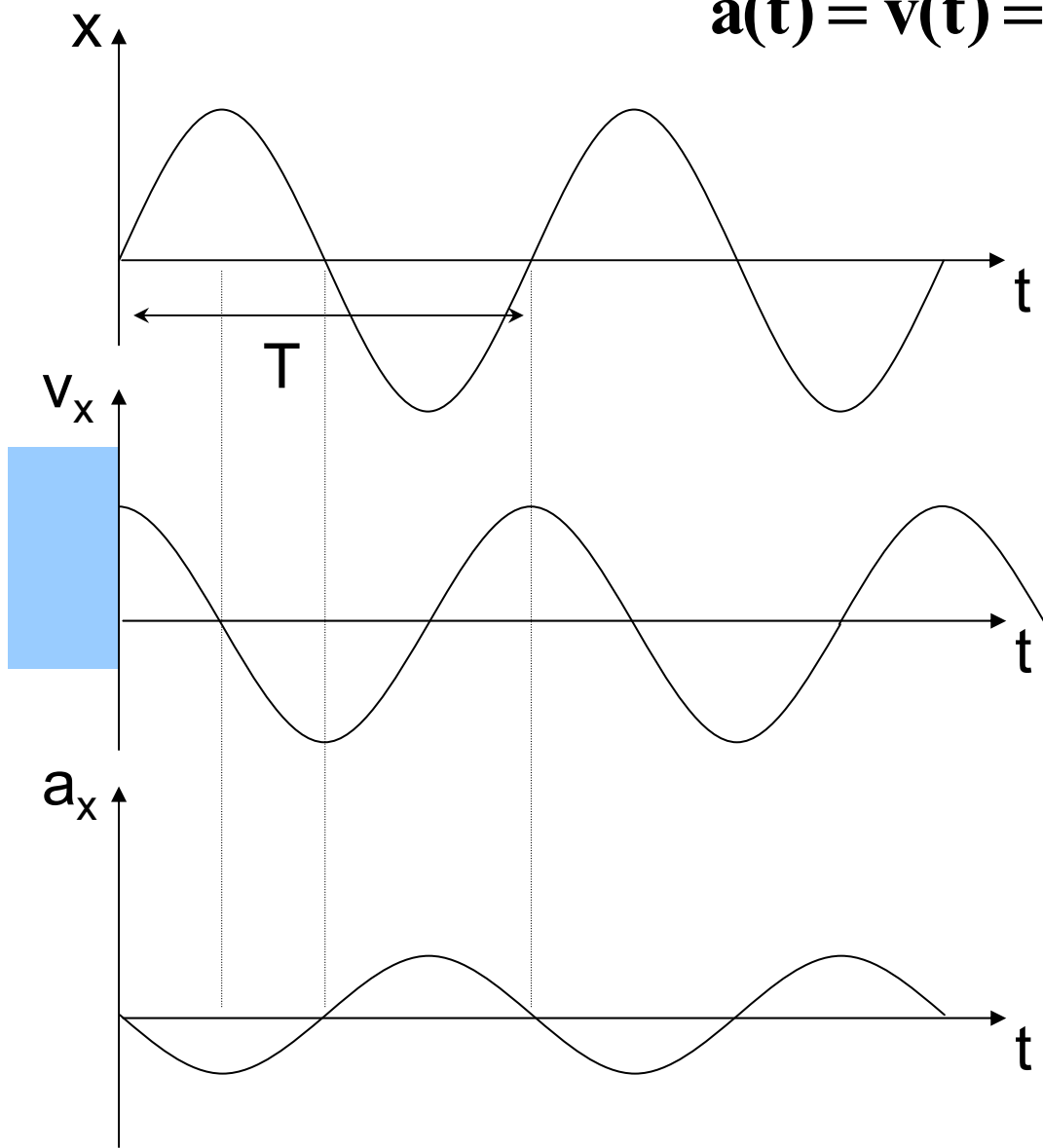


kísérlet :

rúgón rezgő test,
megpendített húr,
hangvilla végén tű,
megütjük, majd
kormozott
üveglaphoz érintve
egyenletesen húzzuk

$$\mathbf{x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{v(t) = \dot{x(t)} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)}$$

$$\mathbf{a(t) = \dot{v(t)} = \ddot{x(t)} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)}$$

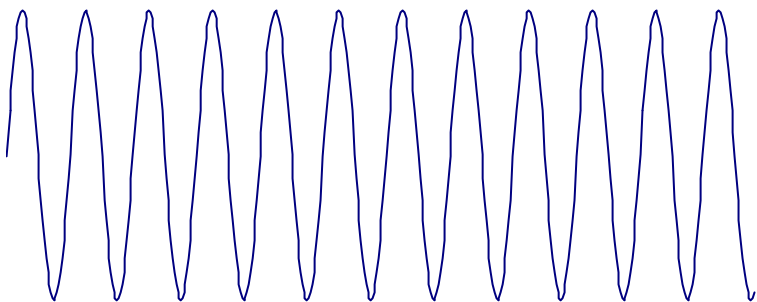


a harmonikus rezgőmozgás és egyenletes körmozgás kapcsolata :

csillapodó rezgés :

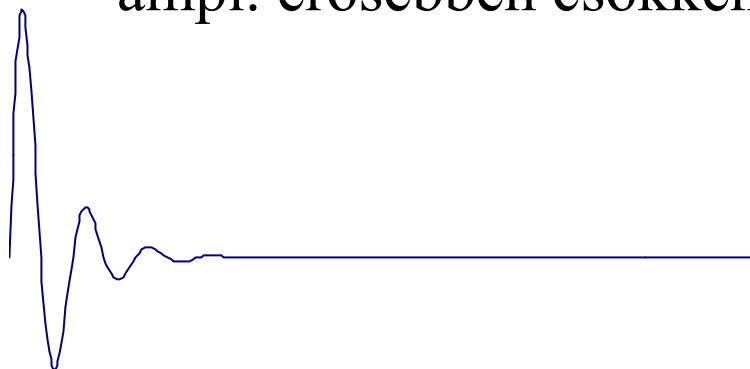
$\beta = 0$

harmonikus



$\beta = 0.4$

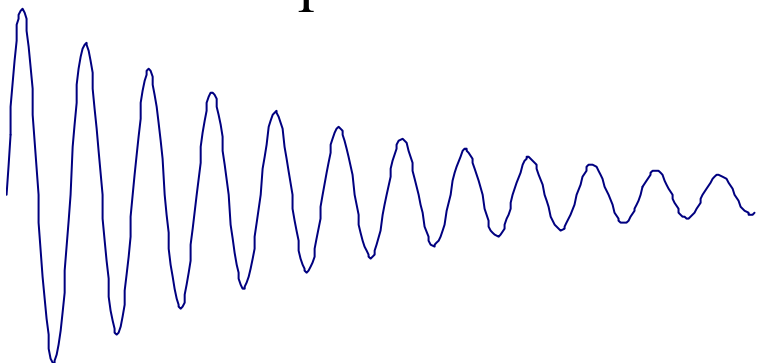
ampl. erőbben csökken



$\beta = 0.1$

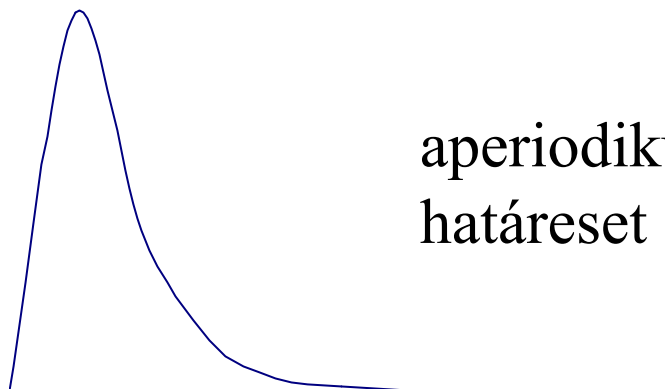
← csillapítási tényező

ampl. csökken = fékezés



$\beta = 15$

aperiodikus
határeset



rezgések összeadása $\rightarrow$ párhuzamos
merőleges

kísérlet : rezgések összeadása +



Fizdemo.exe

Lissajous-görbék

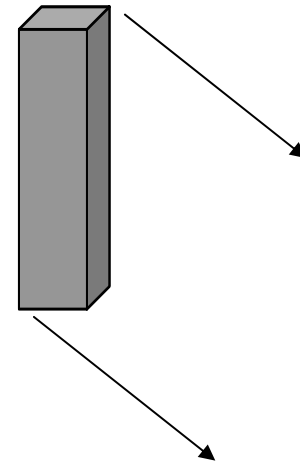
merev testek egyszerű mozgásai :

- *transzláció (haladó mozg.) és*
- *rotáció (rögz. teng. körüli forgás)*

transzláció :

a test pontjainak elmozdulása
ugyanakkora (vektor)

pl. : óriáskerék kosarai



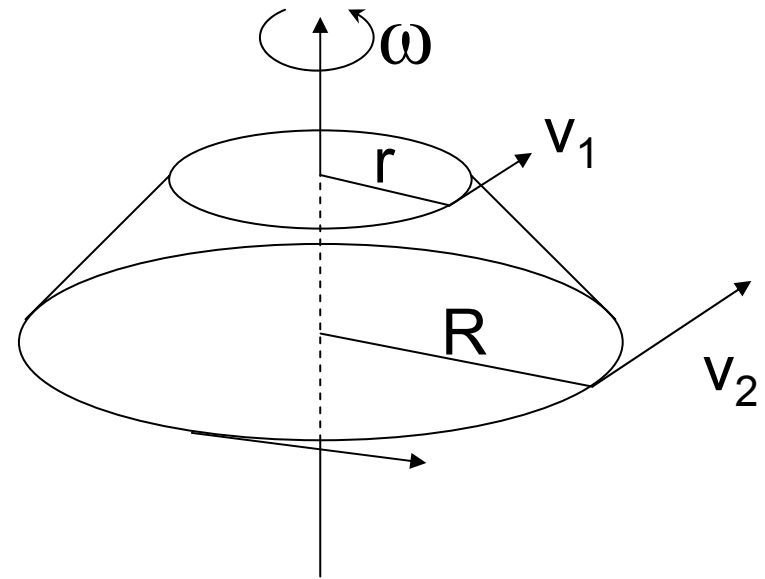
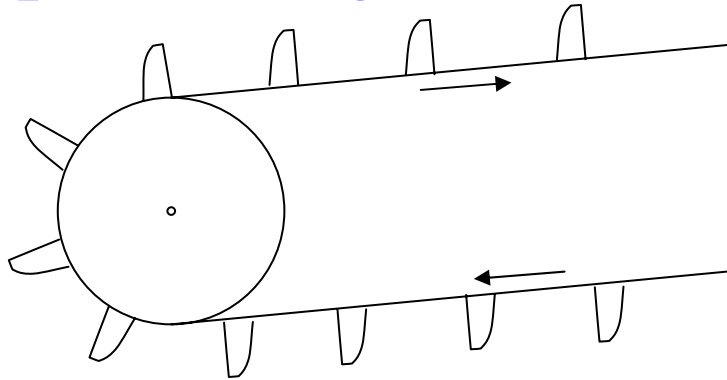
de ez függ attó, h. milyen koord.rdsz.-ből nézzük

rotáció :

rögz. teng. körüli forgás = a test pt.-jai egymással párhuzamos síkú körpályákon mozognak, és a körök kp.-jai egy egyenesre esnek :

a forg.teng. nem feltétlenül megy át a testen !

pl. kaparószalag :

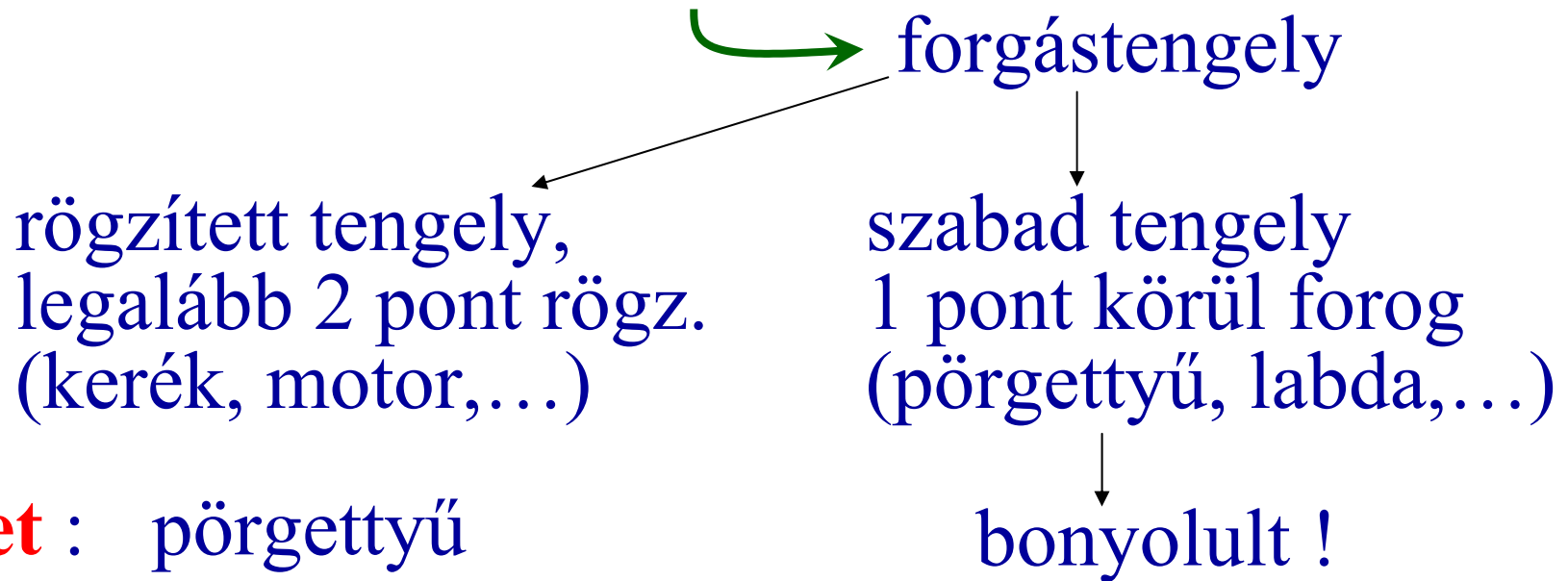


minden pont szögelfordulása, szögsebessége, stb... egyforma

forgó mozgás :

merev testek egy tengely körüli forgása :

a test egyes pontjai nem mozdulnak



kísérlet : pörgettyű

$\omega = \text{áll.}$ és $v \neq \text{áll.}$ minden pontra

a többi pontjai a tengely körüli körpályákon mozognak

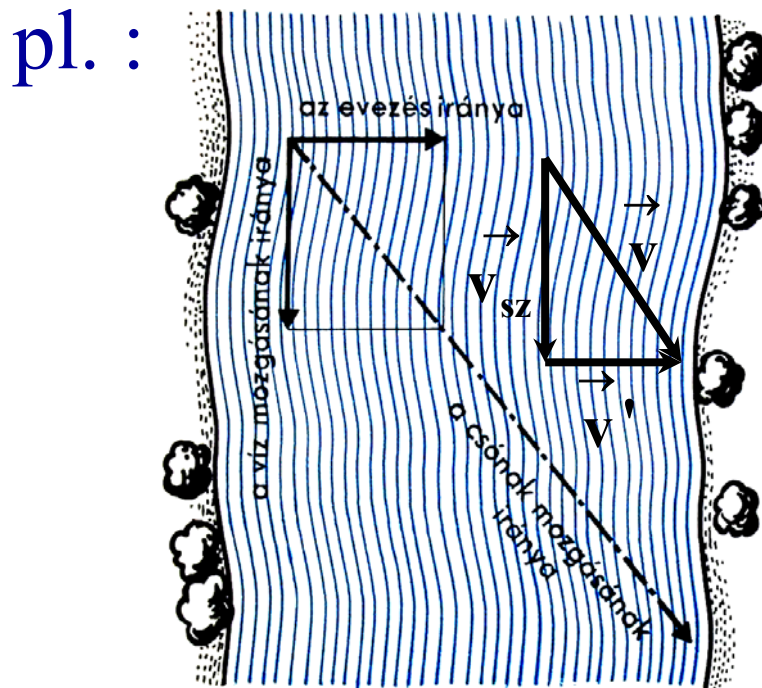


visszavezettük körmozgásra

egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerek :

egy „nyugvó” + egy ehhez képest „mozgó” vontk.rdsz
 V V'

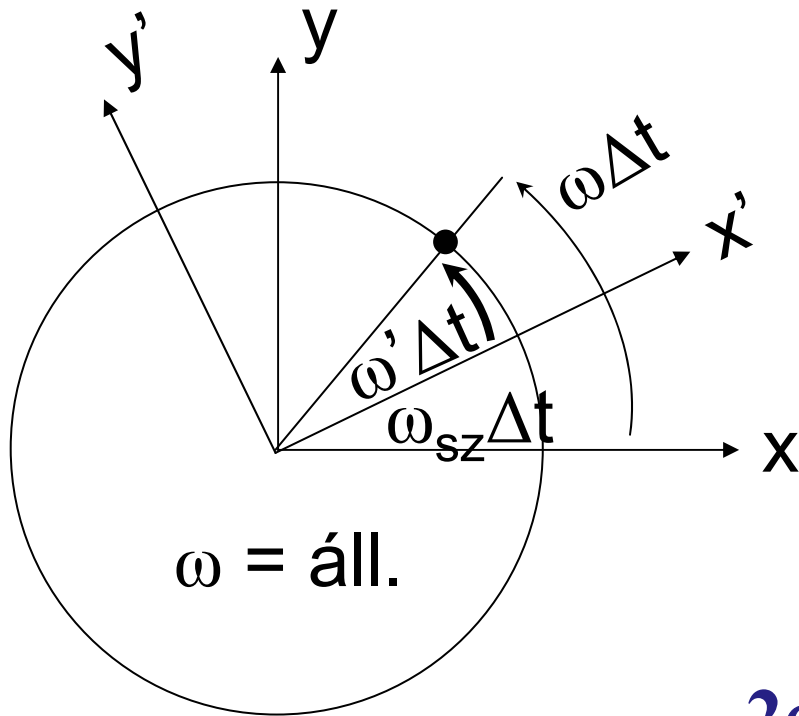
pl. : sin és vasúti kocsi }
 folyópart és víz } haladó
 a Föld } forgó



a pont V -hez lépest „abszolút”
elmozdulása ($\Delta \vec{r}$)
a V' azon pt.-jának V -beli
elmozdulása, amelyben a pont
az időszakasz elején volt,
„szállító” elmozdulás ($\Delta \vec{r}_{sz}$), és
a pont V' -höz viszonyított
elmozdulása a „relatív” elmozd.
($\Delta \vec{r}'$) $\longrightarrow \Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_{sz} + \Delta \vec{r}'$

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_{sz} + \Delta \vec{r}' \longrightarrow \vec{v} = \vec{v}_{sz} + \vec{v}' \longrightarrow \vec{a} = \vec{a}_{sz} + \vec{a}'$$

forgó rendszerben :



$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{sz} + \vec{\omega}'$$



$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{r} = -\omega_{sz}^2 \vec{r} - 2\omega_{sz}\omega' \vec{r} - \omega'^2 \vec{r}$$

szállító
gyorsulás

relatív
gyorsulás

$$-2\omega_{sz}\omega' \vec{r} = +2\vec{\omega}_{sz} \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}) = 2\vec{\omega}_{sz} \times \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{sz} + \underbrace{2\vec{\omega}_{sz} \times \vec{v}'}_{\text{Coriolis-gyorsulás}} + \vec{a}'$$

$$\vec{a}_{Co} = 2\vec{\omega}_{sz} \times \vec{v}' = \text{Coriolis-gyorsulás}$$

merev testek összetett mozgásai :

síkmozgás :

kényszermozgás, $\approx$ tetszőleges haladó és forgó mozgások „összege”

a síkmozgás leírása a testhez rögzített tengely körüli forgással :

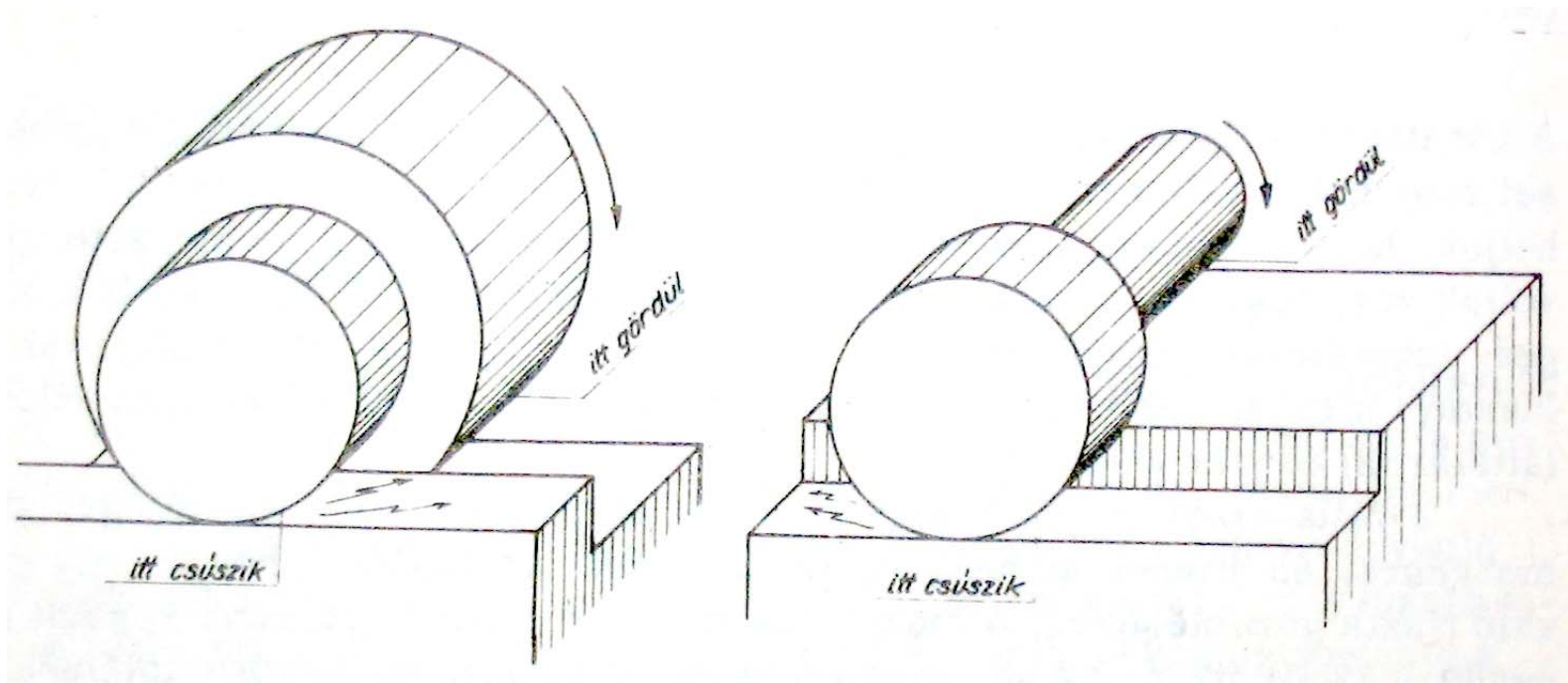
a test egy O' pt.-ja legyen a forgáspnt., ezen átmegy a mozgás síkjára merőleges forg.teng.

az O' -vel együtt haladó V' rdsz.-ben a test forogni látszik ezen teng. körül : $\vec{v}_i' = \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$

ezen pt. seb.-e a V -rendszerben :

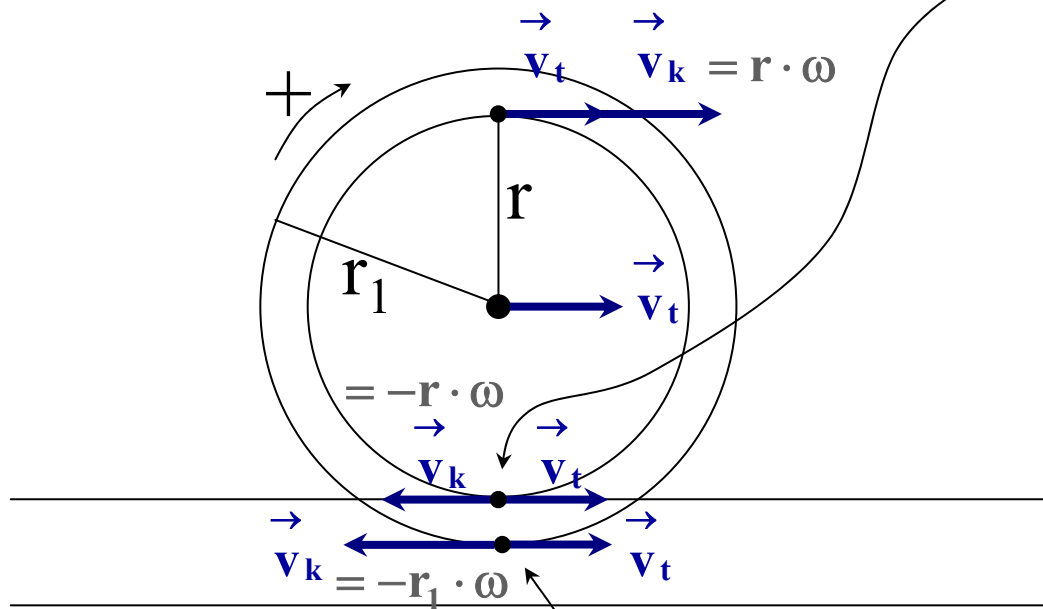
$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i' = \text{transzláció} + \text{rotáció}$$

gördülő mozgás : = forgás rögzített tengely körül +
haladó mozgás



gördülés → tiszta gördülés = csúszásmentes (autó
egyenletesen halad)
→ csúszva gördülés (hirtelen indulás,
vagy fékezés)

vonatkerék :



az a pont „annyit halad
előre, mint amennyit
visszafele fordul” :

$$\vec{v}_t = \vec{r} \cdot \omega$$

azaz a sinhez képest
áll !!!



**pillanatnyi
forgástengely**

ez a pont hátrafele mozog !

pörgettyű :

a test egy pt.-ja a kiszemelt V vonatk.rdsz.-ben
nyugalomban marad

a teng. átmegy ezen a pt.-on, de helyzete változik

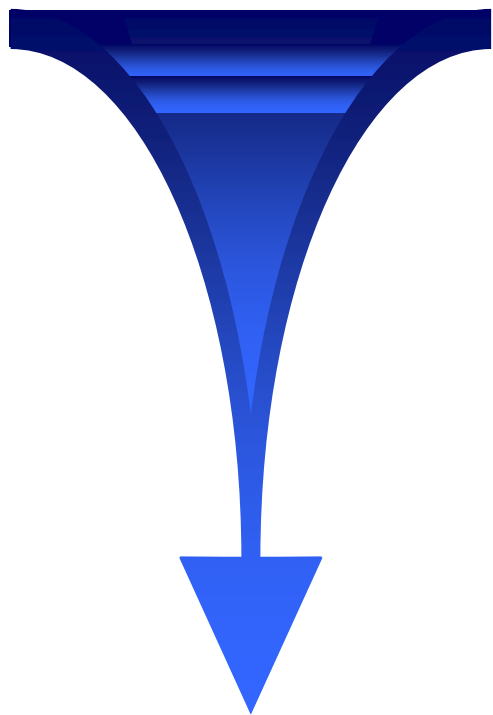
a kinematikai leírást ld. tankönyvekben ...

szabadsági fokok :

szabad mozgás : 3

kényszermozgás : kevesebb, mint 3

merev testre : 6 ($\underbrace{3 \text{ hely}}_{\text{transzl.}}$ és $\underbrace{3 \text{ elforgatás}}_{\text{rotáció}}$)



dinamika

= mozgások, mozgásállapot-
változások okainak
vizsgálata, leírása

régen : a mozgás fenntartásához egy másik test
állandó hatása (= „erő”) kell, pl. egy kocsi
csak akkor mozog, ha húzzuk

Galilei : elindított és magára hagyott test annál
hosszabb utakat tesz meg, minél
simább/csúszósabb a felület



gondolatban folytatta : az egyszer elindított
test megtartaná mozgásállapotát, ha a felület
akadályozó hatását (súrlódás) ki lehetne
küszöbölni = **tehetetlenség törvénye**

a tehetetlenség törvénye $\longrightarrow$ **axióma** = alaptörvény
↓
Newton megfogalmazásában : valószínűleg igaz

minden test megtartja mozgási állapotát (= sebességének nagyságát és irányát), amíg más test/testek hatása annak megváltoztatására nem kényszeríti
inerciarendszer $\longrightarrow$ **Newton I. törv.**

Newton : 1642-1727

mechanika törvényei, differenciálszámítás, szín, optika, tükrös távcső, graviáció (öszefoglalta Kopernikusz, Galilei és Kepler felfedezéseit)

1687-ben „Principia” $\longrightarrow$ 1705-ben lovaggá ütik

Newton előtt : erő = ember által kifejtett „erőfeszítés”
utána : erő = testek kölcsönhatásának mértéke

feltétele: érintkezés, különböző állapot ...
eredménye: mozgásállapot-változás

ha két test kölcsönhatásba lép 

mindkettőnek megváltozik a mozgásállapota :

pl. : két, korcsolyán álló ember húzza egymást / egyik húzza a másikat / másik húzza az egyiket, mindkettő elmozdul

az elmozdulások (és a kapott sebességek) ellentétes irányúak

a kövérebb fog lassabban mozogni

kísérlet : kocsik ütközése sinen / légpárnás asztalon



a kölcsönhatás törvénye : (= tapasztalat !)

a sebességváltozások ellentétes irányúak, és a sebességváltozások nagyságának hányadosa egy adott testpárra jellemző állandó, nem függ a kölcsönhatás módjától  a **tömeget** lehet definiálni :

tömeg : egy B test tömege n-szerese az A test tömegének, ha kölcsönhatásuk során a B test sebességváltozása n-ed része az A sebességváltozásának

a tömeg a test tehetelenségének mértéke
+ mérések $\longrightarrow$ a tömeg tranzitív
de : fénysebességnél más !!!

másképpen fogalmazva :

$$\mathbf{m}_1 \cdot \Delta \vec{\mathbf{v}}_1 = -\mathbf{m}_2 \cdot \Delta \vec{\mathbf{v}}_2$$

$$\mathbf{m}_1 \cdot (\vec{\mathbf{v}}_1'' - \vec{\mathbf{v}}_1') = -\mathbf{m}_2 \cdot (\vec{\mathbf{v}}_2'' - \vec{\mathbf{v}}_2')$$

$$\underbrace{\mathbf{m}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_1' + \mathbf{m}_2 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2'} = \mathbf{m}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_1'' + \mathbf{m}_2 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2''$$

impulzus $\longrightarrow$ $\vec{\mathbf{p}} = \mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{v}}$
(lendület)

2 test kölcsönhatása során $\Delta \vec{\mathbf{p}}_1 = -\Delta \vec{\mathbf{p}}_2$

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \longleftrightarrow \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1'' + \vec{p}_2''$$

= impulzusmegmaradás ← zárt rdsz-ben!

pl. egyforma tömegek ütközésénél a „középső” pont helyben marad, ha mindkettő egyforma sebességgel halad :

$$\vec{r}_{\text{tkp}} = \vec{r}_1 + \frac{\mathbf{m}_2}{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \vec{r}_1 + \mathbf{m}_2 \cdot \vec{r}_2}{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}$$

↑
tömegközéppont

$$\vec{v}_{\text{tkp}} = \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \vec{v}_1 + \mathbf{m}_2 \cdot \vec{v}_2}{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}$$

↓

a számlálóban $\mathbf{m}_1 \cdot \vec{v}_1 + \mathbf{m}_2 \cdot \vec{v}_2$ állandó

ütközéskor a **tömegközéppont** egyenesvonalú egyenletes mozgást végez

erő = kölcsönhatás mértéke :
 mennyi idő alatt mekkora impulzusváltozás van ? :

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{m} \vec{v})}{\Delta t} = \vec{m} \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \underbrace{\vec{m} \cdot \vec{a}}_{\vec{F} = \vec{m} \cdot \vec{a}}$$

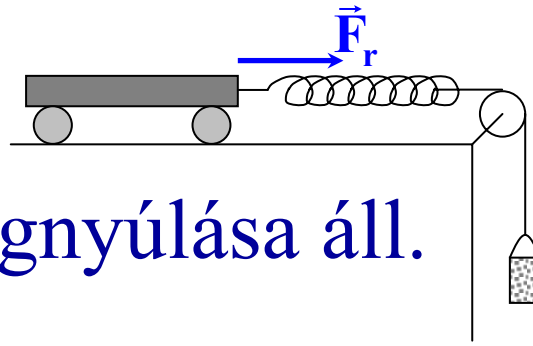
impulzus-tétel

[N] $\vec{F} = \vec{m} \cdot \vec{a}$ **Newton II. törv.**

pl.: kalapácsütés

(= dinamika alaptörvénye)

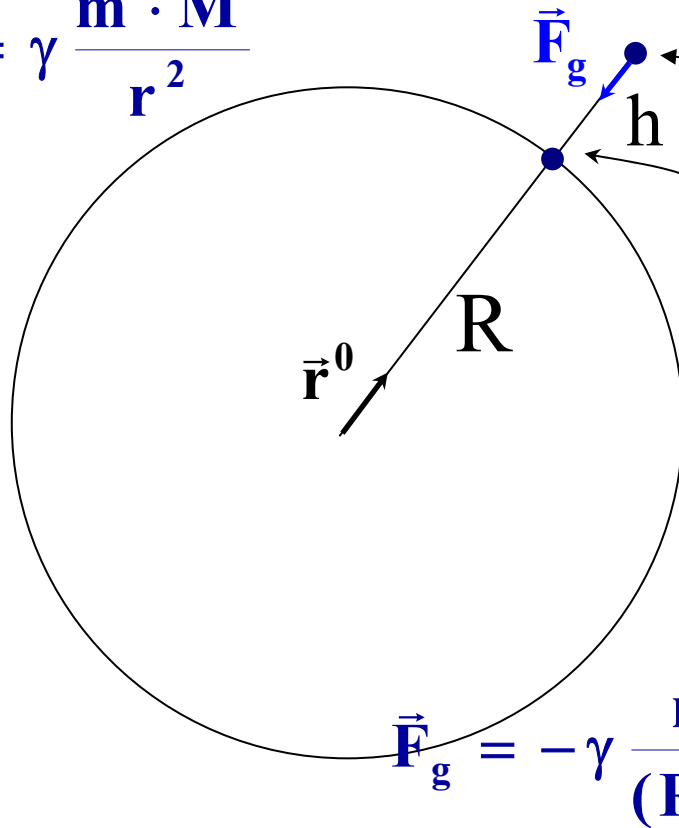
erőtörvények : *rúgó* : $F_r = -k \cdot (\Delta \ell)$ (megnyúlás is)
 (Hooke-törv.)



így a rúgó megnyúlása áll. $\longrightarrow$ kül.megnyúlások

gravitáció: $G = m \cdot g$

de : $F_g = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2}$



$$F_g = \gamma \frac{m \cdot M}{(R + h)^2}$$

$$F_g = \gamma \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot \underbrace{\gamma \frac{M}{R^2}}_g = m \cdot g$$

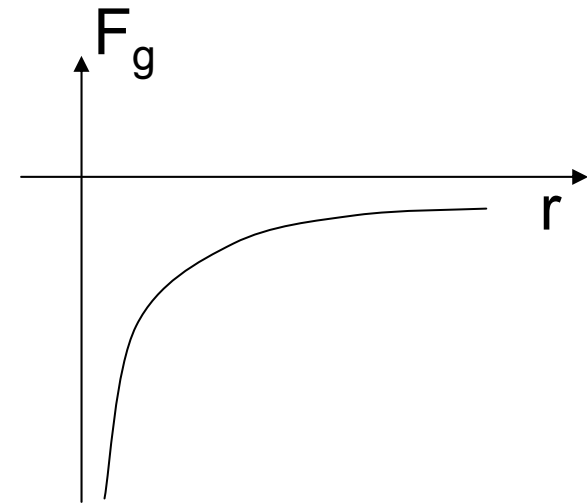
$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

$$\vec{F}_g = -\gamma \frac{m \cdot M}{(R + h)^2} \vec{r}^0$$

Newton...

pl. : a Holdra csak F_g hat a Föld miatt (körpálya, $\approx 27,3$ nap keringési idő)

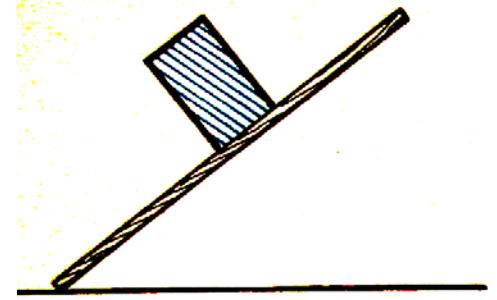
súly = súlyerő = F_{grav} vagy G



súrlódás :

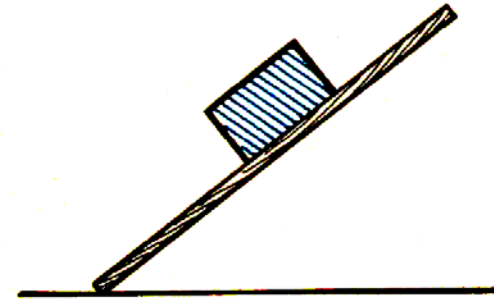
kísérlet :

lejtőn lecsúszó fahasáb :



tapasztalat :

$F_{\text{súrl}}$ ellentétes az elmozdulás irányával
nagysága nem függ az érintkező
felületek nagyságától



álló tárgyat nehéz megmozdítani, de utána már
könnyebb tolni

súrlódás $\begin{cases} \text{csúszási : } F_{\text{cs}} = \mu_{\text{cs}} \cdot F_{\text{ny}} \\ \text{tapadási : } 0 < F_{\text{t}} < F_{\text{t,max}} = \mu_{\text{t}} \cdot F_{\text{ny}} \end{cases}$
és $\mu_{\text{cs}} < \mu_{\text{t}}$

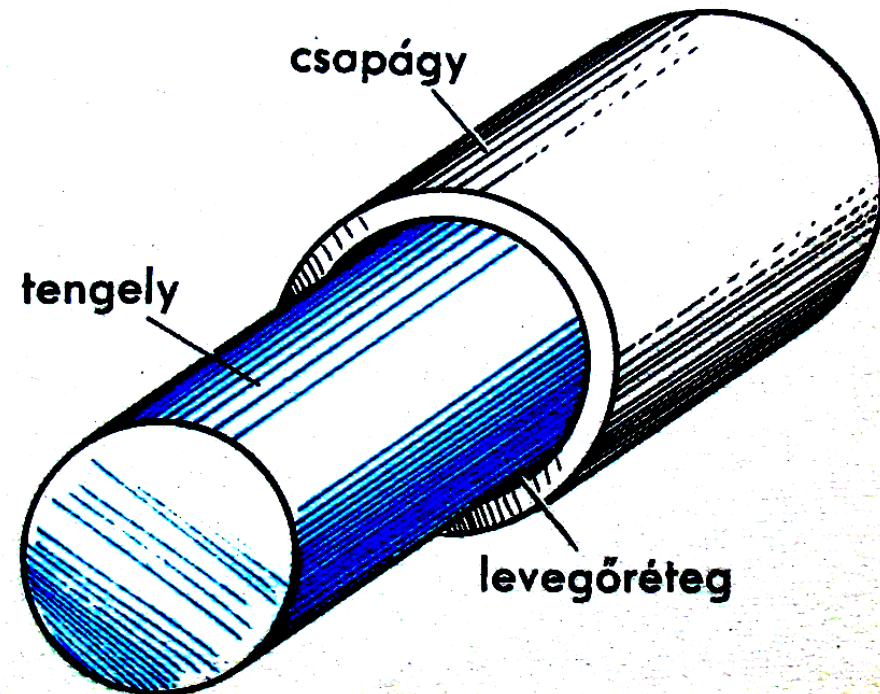
tapadás: fa-fa : 0,6; acél-acél : 0,15; acél-jég: 0,027

$\mu_{cs} < \mu_t \longrightarrow$ álló tárgyat nehéz megmozdítani,
de utána már csúszik

$\mu_{cs} < \mu_t \longrightarrow$ fékhatás : ne csússzon meg a kerék !!!
blokkolásgátló
elindulás $\longrightarrow$ kipörgésgátló

csapágyak : olaj, gáz

μ_{cs} csökkentése
kopás csökkentése



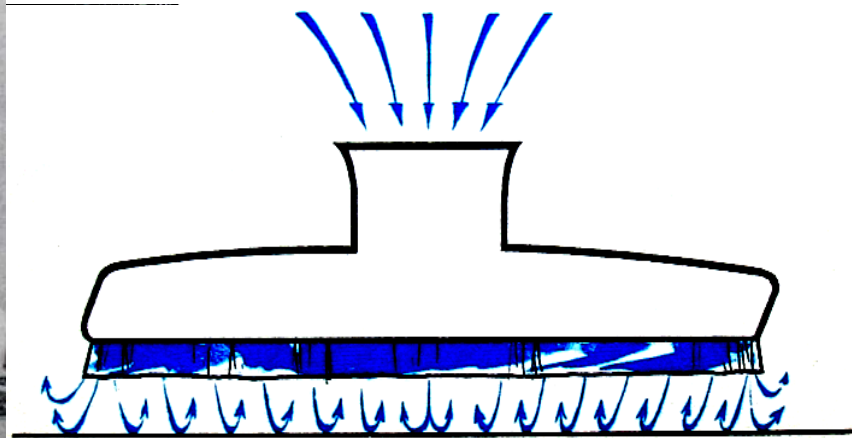
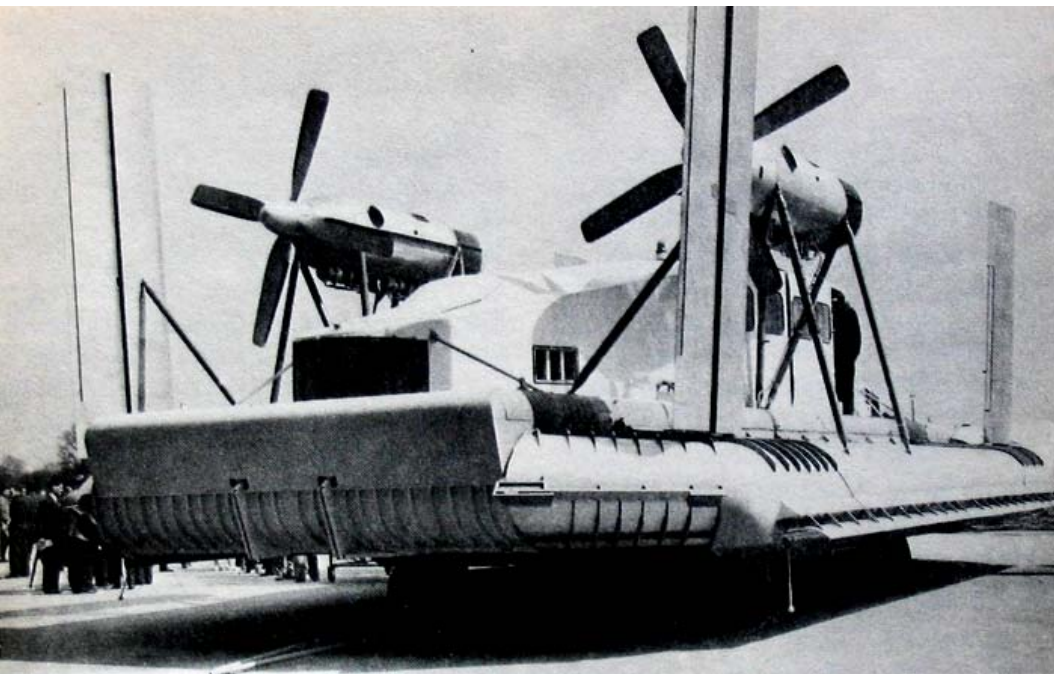
pl.: teherautón vaslemezek egymáson, kanyarodik,
szemből jön a busz, lemezek lecsúsznak ...

autógumi mérete, fékpofa/fékbetét mérete mégsem
mindegy $\longrightarrow$ miért ???

az anyagot le kell „reszelni” a felületről :
nagyobb felület $\longrightarrow$ több atom $\longrightarrow$ több kötés felvágása

pl. : az autó miért tud kanyarodni (miért nem csúszik
ki egyenesen az útról) ?

mert ki akarna csúszni, de a tapadási súrlódási erő
ezzel ellentétesen hat, azaz a körpálya közepe felé ($= F_{cp}$), ez tartja körpályán az autót.



közegellenállás :

folyadékban, gázban mozgó testek

tapasztalat : $F_{\text{köz}}$ ellentétes az elmozdulás irányával
nagysága függ a mozgó test felületétől,
sebességétől és a felület alakjától

$F_{\text{köz}} = -k \cdot A \cdot \rho \cdot v$ ← kis sebességeknél

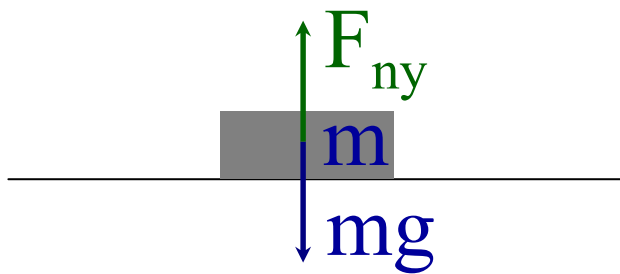
$F_{\text{köz}} = -k \cdot A \cdot \rho \cdot v^2$ ← nagy sebességeknél

pl. : hordót visznek tetőcsomagtartón

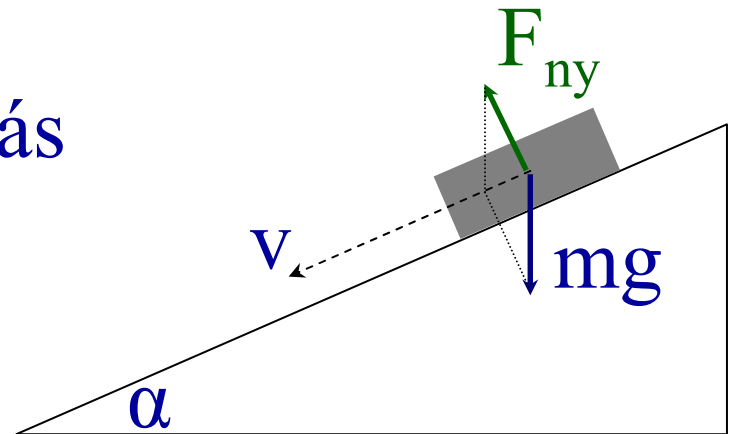
kényszererő :

pl. alátámasztás (felfüggesztés) által a testre ható erő

ingamozgás



$$F_{\text{ny}} = mg$$

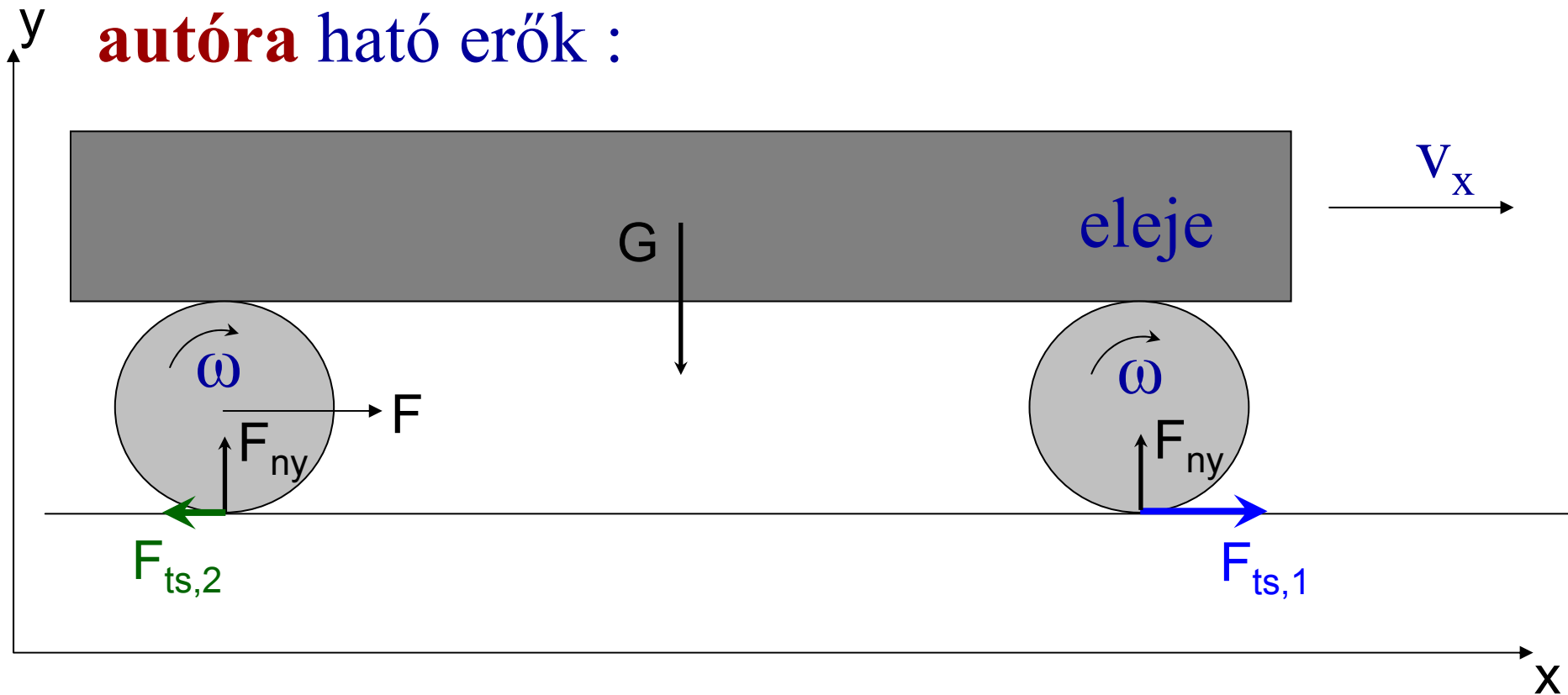


$$F_{\text{ny}} < mg \quad (=mg \cos \alpha)$$

F_{ny} mindig merőleges az alátámasztó felületre

pl. : az autó miért halad az úton ? :

autóra ható erők :



$$a_y = 0 \longrightarrow \sum F_{i,y} = 0 \longrightarrow G = 2 \cdot F_{ny}$$

$$\sum F_{i,x} = F_{ts,1} - F_{ts,2} > 0 \longrightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} \neq 0$$

*felhajtóerő, Coulomb-erő, mágneses erő,
van der Waals, stb ...*

ld. később

további tapasztalat :

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

↪ **Newton III. törv.**

(= hatás-ellenhatás törvénye)

= kölcs.hat.tv. újrafogalmazása

pl.: birkózáskor A felemeli B-t, akkor A erősebb,
de mégis ugyanakkora erővel hat B-re, mint B
A-ra !!!

pl.: ló húzza a lovaskocsit, akkor N.III. szerint a
kocsi is ugyanakkora erővel húzza a lovat
visszafele → miért megy mégis előre ???

pl.: lehet így utazni ? (Cyrano) →
(mágneset feldobja, az a kocsit magához húzza,
fent a golyót újra feldobja, és így tovább ...)

miért ?



pl. : rúgóerő hatására létrejövő mozgás :

erőtörv.-t ism. $\longrightarrow$ meghat.-hatjuk, h. adott kezdeti állapotból indulva hogyan fog mozogni : $x = x(t)$

ismert : $t = 0$ – ban $x = x(0)$, $v = v(0)$, k és m :

numerikus megoldás :

kis Δt $\longrightarrow$ F_r változása elhanyagolható
 $\approx$ egyenl.gyorsuló mozgással mozog 

$\longrightarrow$ $t = 0$ – ban : $a(0) = \frac{F_r(x(0))}{m}$

$t = \Delta t/2$ – ben : $v(\Delta t/2) = v(0) + a(0) \cdot \frac{\Delta t}{2}$

elmozd. Δt alatt : $x(\Delta t) = x(0) + v(\Delta t/2) \cdot \Delta t$
majd ugyanígy tovább :

$t = \Delta t$ – ben : $a(\Delta t) = \frac{F_r(x(\Delta t))}{m}$

$t = 3\Delta t/2$ – ben : $v(\frac{3}{2}\Delta t) = v(\frac{1}{2}\Delta t) + a(\Delta t) \cdot \Delta t$

kitérés $2\Delta t$ -ben : $x(2\Delta t) = x(\Delta t) + v(\frac{3}{2}\Delta t) \cdot \Delta t$

$t = 2\Delta t$ – ben : $a(2\Delta t) = \frac{F_r(x(2\Delta t))}{m}$

$t = 5\Delta t/2$ – ben : $v(\frac{5}{2}\Delta t) = v(\frac{3}{2}\Delta t) + a(2\Delta t) \cdot \Delta t$

kitérés $3\Delta t$ -ben : $x(3\Delta t) = x(2\Delta t) + v(\frac{5}{2}\Delta t) \cdot \Delta t$

és így tovább tetsz. ideig ...

kirajzoltatni az $x(t)$, $v(t)$ és $a(t)$ függvényeket

analitikus megoldás :

$$\text{N.II.} \rightarrow -k \cdot x = m \cdot a \quad \rightarrow \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_r}{m} = -\frac{k}{m} x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

az ismrtl. egy függvény : $x = x(t)$
és annak deriváltja

= differenciálegyenlet

a harm.rezgésnél volt olyan kitérés-idő függés, h. a hely és annak 2. deriváltja (=gyorsulás) megegyezett:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

visszahelyettesítéssel
ellenőrizhetjük, h. ez
kielégíti a fenti diff.
egy.-t

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\quad} & \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} \mathbf{x} \xleftarrow{\quad} \\
 \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\mathbf{A} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) & & \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \\
 \underbrace{\hspace{15em}} & & \\
 -\mathbf{A} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = -\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{A} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) & & \\
 \updownarrow & & \\
 \omega^2 = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}} & &
 \end{array}$$

de $\mathbf{A}$ és φ_0 tetszőleges lehet

→ meghatározhatók a kezdeti feltételekből :

$$t = 0 \text{ - ban : } \quad \mathbf{x}(0) = 0, \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = \mathbf{A} \cdot \sin(\varphi_0) = 0 \longrightarrow \mathbf{A} \cdot \sin(\varphi_0) = 0$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{A} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = \mathbf{A} \cdot \omega \cdot \cos(\varphi_0) = \mathbf{v}_0$$

$$\longrightarrow \mathbf{A} \cdot \omega \cdot \cos(\varphi_0) = \mathbf{v}_0$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot \sin(\varphi_0) = 0 \xrightarrow{\text{green}} \varphi_0 = 0 \\ A \cdot \omega \cdot \cos(\varphi_0) = v_0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{green}} \mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} = \mathbf{v}_0 \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}}$$

tehát a megoldás :

$$\mathbf{x(t)} = \mathbf{v}_0 \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}} \cdot \mathbf{t} + 0\right)$$

vagyis : a rúgón rezgő test harm. rezgőmozg. végez,
melynek körfrekv.-ja :

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}}$$

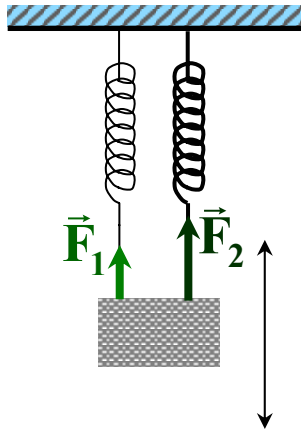
rezgésideje :

$$\mathbf{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}}$$

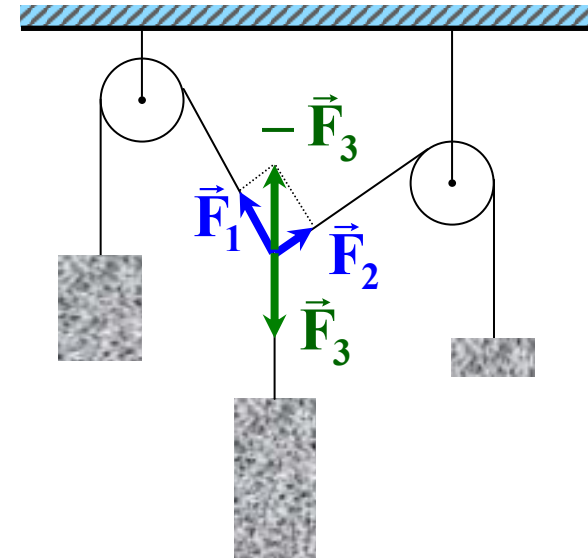
hasonló problémáknak **hasonló a megoldása is !!!**
lásd pl. : ingamozgás !

további tapasztalat :

ha több erő hat egy testre, pl. több rúgó:



vagy :



pl. speciálisan :

rúgón függő test

vsz. alátámasztáson levő test

2 erő $\longrightarrow$ egyensúly

$\neq$ nyugalom

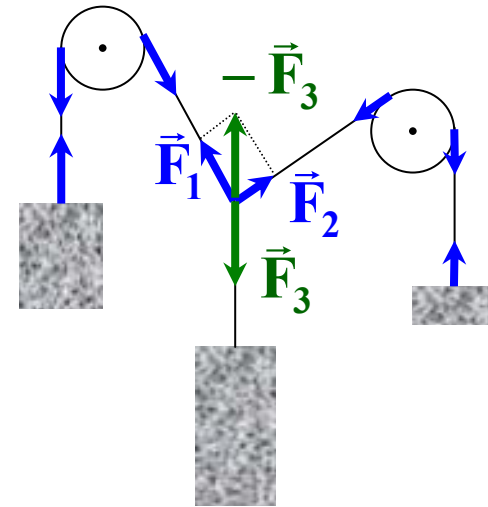
$$\mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \left(\sum \vec{\mathbf{F}}_i \right) \longrightarrow \text{eredő erő}$$

$\longrightarrow$ **Newton IV. törv.**

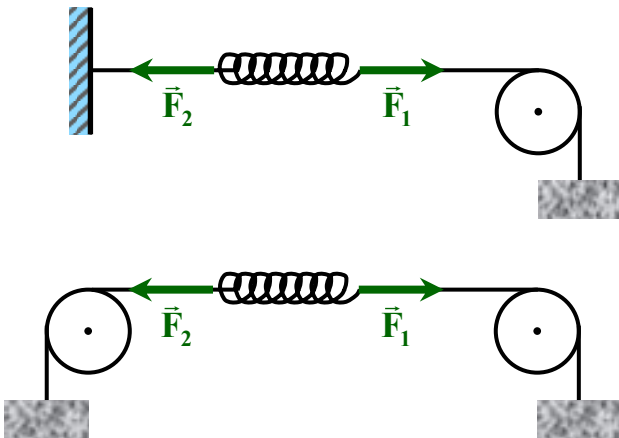
(= erőhatások függetlenségének elve)

ha speciálisan : a kötélnak nincs súlya (tömege), vagy van, csak nyugvó kötel, akkor a meghúzott kötel az egyik végére ható erőt „változtatás nélkül továbbítja” a másik végén levő testhez :

rúgóra hasonlóan
vonatszerelvény ...



de odafigyelni :



$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2$$

pl.

magdeburgi féltekék :
8-8 ló $\neq$ 16 ló !!!
hanem csak 8 ló

mi van, ha függőlegesen van a rúgó ? :

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x + mg = -k \cdot \left(x - \frac{mg}{k} \right)$$

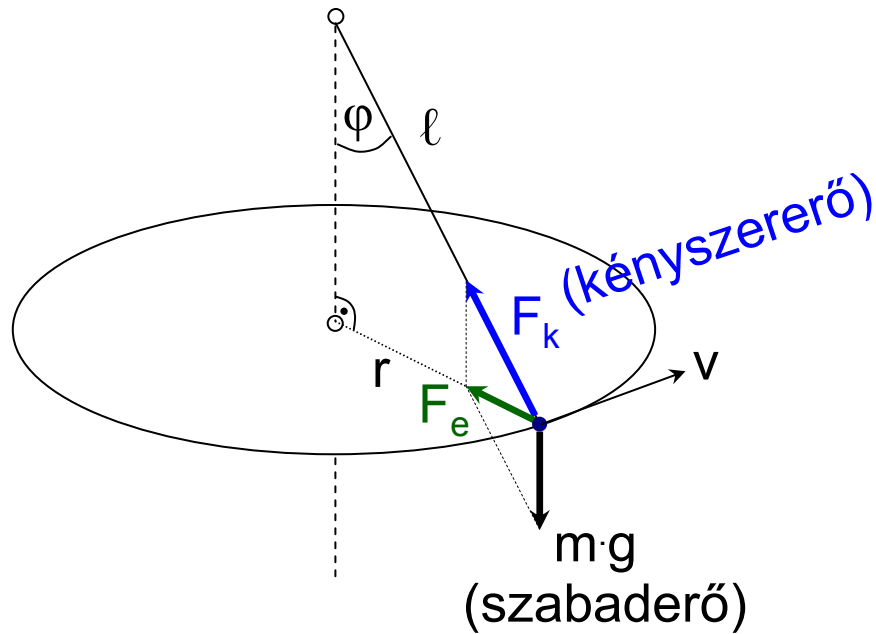
$$\begin{array}{c} \uparrow \\ x' := x - \frac{mg}{k}, \end{array} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x' \quad \longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

tehát : ugyanaz, mint vsz. rúgó, csak

az $\frac{mg}{k}$ lesz az új egyensúlyi helyzet

pl. : kúpinga :



körmozgás :

$$r = \ell \cdot \sin \varphi$$

F_e a kp. felé mutat

$$F_{cp} = F_e$$

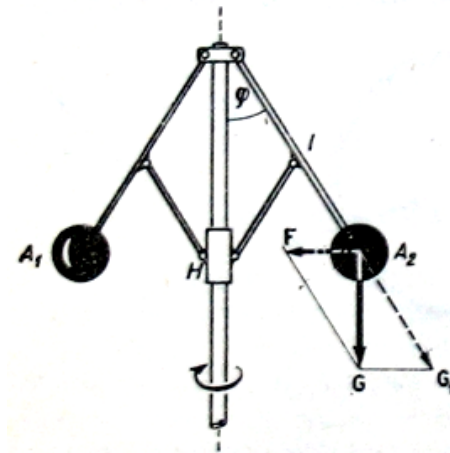
$$F_e = mg \cdot \tan \varphi$$

N.II. : $F_{cp} = m \cdot a_{cp} = m \cdot r \cdot \omega^2$ $\omega = 2\pi \cdot n$

$$mg \cdot \tan \varphi = m \cdot (\ell \cdot \sin \varphi) \cdot \omega^2 = m \cdot (\ell \sin \varphi) \cdot (2\pi n)^2$$

$$\frac{g}{\cos \varphi} = \ell \cdot 4\pi^2 \cdot n^2$$

$$\cos \varphi = \frac{g}{\ell \cdot 4\pi^2 \cdot n^2} \longrightarrow \text{centrifugális szabályozó :}$$



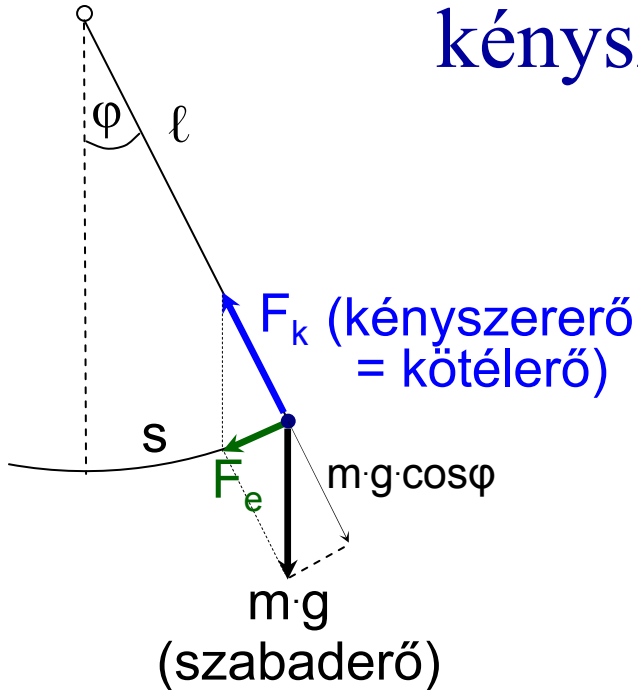
pl. : matematikai inga : = kötélíng, fonálinga

vékony, „súlytalan”, nyújthatatlan fonálon lengő test

kényszermozgás $\rightarrow$ síkmozgás (körpálya)

pillanatnyi helyzet : $\varphi = \varphi(t)$

erők : $m \cdot g$ ✓
 F_k ?



kötélirányú és érintőirányú
komponensekre bontva :

kötélirányban : $\sum F_{i,k} = 0$

$$F_k - m \cdot g \cdot \cos \varphi = 0$$



érintő irányában : $F_e = m \cdot g \cdot \sin \varphi$

N. II. : $m \cdot a = F_e$ *mozgásegyenlet*

$$m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \cdot \sin \varphi \quad \text{és} \quad s = \ell \cdot \varphi$$

$$m \cdot \ell \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \cdot \sin \varphi$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \cdot \sin \varphi$$

ha φ kicsi $\longrightarrow \sin \varphi \approx \varphi$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \cdot \varphi = -\omega^2 \cdot \varphi, \quad \text{ahol } \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

ez ugyanolyan egyenlet, mint a harm. rezgőmozg. :

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha_k)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \longrightarrow g - t \text{ lehet mérni}$$

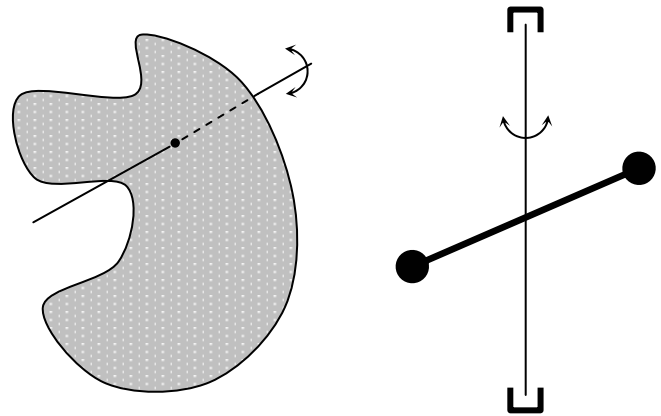
de : T függ φ_0 -tól : nagyobb amplitúdó

→ nagyobb T !!!

hasonlóan a fizikai inga :

T függ a geometriai méretektől
 g - t itt is lehet mérni

torziós inga : ezeket ld. később
(merev testeknél)



pl. : égitestek mozgása :

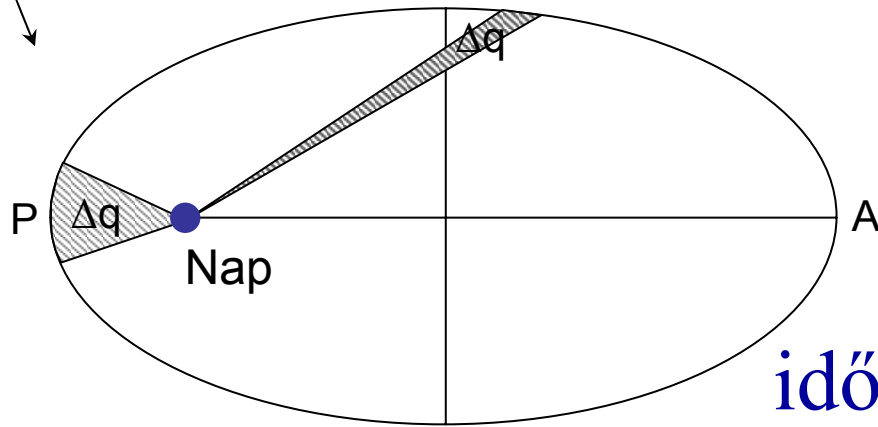
(bolygómozgás, mesterséges égitestek, Kepler törv.-i)

i.e. 2.sz. : geocentrikus világkép (Ptolemaiosz) = körpályák, kp.-ban a Föld

≈ 1500 : helocentrikus világkép (Kopernikusz) Nap körüli pályák, és tengely körüli forgás

1609-1619 : **Kepler-törv.-k** : Tycho Brahe is !

1. ellipszispálya, egyik gyújtópt.-ban a Föld;
2. a Naptól a bolygókhoz húzott sugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket sűrol;
3. a bolygók keringési időinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint az ellipszispályák nagytengelyeinek köbei.



időegység alatt sűrolt terület =
területsebesség $\approx \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = \text{áll.}$

a Föld sebessége legnagyobb P-ben (január 3-án)
legkisebb A-ban

bolygómozgás = **centrális mozgás** = a bolygóra ható erő mindig egy centrum felé mutat $\longrightarrow$ a gyorsulása is $\longrightarrow$ **centrális erők**

tétel :

$\forall$ centrális mozgásnál a tömegpt. pályája síkgörbe és a területi seb. állandó.

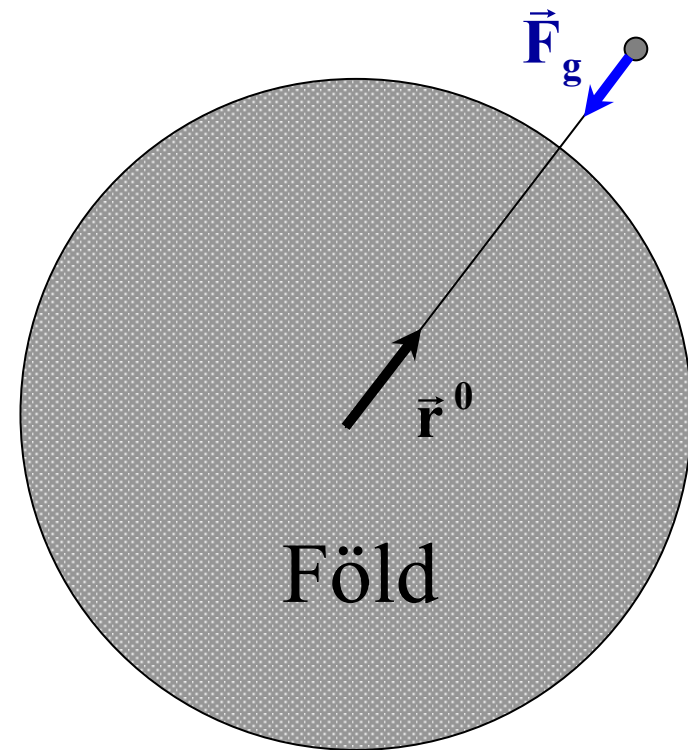
megfordítva : ha a pálya síkgörbe és a területi seb. áll. akkor a mozgás centrális mozgás.

biz. : ld. könyvekben...

már Kepler is sejtette az ált. tömegvonzás törv.-t

tömegpontoknak vesszük

$$\vec{F}_g = -\gamma \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{r}^0$$



pl. számítógéppel szimulálni
a mozgást :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F}_g = -\gamma \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{r}^0$$

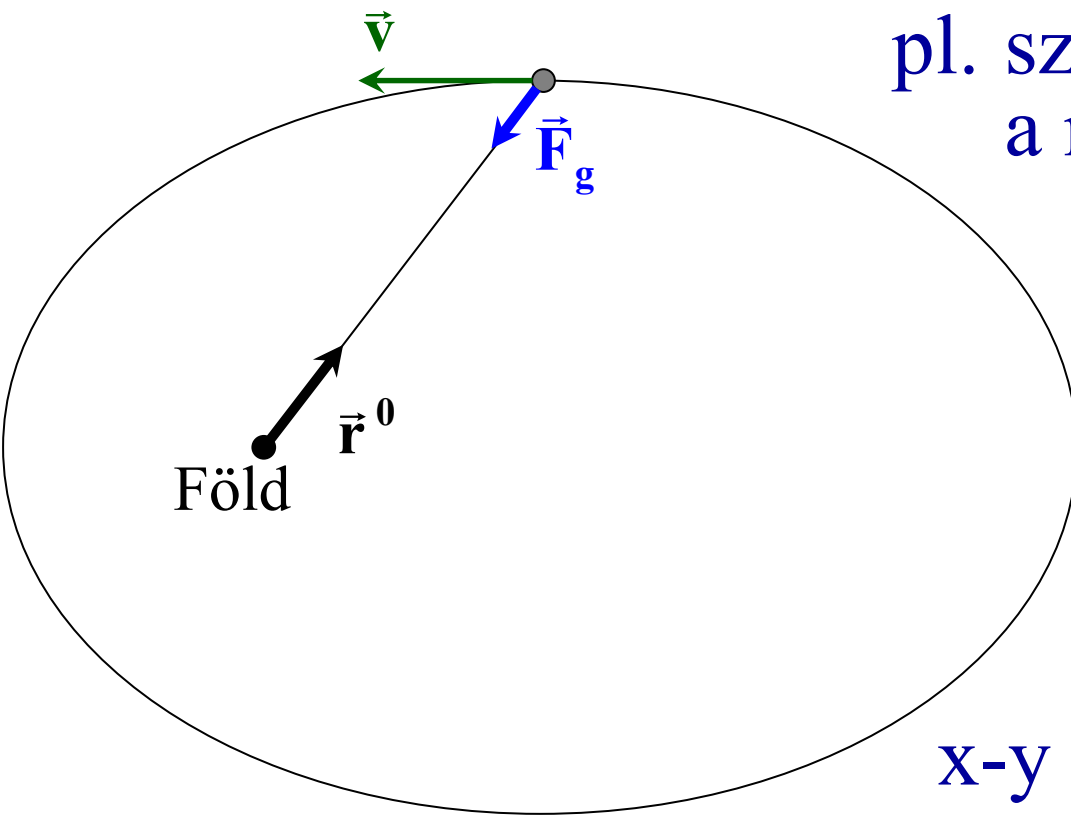
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\gamma \frac{M}{r^2} \vec{r}^0$$

x-y koordináta rendszerben

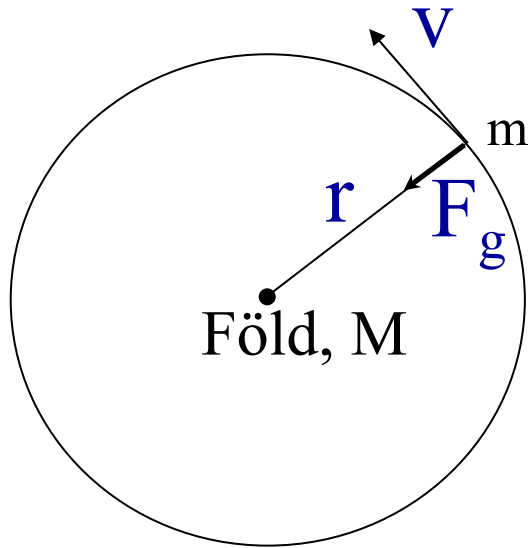
+ kezdeti feltételek : $x(0)$, $y(0)$, $v_x(0)$, $v_y(0)$

- ellipszis alakú pályák, egyik fókuszban a Föld (Kepler)
- nagytengely mérete és keringési idő v_0 -al nő
- ha speciálisan v_0 olyan, h. $a_{cp} = v_0^2/r$, $\longrightarrow F_{cp} = \gamma m M / r^2 = m v_0^2 / r \longrightarrow$ körpálya;

geostacionárius pálya



geostacionárius pálya :



$$\mathbf{F}_g = \gamma \frac{mM}{r^2} = m\mathbf{a}_{cp} = m\mathbf{r}\omega^2$$

$$\gamma M = r^3 \omega^2$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

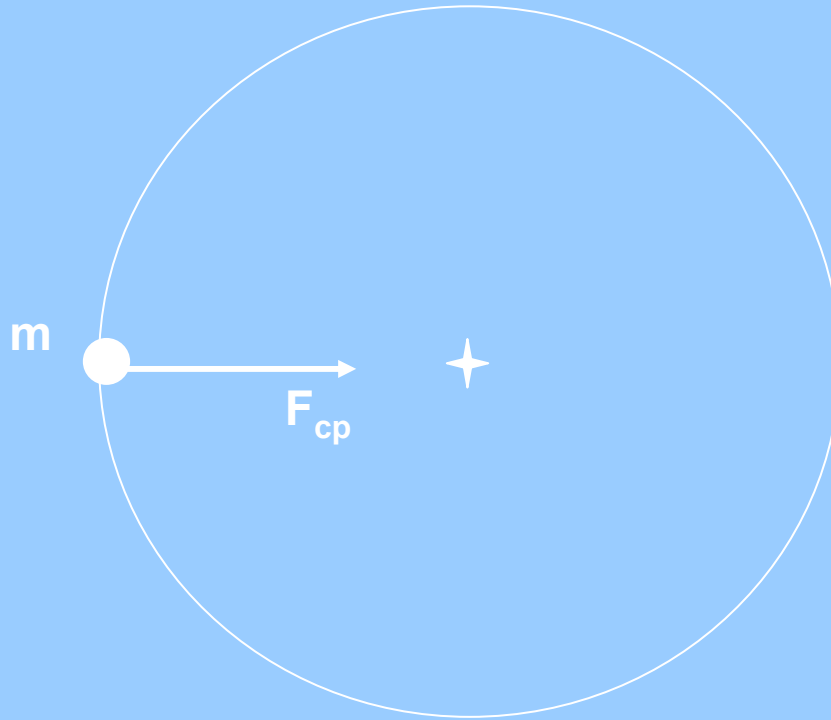
$$\text{és } T = 24\text{h} = 86400\text{s}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}} = \dots$$

pl. távközlési műholdak

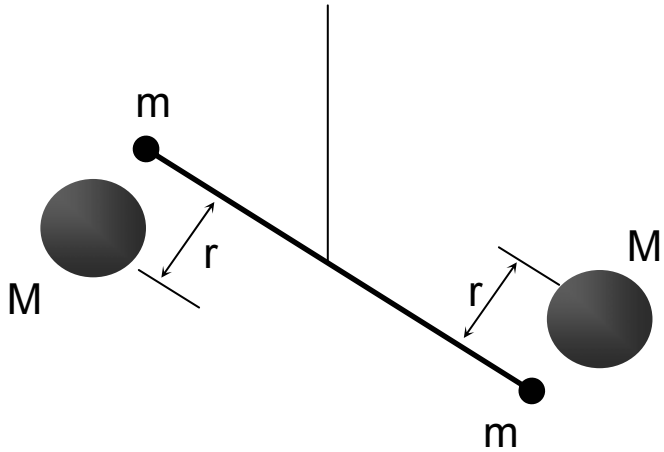
számítással kimutatható, h. a homogén gömb helyettesíthető egyetlen, ugyanolyan tömegű tömegponttal

de : F_{cp} **NEM** erőtvény



F_{cp} lehet pl kötélerő, rugóerő, grav.erő, ... (ami „húzza” a testet, h körpályán maradjon)

a grav. állandó meghatározása : Cavendish, 1798



M tömegeket tett a m golyók mellé szimmetrikusan és mérte a torziós szál szögelfordulását



$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

torziós ingát ld. később !

a Föld felületén :

$$\gamma \frac{m \cdot M_F}{R^2} = m \cdot g \longrightarrow \text{a Föld tömege :}$$

$$M_F = \frac{g}{\gamma} R^2 = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

a Föld sűrűsége :

$$\bar{\rho} = \frac{M_F}{\frac{4}{3}R^3\pi} \approx 5.5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

a felszínen csak $\bar{\rho} \approx 2.5 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ $\longrightarrow$ a belsejében $\rho > 5.5 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

pl. a Nap tömegének becslése :

$M_{\text{Nap}}, m_{\text{Mars}}, r, T$ ismert $\longrightarrow$

$$m_{\text{Mars}} \cdot a_{\text{cp}} = m_{\text{Mars}} \cdot r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = F_{\text{cp}} = \gamma \frac{m_{\text{Mars}} \cdot M_{\text{Nap}}}{r^2}$$

$$M_{\text{Nap}} \approx 332 \cdot 10^3 M_F$$

hasonlóan a holdakkal rendelkező bolygókra is...

$$\text{az } \mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \mathbf{m} \cdot \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}} = -\gamma \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{M}}{r^2} \vec{\mathbf{r}}^0$$

mozgásegyenletből matematikai úton levezethetők a Kepler-törv.-k

az is köv., h. más kúpszelet is lehet a pálya, pl. üstökösnél parabola v. hiperbola

sztatikai erőmérés, súlyos és tehetetlen tömeg :

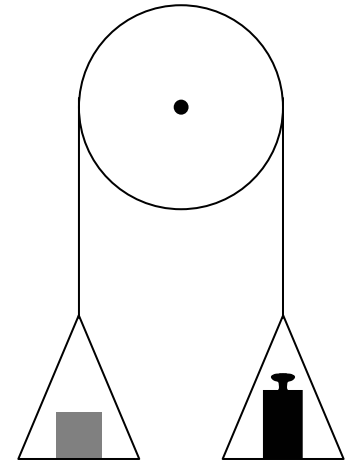
$G = m \cdot g \longrightarrow$ a súly a hellyel változik;
különböző testek súlya ugyanazon a helyen a tömegtől függ

rúgóra akasztott test nyugalomban van : $a = 0 \longrightarrow$ a rá ható erők eredője nulla

rúgós erőmérő $\longrightarrow$ egyszerű erőmérés = sztatikai erőmérés

súly $\sim$ tömeg $\longrightarrow$ tömegmérés :
($G = m \cdot g$)

mérlegek
(több ezer éve)



etalonok

ez a tömeg (súlyos tömeg, m_s) nem ugyanaz, mint
amit ütközésekkel definiáltunk (tehetetlen tömeg, m_t),
de pl. ha ez a test szabadon esik :

$$m_t \cdot a = m_s \cdot g$$

$$\frac{m_s}{m_t} = \frac{a}{g}$$

és $a = g$ minden testre egyforma $\longrightarrow$ **$m_t = m_s$**

Eötvös Loránd :

$m_t = m_s$ egyenlőség $5 \cdot 10^{-9}$ relatív hibával teljesül

sűrűség, fajsúly :

$$\left. \begin{array}{l} \text{homogén} \\ \text{inhomogén} \end{array} \right\} \text{anyag} \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{m}{V} \\ \rho = \frac{dm}{dV} \end{array} \right\} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

pl. : 1 kg víz 4 °C-on, normál nyomáson 1 dm³ (=1 ℓ)
 $\rho_{\text{víz}} = 1 \text{ kg/dm}^3$

pl. : galvanizált fémekre : ρ = átlagsűrűség
vas hajó sűrűsége is átlagsűrűség !

fajsúly ...

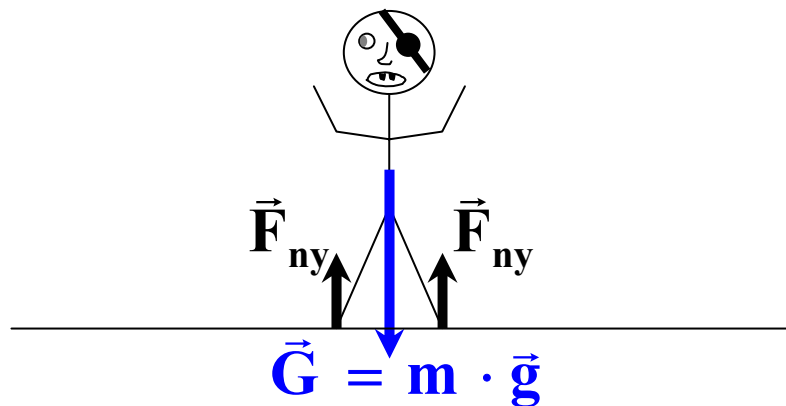
súlytalanság :

ha csak a saját súlya hat rá :

pl. : szabadon eső test

Föld körüli körpályán keringő test

a ránk ható súlyerőt akkor érezzük, ha az
alátámasztás által kifejtett nyomóerő is hat :



$$2\vec{F}_{ny} = m \vec{g}$$

pl. : hajítás dinamikai leírása :

csak a nehézségi erő hat a testre : N.II. : $m \cdot a = m \cdot g$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{g} \quad \longleftarrow \quad m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \cdot \vec{g}$$

tf.h. $g = \text{áll.}$

a Földhöz rögz., függ. fölfelé irányított z-tengely
esetén :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \text{const}_x$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = \text{const}_y$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z = -g \cdot t + \text{const}_z$$

$$x = v_x \cdot t + c_1$$

$$y = v_y \cdot t + c_2$$

$$z = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_z \cdot t + c_3$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_x \cdot \mathbf{t} + \mathbf{c}_1 \qquad \mathbf{y} = \mathbf{v}_y \cdot \mathbf{t} + \mathbf{c}_2 \qquad \mathbf{z} = -\frac{\mathbf{g}}{2} \cdot \mathbf{t}^2 + \mathbf{v}_z \cdot \mathbf{t} + \mathbf{c}_3$$

6 db ismeretlen : v_x, v_y, v_z és $c_1 \dots c_3$

meghatározásuk a kezdeti feltételekből

ha pl. : $t = 0$ – ban $\vec{\mathbf{r}}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\vec{\mathbf{v}}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$

$$x_0 = c_1, y_0 = c_2 \text{ és } z_0 = c_3$$

$$\text{const}_x = v_x = v_{0x}, \text{const}_y = v_y = v_{0y} \text{ és } \text{const}_z = v_{0z}$$



hajítás

kényszererők, kényszermozgás :

a Földön is tudunk inercimozgást létrehozni
közelítőleg !

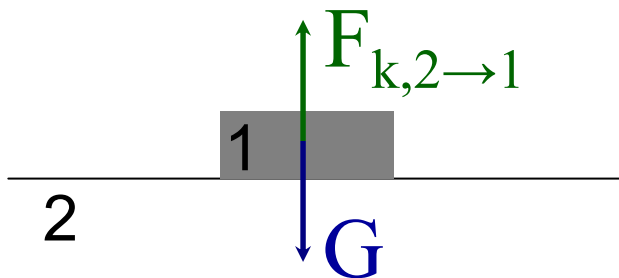
pl. légpárnás asztalon vagy sinen

→ az alátámasztás a tömegpontot a felületen való
maradásra kényszeríti



kényszererő, az alátámasztás pedig a **kényszer**

pl. : nyugvó asztalon álló test még egyszer :



$$\vec{F}_{\text{eredő}} = \vec{G} + \vec{F}_{k,2 \rightarrow 1}$$

$$\text{mivel áll : } \vec{a} = \mathbf{0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{eredő}} = \vec{G} + \vec{F}_{k,2 \rightarrow 1} \\ \text{mivel áll : } \vec{a} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \vec{F}_{k,2 \rightarrow 1} = -\vec{G}$$

$$(F_{\text{ny}} = -mg)$$

ha az alátámasztás mozog is, pl. a gyorsulással
süllyed egy lift :

$$\vec{F}_{\text{eredő}} = \vec{G} + \vec{F}_{k,2 \rightarrow 1} = m \cdot \vec{a}$$



$$\vec{F}_{k,2 \rightarrow 1} = -\vec{G} + m \cdot \vec{a} = -m(\vec{g} - \vec{a})$$
$$\begin{aligned} (m \cdot g - F_{ny} &= m \cdot a) \\ (F_{ny} &= m \cdot (g - a)) \end{aligned}$$

N.III.  $F_{\text{test} \rightarrow \text{asztal}} = -F_{k,2 \rightarrow 1} = G$

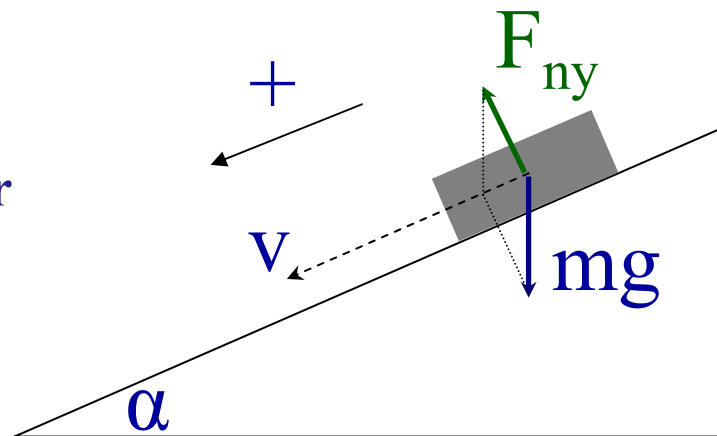
pl. : miért van „bedöntve” a kanyar ?

pl. : két kötélen felfüggesztett test lámpa két fal között kifeszített dróton lejtőn lecsúszó test	}	ld. önállóan !
---	---	----------------

lejtőn lecsúszó test :

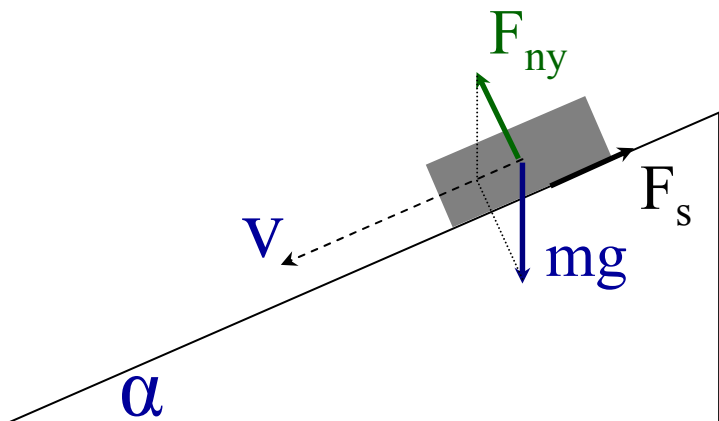
N.II.: $\mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{szabad}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{kényszer}}$

$\mathbf{a} = \mathbf{g} \cdot \sin \alpha$



$\mathbf{F}_e = \mathbf{mg} \cdot \sin \alpha$

ha adott μ_{cs} :



$$\mathbf{F}_e = \mathbf{mg} \cdot \sin \alpha - \mathbf{F}_s = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}$$
$$\mathbf{mg} \cdot \sin \alpha - \mu_{cs} \cdot \mathbf{mg} \cdot \cos \alpha = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}$$
$$\mathbf{a} = \mathbf{g} \cdot (\sin \alpha - \mu_{cs} \cdot \cos \alpha)$$

az m tömegű testre :

$$\text{N.II.: } \mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \sum \vec{\mathbf{F}}$$

$$m \cdot \mathbf{a} = mg \cdot \sin \alpha - F_k$$

az m_1 tömegű testre N.II. : $\mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \sum \vec{\mathbf{F}}$

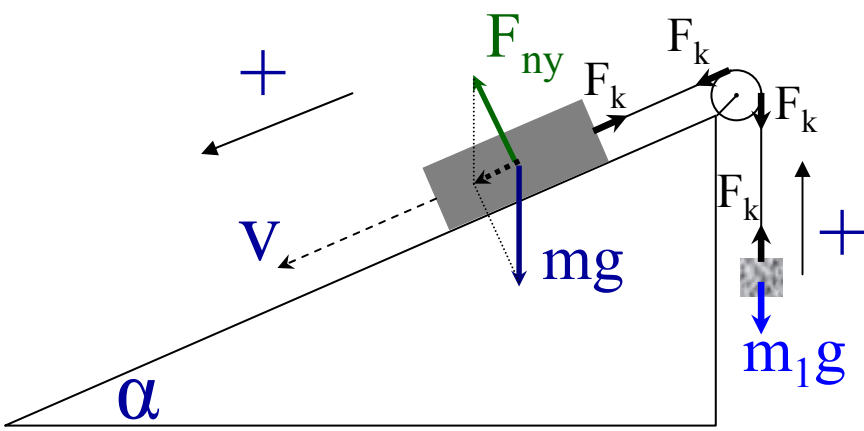
$$F_k - m_1 \cdot g = m_1 \cdot \mathbf{a}$$

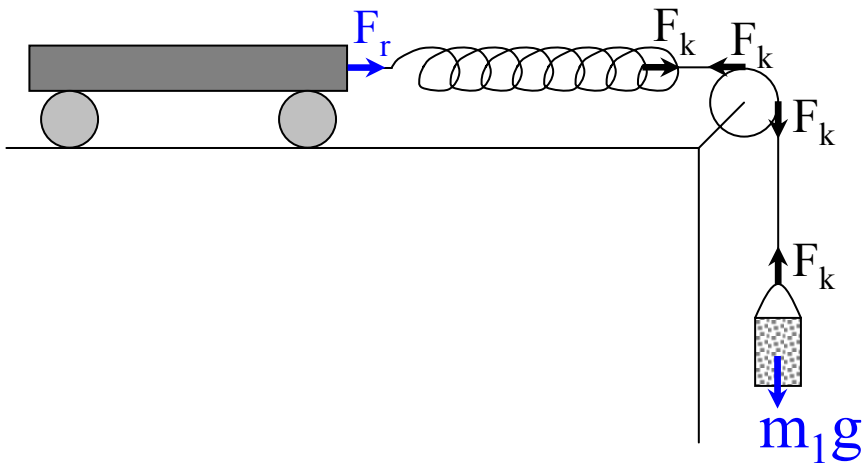
ha a kötélnyújthatatlan !

ha a kötélsúlytalan !

2 egyenlet és 2 ismeretlen $\longrightarrow F_k$ és $\mathbf{a}$ meghatározható

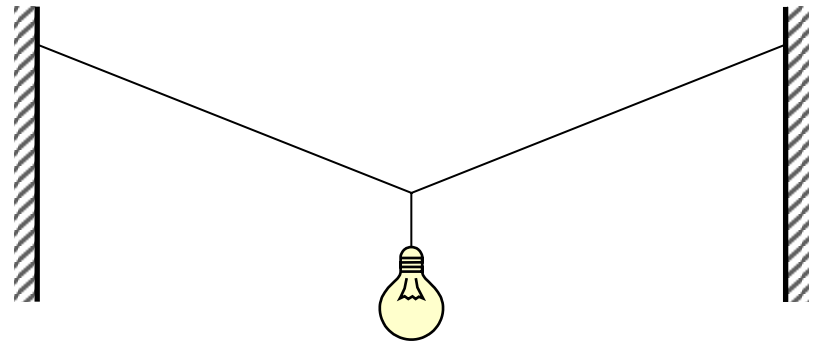
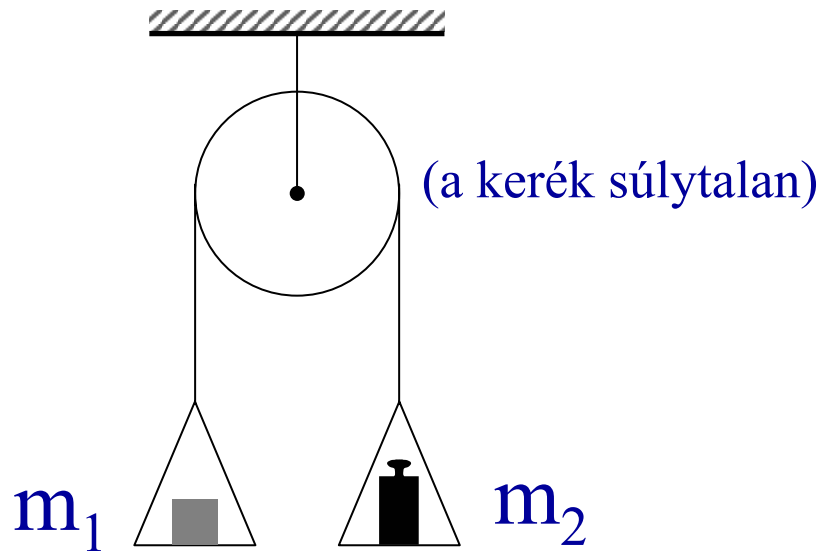
ha még súrl. is van ...





(a kerék és a rúgó súlytalan)

$$F_r = F_k$$



mozgás mozgó vonatkoztatási rendszerben :

Galilei-féle relativitási elv : egymáshoz képest egyenletesen haladó vonatk.rdsz.-k közül nem tudunk egy abszolút nyugalomban levőt kiválasztani
pl. : egyenl. mozgó vonaton egy inga ugyanúgy leng, mint az állomáson

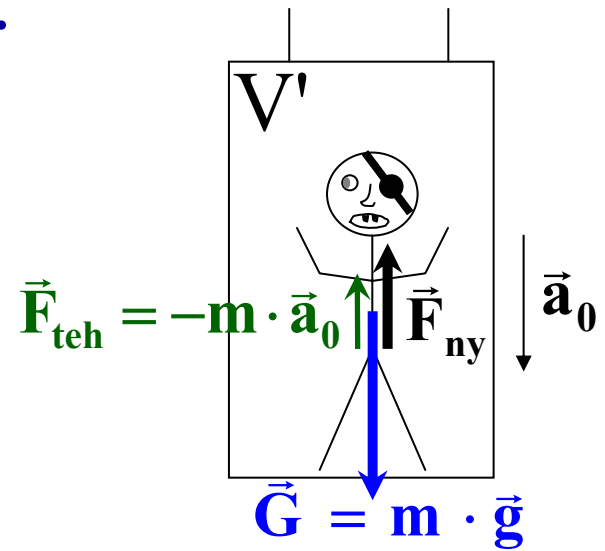
gyorsulva haladó vonatk. rdsz. :

pl. : mekkora erő hat egy a_0 gyorsulással lefele induló liftben álló emberre ? :

$$\vec{F}_{\text{teh}} = -m \cdot \vec{a}_0 \rightarrow \text{tehetetlenségi erő}$$



N.II. érvényes marad



az ember a lifthez képest nem gyorsul

$$\sum_i \vec{F}_i = \underbrace{\vec{G} + \vec{F}_{ny} + \vec{F}_{teh}}_{\vec{F}_{ny} \text{ meghatározható}} = m \cdot \vec{a} = 0$$

forgó rendszerben :

ha egy V' rendszer egyenletes $\vec{\omega}$ szögsebességgel forog egy „nyugvó” V -hez képest :

$$\vec{F}_{cf} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r} \quad \rightarrow \quad \text{centrifugális erő}$$

$$\vec{F}_{Co} = 2m \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega} \quad \rightarrow \quad \text{Coriolis-erő}$$

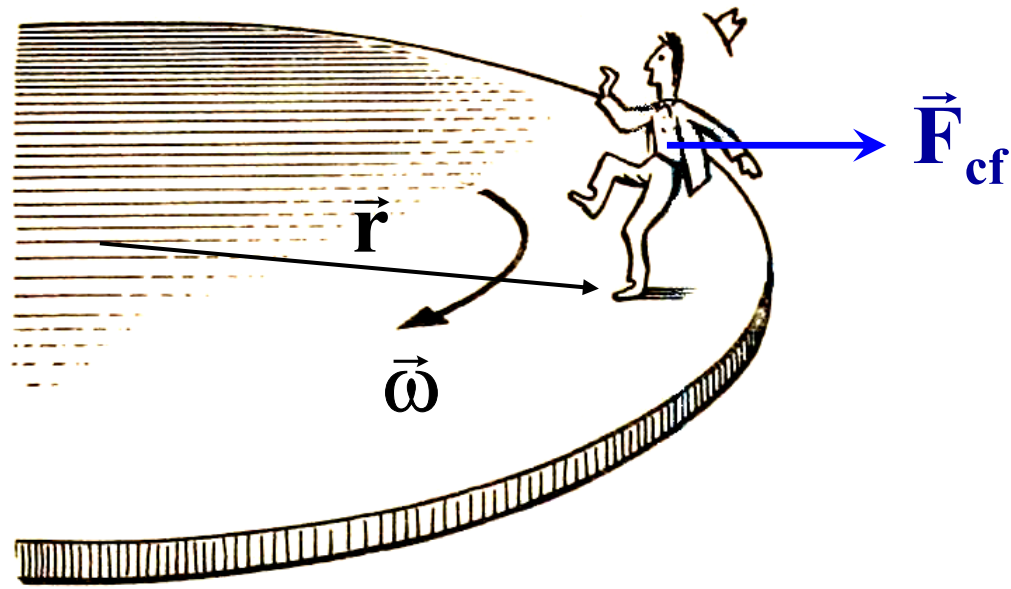


ezekkel N.II. forgó rdsz.-ben is igaz :

$$m \cdot \vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_{Co}$$

pl. : forgó rendszerben
álló test

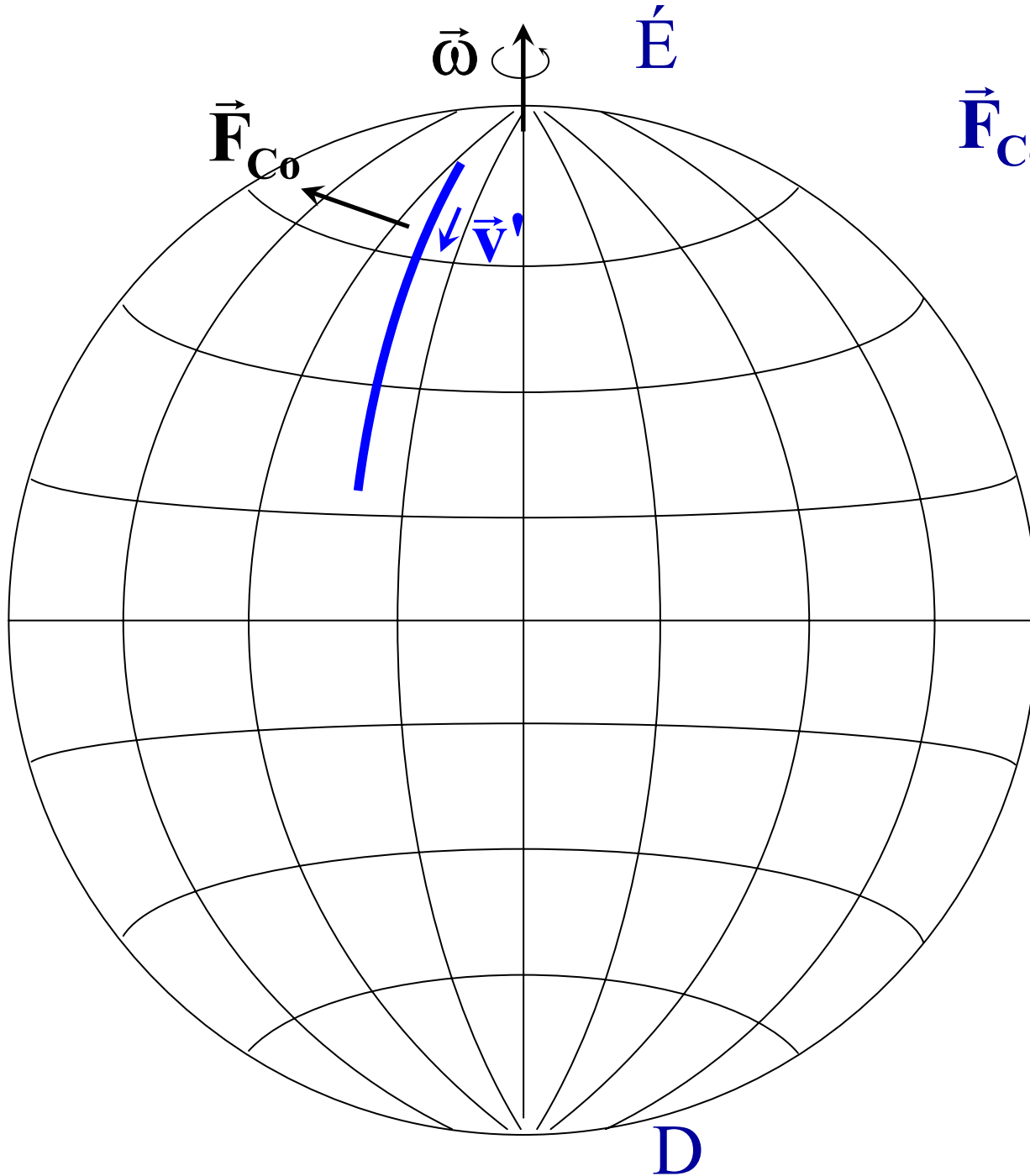
$$\vec{F}_{cf} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$$



pl. : az északi féltekén É-D irányban folyó folyók a
jobb partjukat mossák, vagy
az É-D irányban haladó vonatok kerekei a jobb
oldali sint jobban koptatják

$$\vec{F}_{C_0} = 2m \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega} \quad \text{miatt}$$

a kádban lefolyó víz forog



$$\vec{F}_{C_0} = 2\mathbf{m} \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega}$$

a Föld tényleg forog ? :

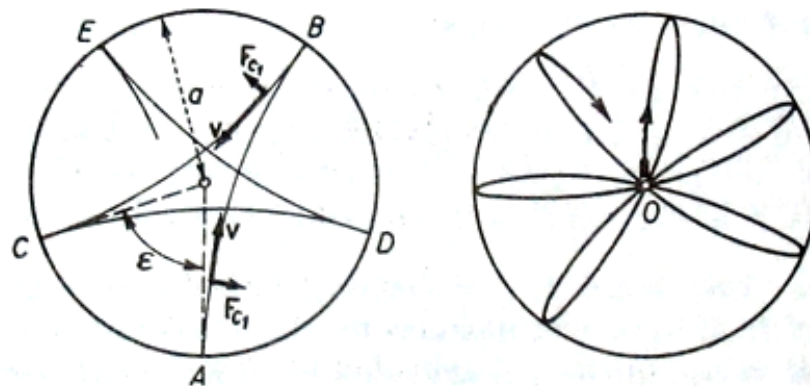
igen, bizonyíték a Foucault-féle ingakísérlet :

hosszú kötélén nagy tömeg leng

→ sokáig leng, kis csillapodással

kezdeti lengési síkot megjelölik, tapasztalat :

lengési sík óránként kb. 15° -t elfordul



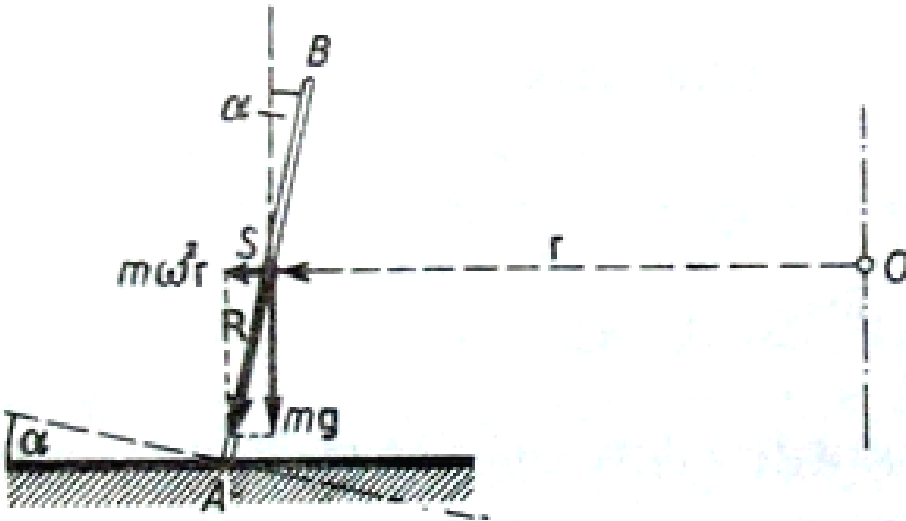
értelmezés :

forgó rdsz.-ben : a testre oldalirányú eltérítő erő hat,
a pillanatnyi seb.-hez képest jobb
oldal felé (= Coriolis-erő)

inerciardsz.-ben : az inga megtartja lengési síkját,
csak a Föld „kifordul” alóla

példák, alkalmazások :

1. kerékpár ($\vec{v}$) bedől (α) a kanyarban :



$\omega = \frac{v}{r}$ szögseb.-el
forgó rdsz-ből
nézve :

a bicikli nyugalomban
van :

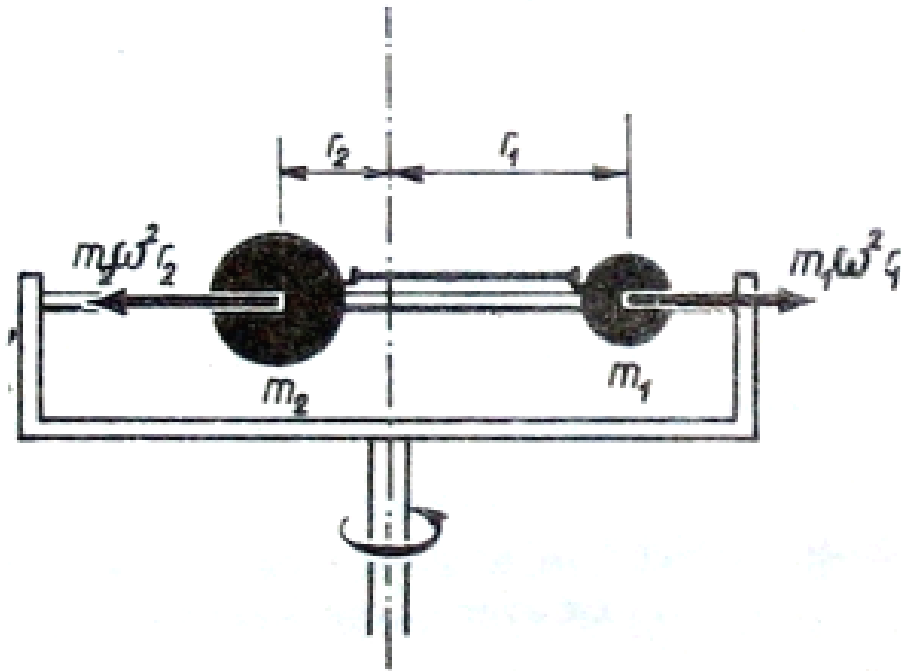
$m\vec{g}$ és $m\vec{r}\omega^2$ eredője $\vec{R}$

$\vec{R}$ a bicikli síkjában kell, h. legyen

$$\longrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{v^2}{rg}$$

a talaj síkjának $\approx \perp$ kell lenni biciklire, mert a tapadás
nem tud egyensúlyt tartani $\longrightarrow$ kicsúszik oldalra
 $\longrightarrow$ a versenypályák külsejét megemelik

kanyarban a vasúti sín külső szálát is feljebb teszik
 2. két golyó centrifugális géppel megforgatva :



golyók a forgó rdsz.-ben
 egyensúlyban vannak, ha

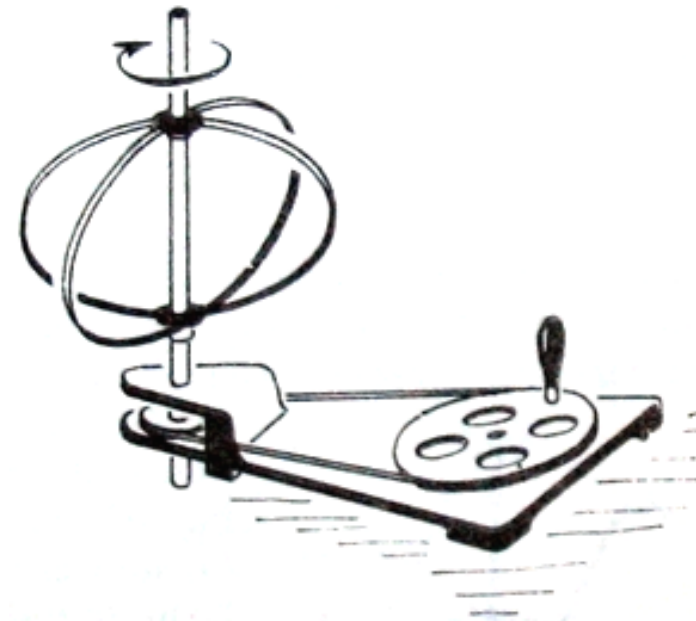
$$m_1 \vec{r}_1 \omega^2 = m_2 \vec{r}_2 \omega^2$$

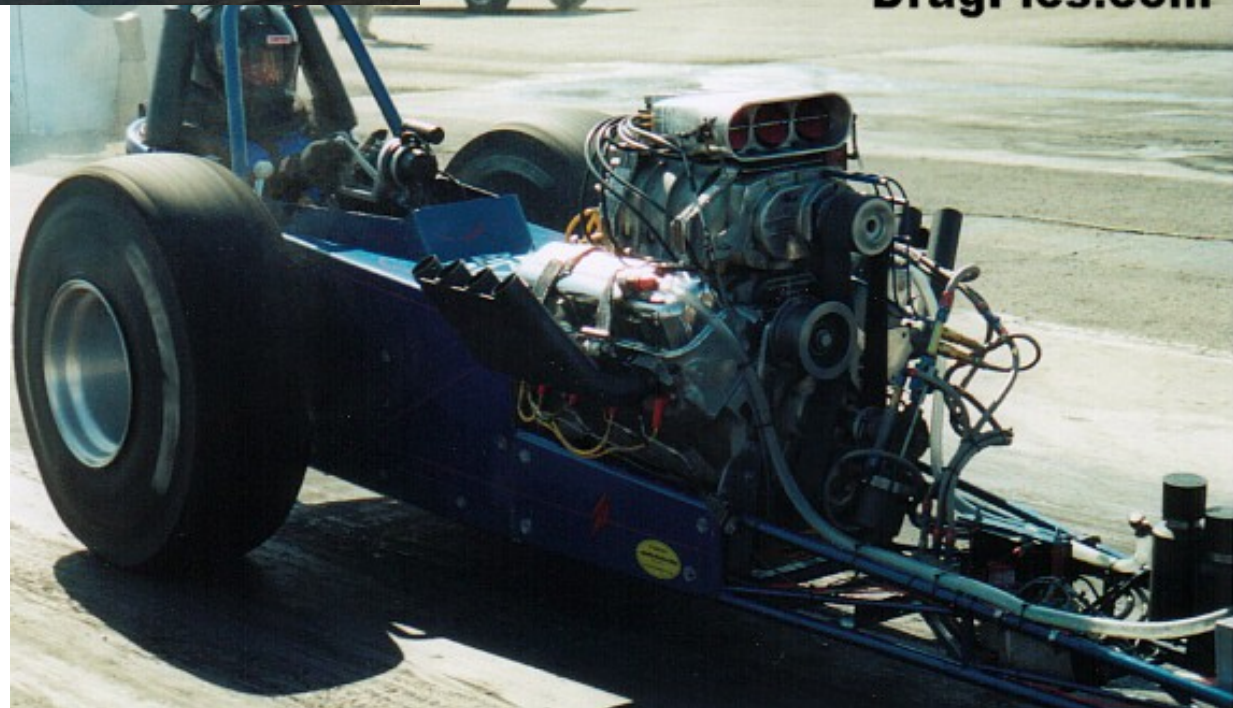
$$m_1 \vec{r}_1 = m_2 \vec{r}_2$$

3. forgó abroncs belapul :
kísérlet !

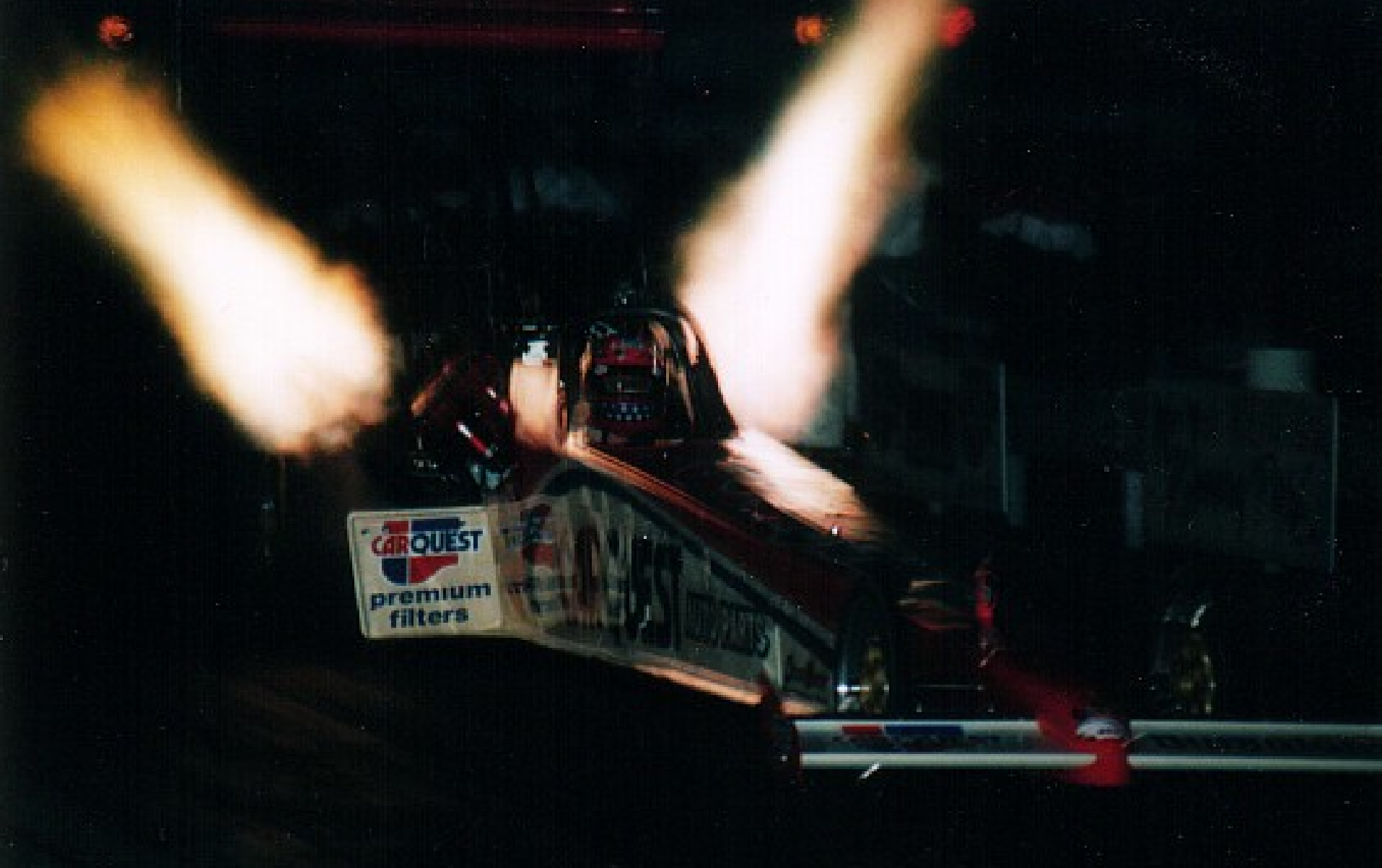
kerékre kifelé ható $F_{cf} = F_{deform}$

pl. gyorsulási verseny:
 hátsó kerék









DragPics.com





4. dinamikus merevség :

kísérletek :

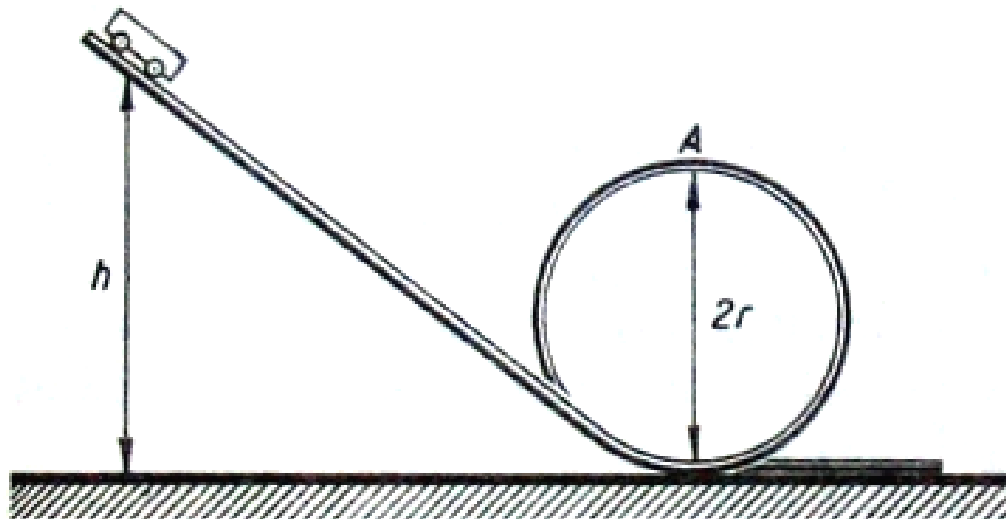
forgó lánc „kemény” → gurul, akadályokat átugrik
forgó papírlap „merev” → fűrészelni lehet vele

5. centrifuga : háztartás, biológia, élelmiszeripar,...

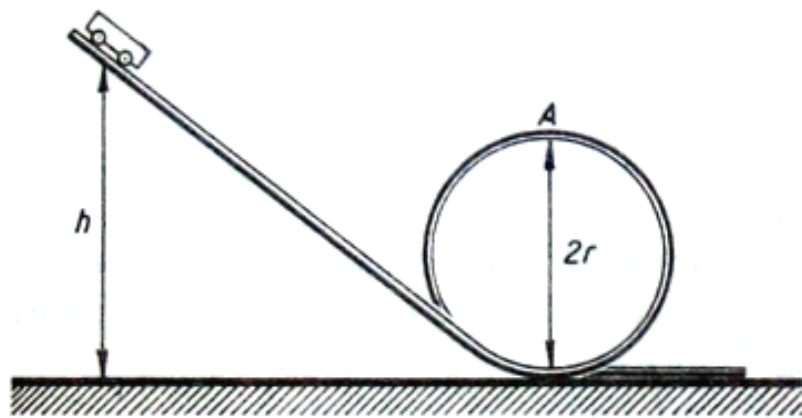
6. centrifugál szabályozó

7. szivattyúk

8. cirkusz:



$h = ?$



a kocsiban ülve a körpályán
forgó rendszerből nézzük :

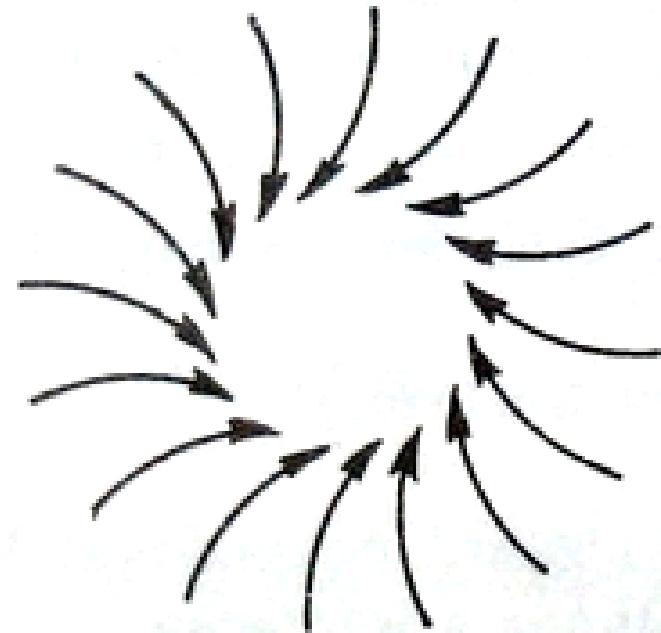
A-ban F_{cf} fölfelé min. akkora
legyen mint $m \cdot g$ lefelé :

$$\frac{mv_A^2}{r} \geq mg$$

(+ energiamegmaradás $\rightarrow$ később)

9. ciklonok : (az É-i féltekén) (F_{Co})

passzátszelek, ÉK és DK felé,
a levegő a kisebb nyomású
helyekre áramlik + F_{Co}



10. a lövedékek jobbra eltérnek

11. a Föld a sarkoknál belapul

12. a szabadon eső testek K-felé eltérnek :

a 45 szélességi foknál: 100 m magasságnál 1.5 cm-t

13. ha egy test $K \rightarrow NY$ irányban mozog :

F_{Co} lefelé mutat $\longrightarrow$ látszólagos súlynövekedés
Eötvös-effektus $\longleftarrow$

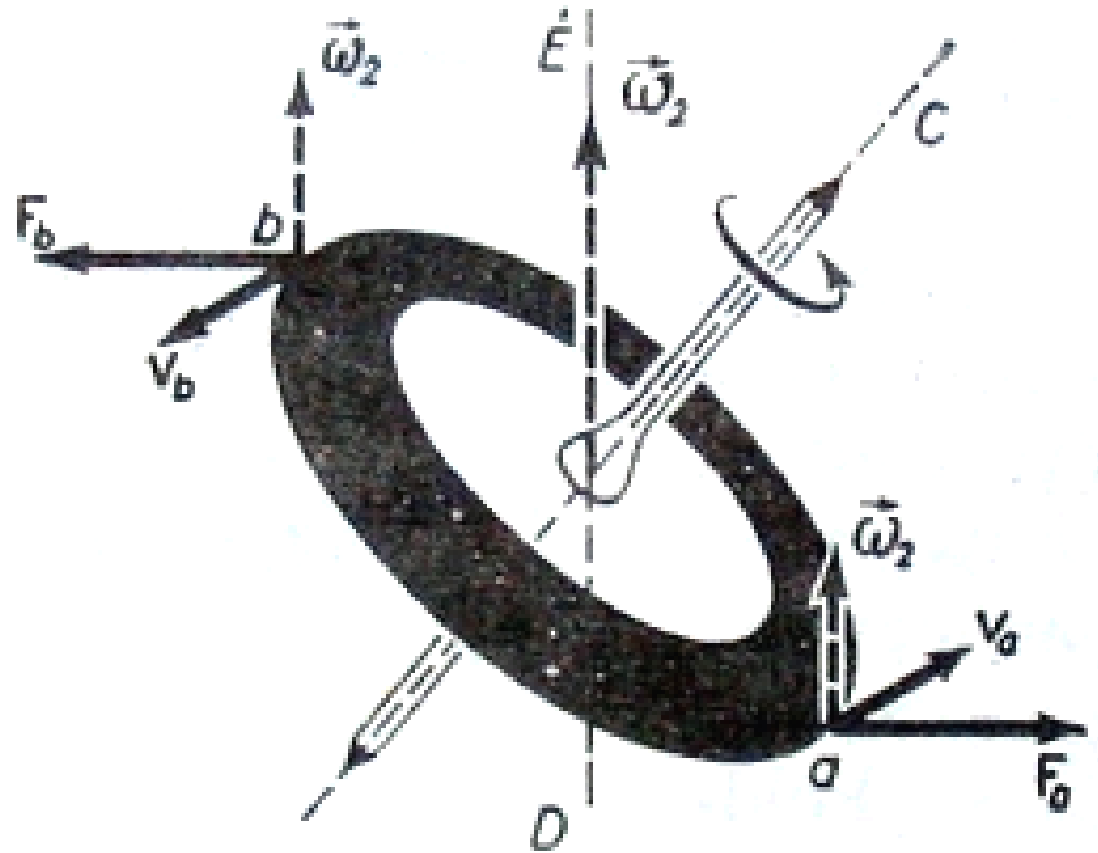
$NY \rightarrow K$ irányban fordítva

pörgettyűs iránytű :

Foucault, 1852

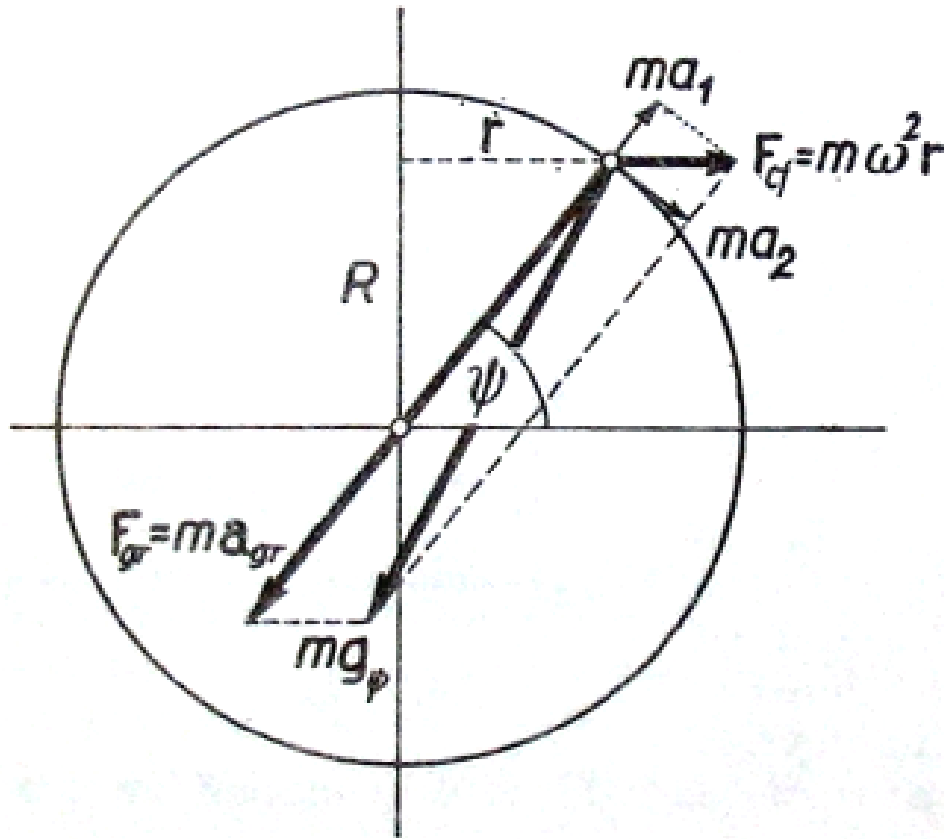


a C szimm.-teng. a függ.
körül elfordulhat
a pörgettyű C körül gyorsan
forog $\longrightarrow$ a rá ható F_{Co}
miatt beáll É-D irányba



pörgettyűt ld. később

nehézségi erő, gravitációs tér :



$$\text{súly} = m\vec{g}_\psi = \vec{F}_{gr} + \vec{F}_{cf}$$

$$\text{és } \vec{g}_\psi = \vec{a}_{gr} + \vec{a}_{cf}$$

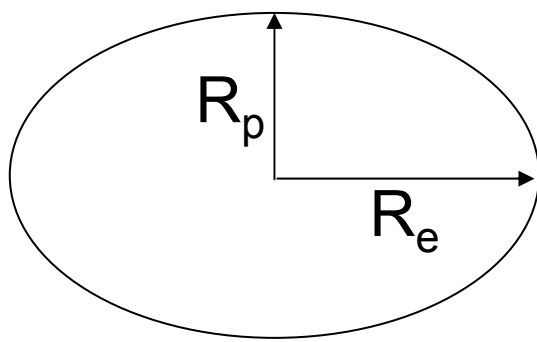


a súly nem a középpont felé mutat !!!
(csak a sarkokon)

a súly és $g = g_\psi$ a sarkokon a legnagyobb (ott $F_{cf} = 0$),
az egyenlítőn a legkisebb (F_{cf} itt a legnagyobb)

de a Föld nem gömb $\rightarrow$ geoid (= forgási ellipszoid),
a felülete mindenütt $\perp$ a grav. és F_{cf} erők eredőjére

Föld :



$$R_e = 6378 \text{ km}$$

$$R_p = 6357 \text{ km}$$

számítás szerint : $g_\psi = (g_{90^\circ} - 3.4 \cos^2 \psi) \text{ cm/s}^2$

mérések szerint : $g_\psi = (983.2 - 5.2 \cos^2 \psi) \text{ cm/s}^2$

(nem egyeznek, mert nem gömb alakú)

de ettől van pontosabb g_ψ – formula is !

$$G_{\text{Budapest}} = 9.80852 \text{ m/s}^2$$

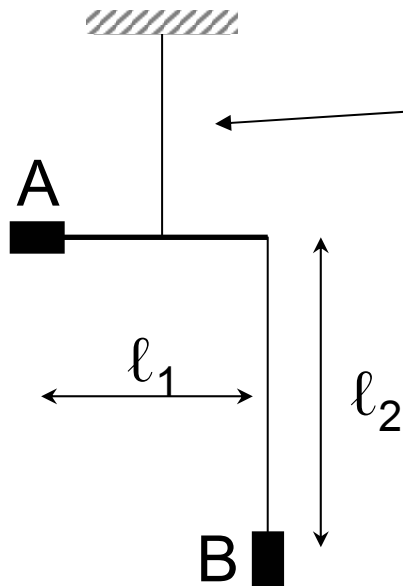
g függ a magasságtól is

g függ a helytől is :

a talaj sűrűségének lokális változásai miatt

→ ásványi anyagok, Föld szerkezetének kutatása

Eötvös Loránd : Eötvös-inga :



← $\approx 40\mu\text{m}$ Pt-Ir torziós szál

$$A = B = 15\text{-}20 \text{ g}$$

$$\ell_1 = 25\text{-}40 \text{ cm}$$

$$\ell_2 = 50\text{-}60 \text{ cm}$$

torziós szálon tükör → igen precíz leolvasás

a nehézségi erőter inhomogén → $\vec{g}_A \neq \vec{g}_B$



torziós szál elfordul

Eötvös : súlyos és tehetetlen tömeg egyenlősége

ld. otthon !

g időben sem állandó :

Nap és Hold hatása

árapály : ld. otthon !

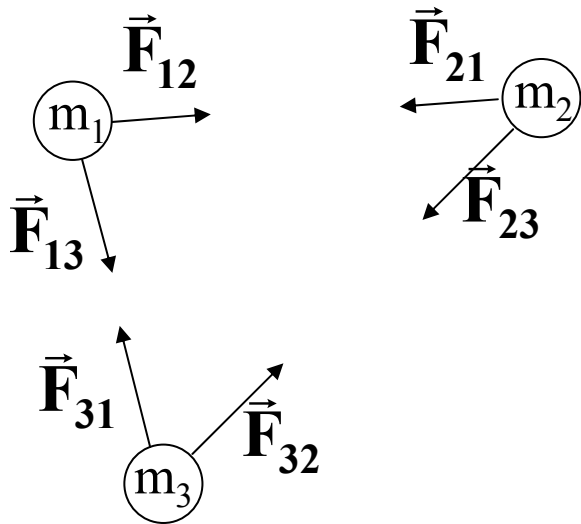
mozgástörvények pontrendszerre és testekre :

ha nem egyetlen tömegpontról van szó

tömegpontrendszer ↘

(pl. : szétrobbanó repeszdarabok)

zárt pontrendszer :



$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots$$

stb ...

de : erőhatások függetlensége + hatás-ellenhatás
minden pontra külön-külön $\longrightarrow \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

$$\frac{d\vec{p}_{\text{teljes}}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \dots = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} + \dots$$

$$\frac{d\vec{p}_{\text{teljes}}}{dt} = 0$$

$\vec{p}_{\text{teljes}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots = \text{állandó}$ ha külső erő nem hat
impulzusmegmaradás pontrendszerre

másként fogalmazva :

$$\vec{r}_{\text{tkp}} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \sum_i \frac{m_i \cdot \vec{r}_i}{m_i}$$

$$\vec{v}_{\text{tkp}} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} \longrightarrow m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots = (m_1 + m_2 + \dots) \cdot \vec{v}_{\text{tkp}}$$

$$\vec{p}_{\text{teljes}} = m \cdot \vec{v}_{\text{tkp}}$$

a tömegkp. sebessége állandó

a tömegkp. sebessége állandó = zárt rdsz. tkp.-ja
inerciamezgást végez

impulzustétel pontrendszerekre, azaz ha külső erők
is hatnak :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots \\ &\text{stb } \dots \end{aligned} \right\} \frac{d\vec{p}_{\text{teljes}}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i + \mathbf{0} = \vec{F}_{\text{eredő}}$$

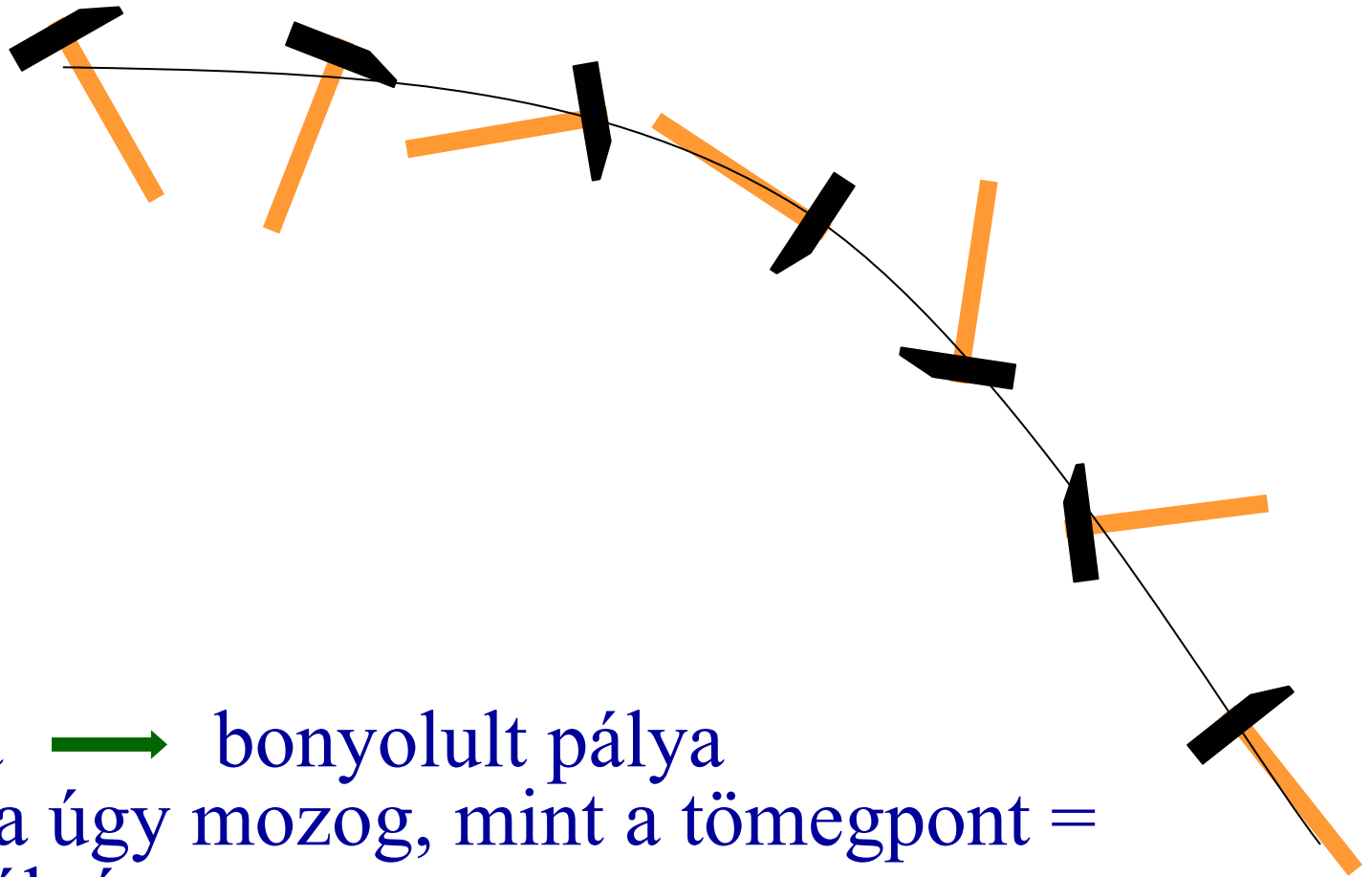


$$\vec{F}_{\text{eredő}} = m \cdot \vec{a}_{\text{tkp}}$$



a tömegközéppont úgy mozog, mint egyetlen
tömegpont, amiben a rendszer teljes tömege van és
amire az összes külső erők vektori eredője hat

merev test = speciális pontrendszer
pl. eldobott kalapács :



tetsz pt.-ja $\longrightarrow$ bonyolult pálya
de a tkp.-ja úgy mozog, mint a tömegpont =
parabolapályán

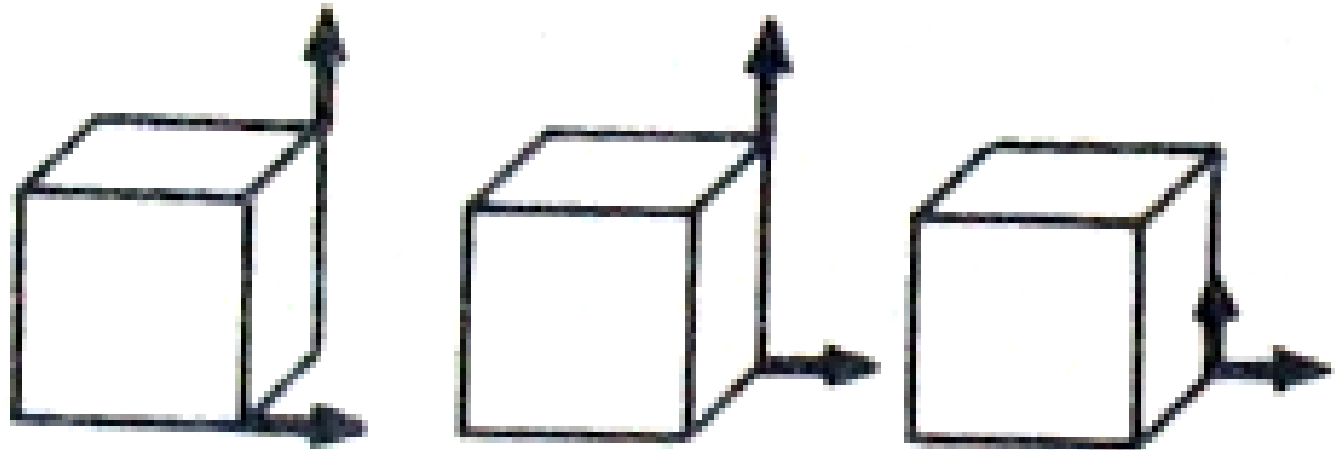
a tkp. úgy mozog, mint egyetlen elhajított tömegpont

$\forall$ test tömegpt.-nak vehető, ha haladó mozg.-t végez, vagy megelégszünk a tkp mozgásának leírásával
akkor elég a rá ható külső erőket ismerni (még ezen
erők támadáspt.-ját sem kell ismerni)

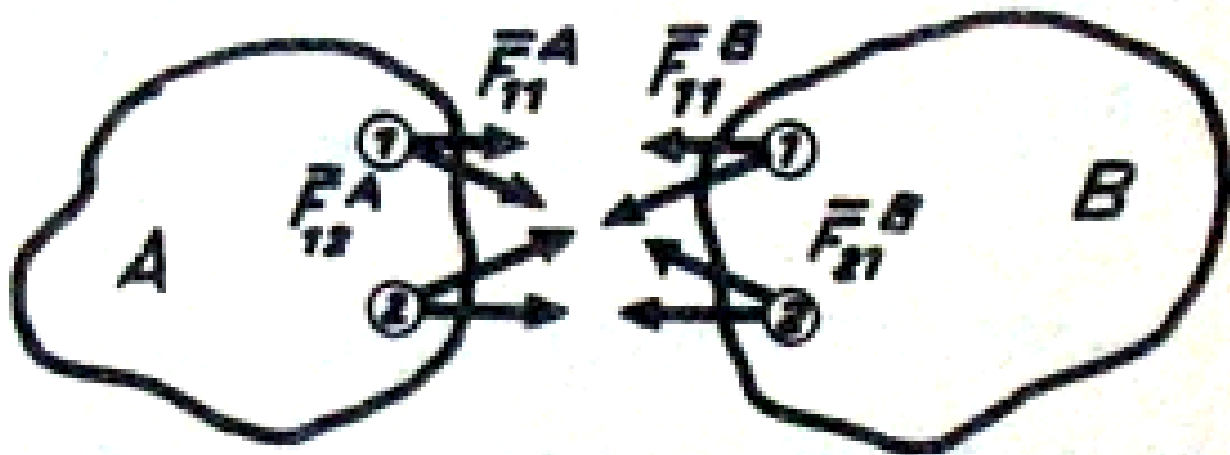
tehát :

**minden test tömegpontnak tekinthető, ha haladó
mozgást végez, vagy ha megelégszünk a tkp
mozgásának leírásával**

itt $\forall 3$ test egyformán gyorsul, de másként forog és másként
deformálódik



testrendszer :



$$\vec{F}_{ij}^A = -\vec{F}_{ij}^B \quad \forall \text{ tömegpontra}$$

a 2 testre $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

vagy ezzel egyenértékű : $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{áll.}$

zárt testrdsz. teljes imp. = állandó
ha külső erők $\rightarrow$ impulzustétel,
egész testrdsz. tkp.-nak mozgása... (mint pontrdsz.)

TEHÁT : Newton törv.-i ezekre is érvényesek :

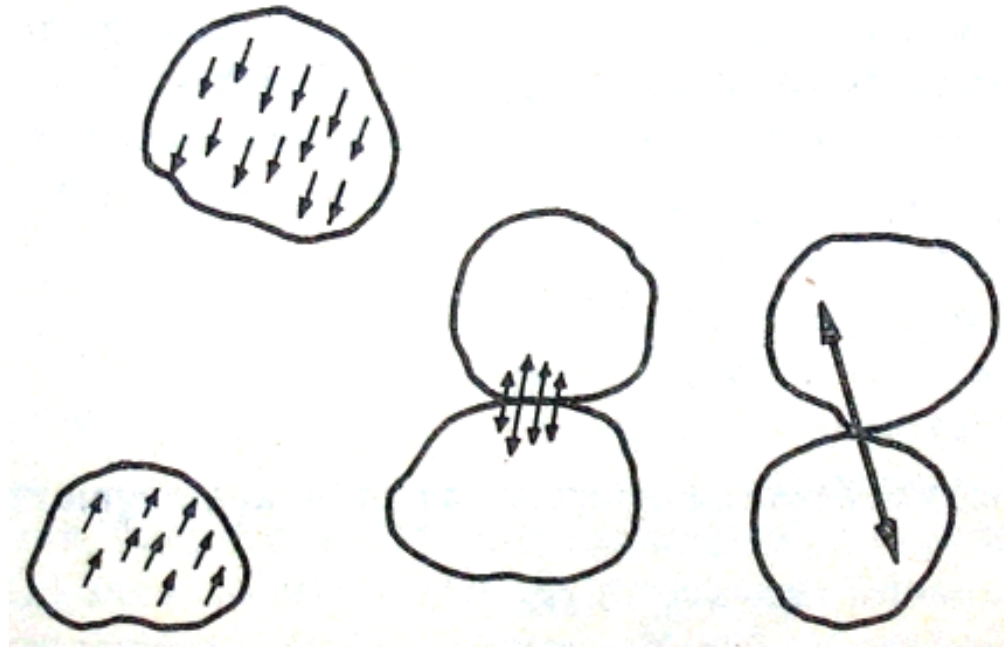
felületi és térfogati erők :

térf.-i erők (pl. grav. erő)

felületi erők (érintkezés)

a belső pontokra is hatnak erők,
de azok már belső erők, a külső
erők hatására elmozduló felületi
pontok fejtik ki

(pl. súrlódás)



az erő felület menti eloszlására nincs ált. szabály

koncentrált erő (pontban hatónak képzeljük) az
érintkezési felület igen kicsi → **támadáspont**

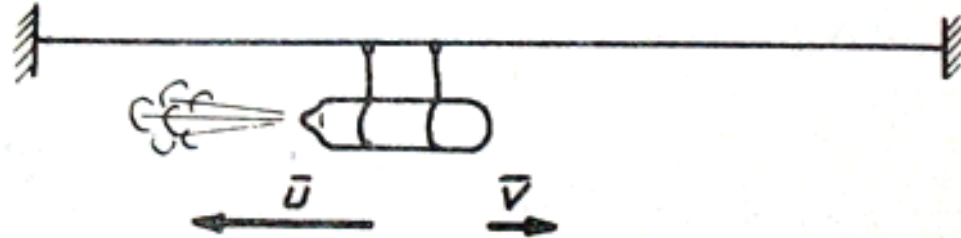
ilyenkor N.III. egyértelműen megfogalmazható

Newton törv.-i testekre :

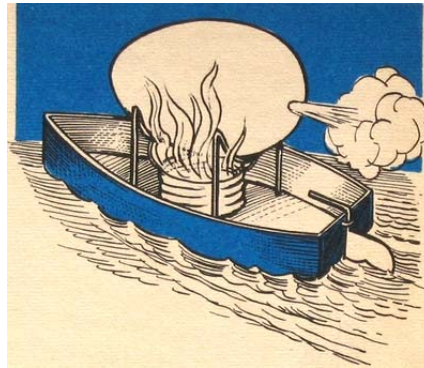
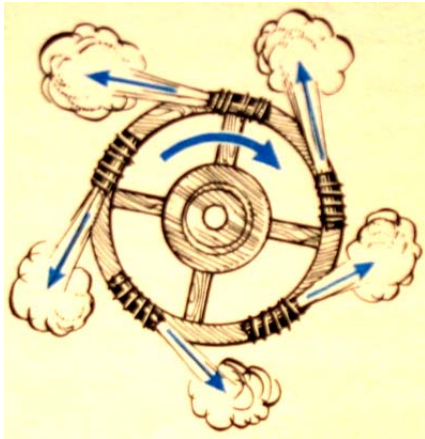
1. tehetetlenség törv. a tkp.-ra, 2. N.II. a tkp.-ra vagy
impulzustétel, 3. hatás-ellenhatás

rakétamozgás :

kísérlet : patron – rakéta, vagy kocsi



a rakéta testére a kiáramló gáz fejt ki erőt



továbbá : ágyú, puska, stb... hátralökődése

a rakéta mozgása :

anyag kiáramlik belőle $\rightarrow$ csökken a tömege az idővel

t pillanatban : $m=m(t)$ a bent lévő gázzal együtt; sebessége $v(t)$

a kiáramló gáz áramerőssége $\mu=-dm/dt$, relatív sebessége $u(t)$

F külső erő is hat (pl. gravitáció, és/vagy közegellenállás)

imp.-tétel a (rakéta+bentlévő üzemanyag)-ra :

Δt idő alatti imp.-váltl. = $F \cdot \Delta t$

a kiáramló gáz tömege $-\Delta m = \mu \cdot \Delta t$

$m+\Delta m$ a rakéta és a $t+\Delta t$ pillanatban bennlevő gáz tömege
($\Delta m = m(t+\Delta t) - m(t) < 0$)

kiáramló gáz imp.váltl. = $-\Delta m \cdot u$

a rakéta imp.váltl. = $(m+\Delta m) \cdot \Delta v$

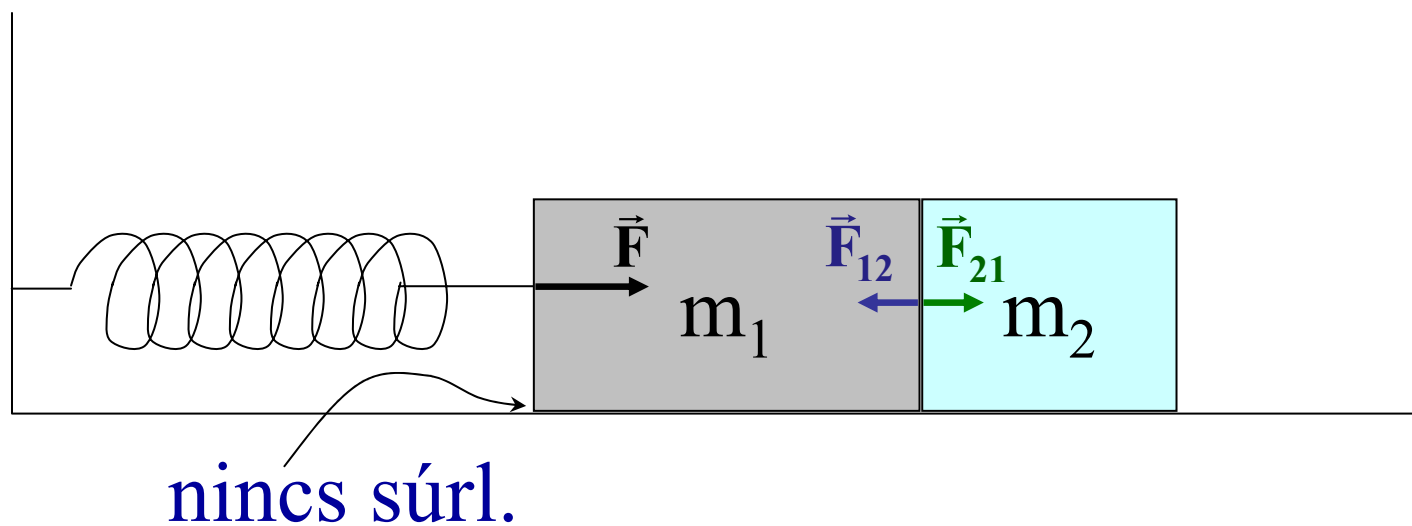
az imp.tétel szerint : $-\Delta m \cdot u + (m+\Delta m) \cdot v = F \cdot \Delta t$ / Δt és $\Delta t \rightarrow 0$

($\Delta m \rightarrow 0$ is !) $\longrightarrow \mu \cdot u + m \cdot a = F$

rakéta mozgásegyenlete

megoldás numerikusan v. egyszerű esetben analitikusan

pl. : adott $\vec{F}$, m_1 , $m_2 \longrightarrow$ mekkora $\vec{F}_{12}$?



$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_{21} = m_2 \cdot \vec{a} \\ \vec{a} = ? \\ \vec{F} = (m_1 + m_2) \cdot \vec{a} \longrightarrow \vec{a} \end{array} \right\} \longrightarrow \vec{F}_{21} = \dots$$

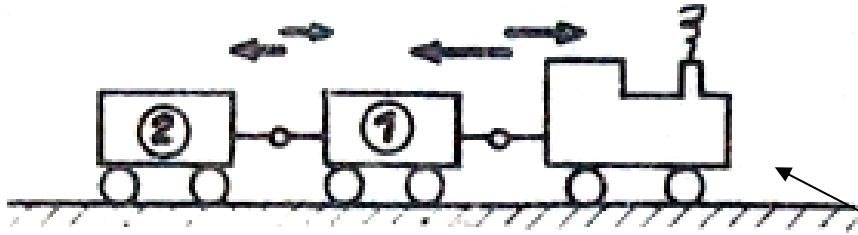
$$\downarrow$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \neq \vec{F}$$

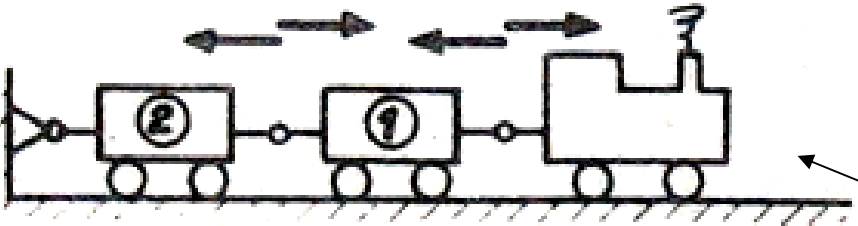
(ha áll, akkor $\vec{F}_{21} = -\vec{F}$, az 1. test „továbbítja” az F erőt a 2. testre)

bizonyos feltételek mellett egy testlánc tagjai
„továbbítják” a szomszédjuk által rá kifejtett erőt:

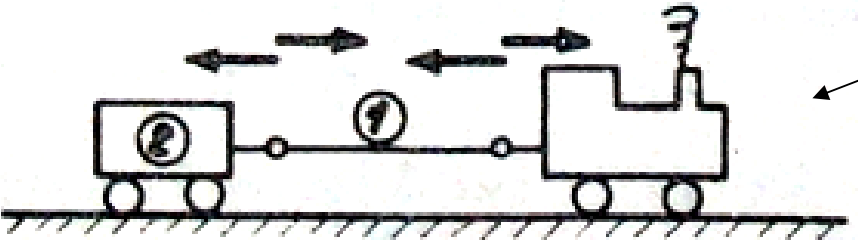
„az egyik test a másikon
keresztül a harmadikra hat”



itt nem



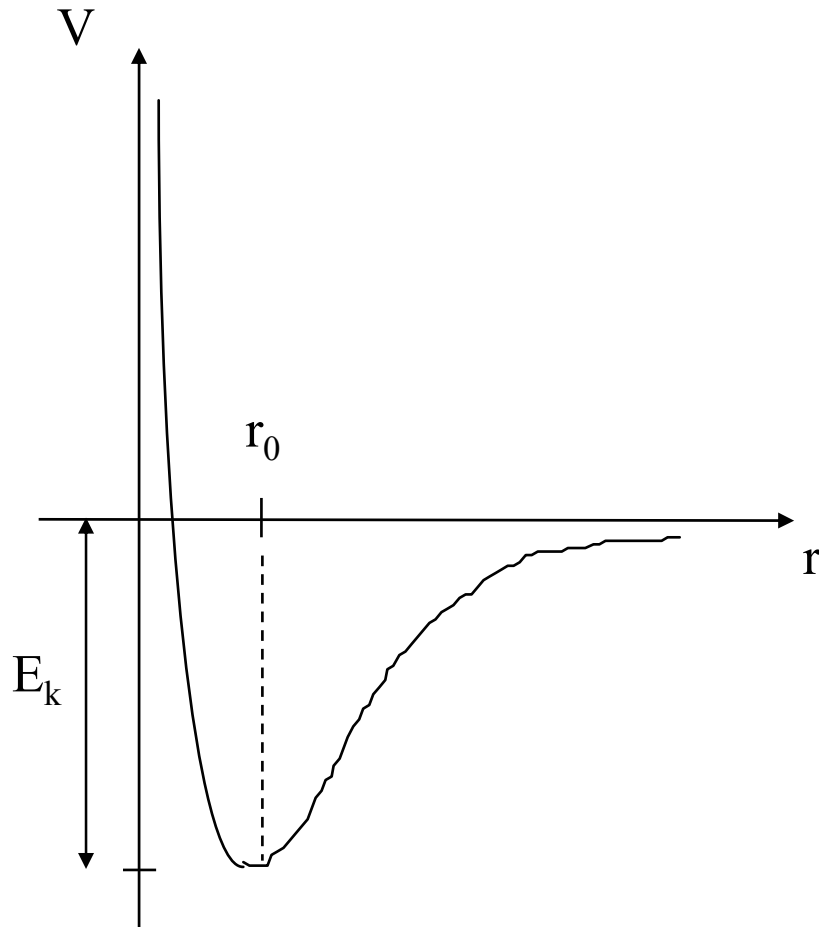
itt igen



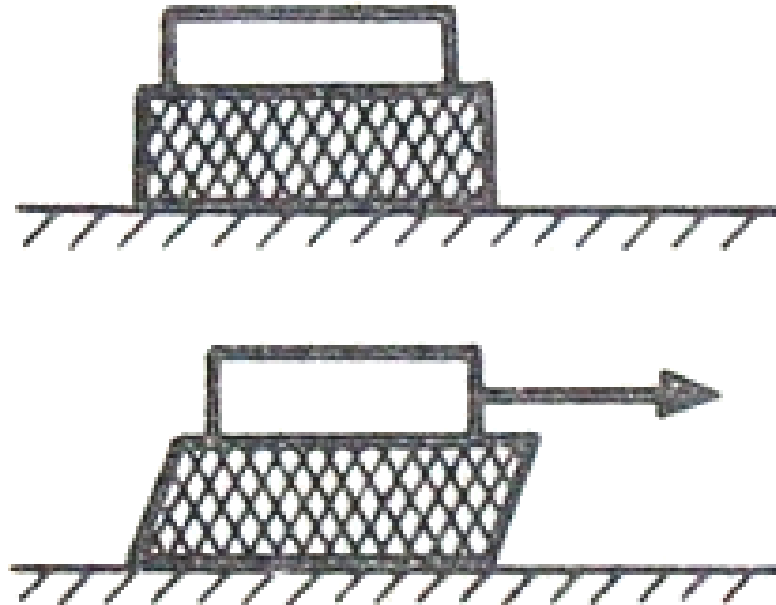
az anyag kontinuum-modellje; atomos szerkezet :

folytonos anyag: sűrűség, fajsúly $\rightarrow$ ld. korábban

atomos szerkezet :



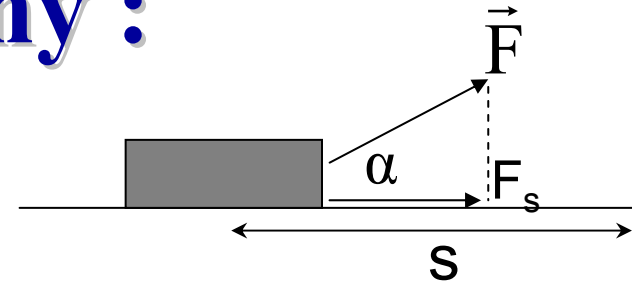
súrlódás:



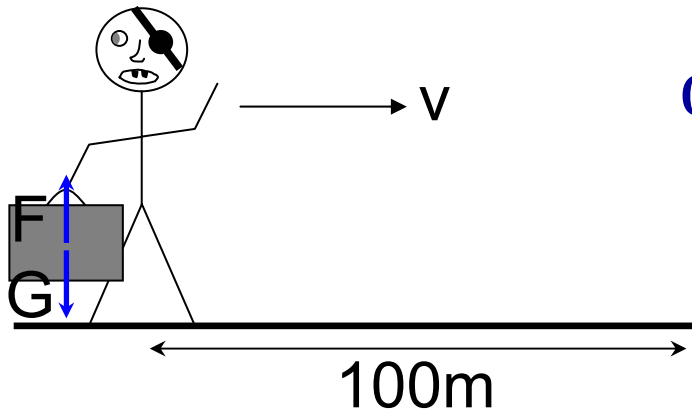
munka, energia, teljesítmény :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \rightarrow W = F_s \cdot s = F \cdot \cos \alpha \cdot s = \\ = \mathbf{F \cdot s \cdot \cos \alpha}$$

(olyan, mint $\vec{F}$ és $\vec{s}$ skaláris szorzata)



pl. : mennyi munkát végez az ember, ha egy bőröndöt elvisz 100 m messzire ?



$$\alpha = 90^\circ \rightarrow W = 0 \quad \mathbf{! ?}$$

akkor miért fárad el ?
(utánanézni !)

honnan jön ez, miért éppen $F \cdot \Delta s$ -t választották munkának ??? $\rightarrow$ ebből :

hogyan lehetne meghat. egy tömegpont seb.-vált.-t, ha ismerjük a tp.-ra ható erőt, mint a hely fgv.-t:

hogyan lehetne meghat. egy tömegpont seb.-vált.-t, ha ismerjük a tp.-ra ható erőt, mint a hely fgv.-t:

Δv -t ki tudnánk számolni, ha ism. $F(t)$ fgv.-t :

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F} \quad \longrightarrow \quad \Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t \quad \longrightarrow \quad \Delta \vec{v} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta t}{m}$$

(ez itt idő szerinti integrálás lenne : $\vec{p} = \int \vec{F} dt$)

de ált.-ban nem $F(t)$ -t, hanem $F(\text{hely})$ -t ismerjük (pl. rúgóerő, tömegvonzás,...)

pl. : mennyivel vált. egy tp. seb.-e, ha Δs egyenes úton állandó nagyságú, az úttal párhuzamos F erő hat rá :

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \frac{F}{m} \cdot \Delta t$$

$$\Delta s = \bar{v} \cdot \Delta t = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t \quad \longrightarrow \quad \Delta t = \frac{2\Delta s}{v_1 + v_2}$$

ha $F = \text{áll.} \rightarrow a = \text{áll.} \rightarrow \bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$

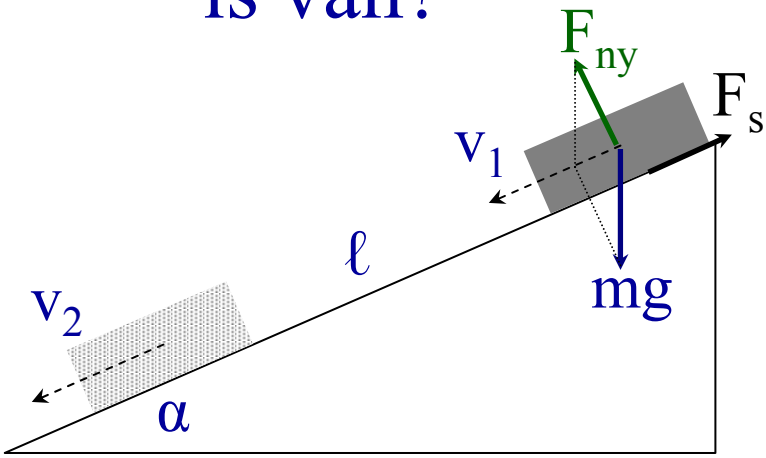
$$\longrightarrow \Delta v = v_2 - v_1 = \frac{F}{m} \cdot \Delta t = \frac{2}{m \cdot (v_1 + v_2)} F \cdot \Delta s$$

tehát Δv függ v_1 , m – től is

$$\frac{1}{2} m (v_2 + v_1) (v_2 - v_1) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = F \cdot \Delta s$$

az $\frac{1}{2} m v^2$ mennyiség az, aminek vált.-t egyért. megszabja F és s

pl. : milyen sebességgel ér le egy m tömegű test egy α hajlásszögű, ℓ hosszúságú lejtő aljára, ha súrlódás is van?



$$F_{\text{eredő}} = m g \sin \alpha - \mu m g \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = m g \ell (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$v_2 = \dots$$

elnevezés : $E_k \equiv E_{\text{kin}} \equiv E_{\text{mozg}} := \frac{1}{2}mv^2 = \text{mozg.energia}$

$W = F \cdot s$ állandó erő munkája, ha F
és s iránya megegyezik

$$\Delta E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F \cdot \Delta s = W$$

= munkatétel

ha $F \perp$ elmozd. $\longrightarrow$ egyenl. körmozgás $\longrightarrow v$ nem
változik $\longrightarrow E_{\text{mozg}}$ sem vált.



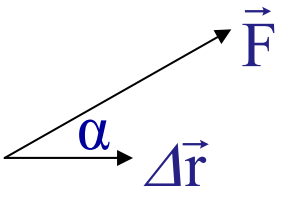
legyen az elmozd.-ra $\perp$ F munkája nulla !

általánosan : $F \cdot s \cdot \cos\alpha = F_s \cdot s = F \cdot s_F = \vec{F} \cdot \vec{s}$

teljesül-e a munkatétel az ált. esetre :

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(\underbrace{\vec{v}_2 + \vec{v}_1}_{\vec{\bar{v}}} \underbrace{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}_{\Delta \vec{r}})m = \underbrace{\vec{F}}_{\Delta \vec{r}} \cdot \underbrace{\Delta \vec{r}}_{\vec{F}}$$

igen !



$$(\vec{v}_2 + \vec{v}_1)(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 - \cancel{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1} + \cancel{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2} - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = v_2^2 - v_1^2$$

munkatétel még egyszer :
a tp.-ra ható *eredő* erő által végzett munka a tp. kin. energiájának megváltozásával egyenlő

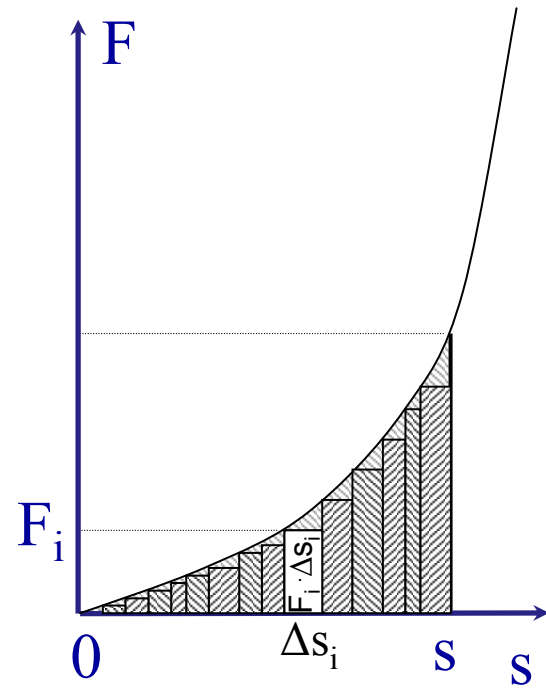
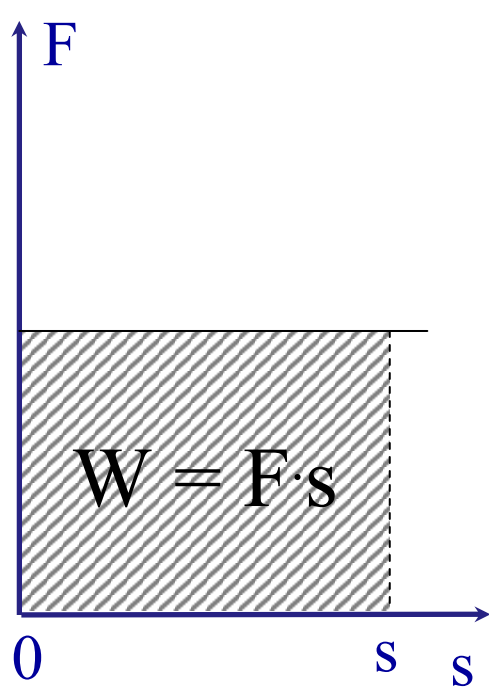
$W > 0$ és $W < 0$ is lehet !!!

ha több erő hat a tp.-ra :

$$W = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \Delta \vec{r} = \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \Delta \vec{r} = W_1 + W_2$$

pl. : miért könnyebb húzni egy kocsit a homokban, mint tolni ?

ha $F \neq \text{állandó}$, vagy a mozgás pályája nem egyenes :



→
$$W \approx \sum_{i=1}^n F_i(s_i) \cdot \Delta s_i$$

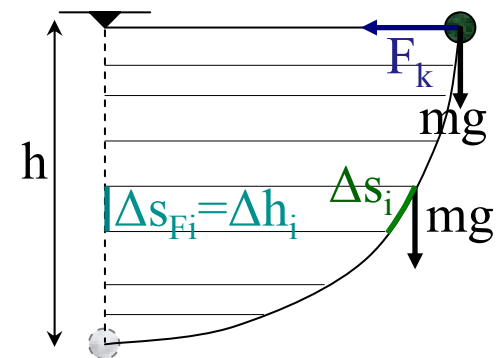
$$W = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} d\vec{r}$$

pl. : mennyi a vsz. helyzetből 0 kezdőseb.-el induló fonálinga sebessége a pálya legmélyebb pt.-ján ?

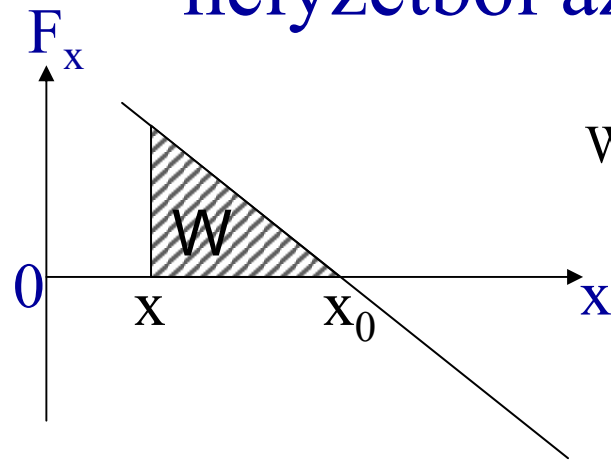
$W_{\text{kötelerő}} = 0$, mert $\perp$ a pályára

$W_{\text{súlyerő}} = \sum mg \cdot \Delta s_{Fi} = mg \sum \Delta h_i = \mathbf{mgh}$

$$\Delta E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot 0^2 = mgh + 0$$



pl. : mennyi munkát végez az egyik végén rögz. rúgó, míg a másik végéhez rögzített testet az x helyzetből az x_0 egyensúlyi helyzetbe viszi ?



$$W = \frac{F(x) \cdot (x - x_0)}{2} = \frac{k \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_0)}{2} = \frac{1}{2} k \cdot (x - x_0)^2$$

$W > 0$, akár $x < x_0$, akár $x > x_0$!

pl. : mekkora munkavégzés szükséges ahhoz, hogy egy L hosszúságú szöget teljes hosszában beüssünk fába, ha a benyomáshoz szükséges erő $F = k \cdot x$ alakban függ a szög fában levő x hosszától ?

$$\Delta W = F \cdot \Delta x = k \cdot x \cdot \Delta x \longrightarrow W \approx \sum \Delta W$$

$$W = \int dW = \int_0^L dW = \int_0^L k \cdot x \cdot dx = k \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^L = k \cdot \left(\frac{L^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = k \cdot \frac{L^2}{2}$$

munkatétel tömegpontrendszerre :

a tp.-rdsz. $\forall$ tagjára érv.-nek vesszük a munkatételt
a tp.-rdsz. kin. E-ja :

$$E_{\text{mozg}} = \sum E_{\text{mozg},i} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

a tp.-rdsz.-en végzett összes munka : $W_{\text{össz}} = \sum \vec{F}_i \Delta \vec{r}_i$

az i-edik tp.-ra ható eredő F
(külső + belső)



$$W_{\text{össz}} = E_{\text{mozg,végső}} - E_{\text{mozg,kezd}}$$

(megkapható az egyes tp.-kra vonatk. munkatételek
összeadásával)

de a merev testeknél „baj” van :

a belső erőket nem ismerjük

merev testeket ld. később ...

teljesítmény, hatások :

$$P \approx \frac{\Delta W}{\Delta t} \longrightarrow P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} \equiv \frac{dW}{dt} \equiv \dot{W} \quad [J/s = W]$$

W, kW, MW, mW, ...
(LE)



Ws = J, Wh, kWh
(munka)

ha F ($\vec{F}$) erő $\rightarrow$ a ($\vec{a}$) gyorsulás $\rightarrow$ v ($\vec{v}$) ill. Δv ($\Delta \vec{v}$) $\rightarrow$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \longrightarrow P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

= pillanatnyi teljesítmény

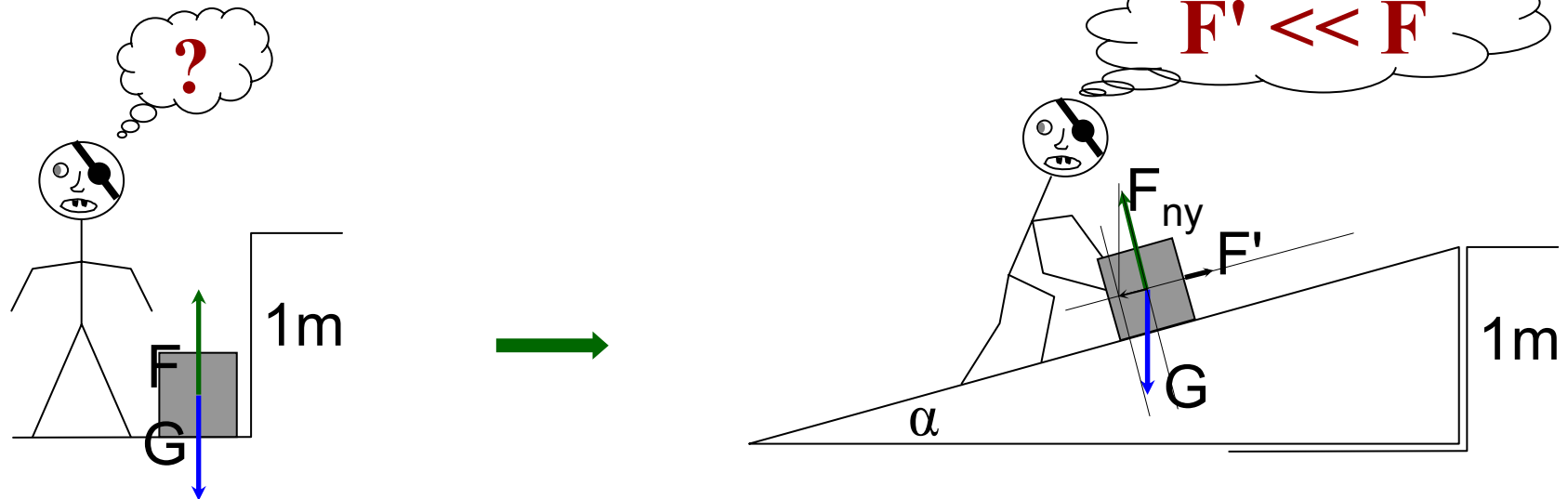
$$\eta = \frac{W_{\text{hasznos}}}{W_{\text{befektetett}}} < 1 !!!$$

egyszerű gépek : $\approx$ erőátviteli eszközök

kisebber erővel (erőlködéssel) tudjuk ugyanazt a munkát elvégezni

pl. : lejtő, emelő, ék, hengerkerék, csigák, stb ...

pl. : egy 100 kg tömegű nagy ládát 1 ember egyedül akar feltenni 1 m magasra :



kvázisztatikusan emeli $\rightarrow F = G$: $F' = mgsin\alpha$:

$$W = F \cdot s = mgh \qquad W = F' \cdot s' = mgsin\alpha \cdot h/sin\alpha = mgh$$

$$W = F \cdot s = mgh$$

$$W = F' \cdot s' = mgsin\alpha \cdot h/sin\alpha = mgh$$

ugyanaz, ha NINCS veszteség

mivel kvázisztatikusan emeli :

$$\Delta E_{\text{mozg}} = 0 \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} W_{\text{külső}} = W_{\text{befekt}} - W_{\text{hasznos}} \\ W_{\text{belső}} \end{array} \right\}$$

csak merev, nyújthatatlan testekre,
ha pl. rúgó is van, akkor nem igaz !!!

$$\Sigma W = W_k + W_b = W_{\text{bef}} - W_h - W_{\text{belső}} = 0$$

$$W_{\text{bef}} - W_h \geq 0$$

$$\eta = \frac{W_{\text{hasznos}}}{W_{\text{befektetett}}} \leq 1$$

belső erőket az érintkező felületek fejtenek ki egymásra:

- ezek normális komponenseinek Σ munkája = 0;
- a párhuzamos komponensek Σ munkája is 0, mert a felületekre ható erők egyforma nagyságúak + ellentétes irányúak („ellenrők”); a súrl erő munkája pedig mindig **negatív**

végeredményben :

„amit nyerünk a réven, elveszítjük a vámon”, vagyis ahányszor kisebb erővel dolgozhatunk, annyszor hosszabb úton kell a terhet mozgatni
+ ha van súrl. is, akkor még hosszabb

további egyszerű gépeket ld. később...
(merev testek után)

potenciális energia :

munkatétel tp.-rdsz.-re :

$$\downarrow \quad \Delta E_{\text{kin, teljes}} = W_{\text{külső erők}} + W_{\text{belső erők}}$$

munkatétel deformálható testekre : $\Sigma W_{\text{belső erők}} \neq 0$

(mert a test egyes tömegpt.-jai közeledhetnek-távolodhatnak egymáshoz)



$$W_{\text{külső erők}} \neq \Delta E_{\text{kin}}$$

= a munkatétel nem teljesül ?!

pl. : egyik végén rögz. rúgót húzunk :

kvázisztatikusan + a húzóerő egyre nő

kvázisztatikusan $\longrightarrow \Delta E_{\text{kin,rúgó}} \approx 0$

de van munkavégzés !

(akkor is igaz, ha $m_{\text{rúgó}} \ll m_{\text{rajta levő test}}$, ekkor a rúgó 2 végére ható erők közelítőleg egyforma nagyságúak és ellentétes irányúak $\rightarrow$ a rúgó mozgása majdnem egyensúlyi állapotokon keresztül történik
ilyenkor érvényes az $F_{\text{rúgó}} = -k \cdot \Delta x$ erőtv. !!!)

nyújtsuk ilyen feltételek mellett a rúgót :

x_0 – ról x hosszúságra : $\longrightarrow F_x(x) = -k \cdot (x - x_0)$

$$W^*(x_0 \rightarrow x) = \int_{x_0}^x [-F_x(x)] dx = k \cdot \int_{x_0}^x (x - x_0) dx = \frac{k}{2} (x - x_0)^2$$

mi húzzuk a rúgót, ez az általunk a rúgóra kifejtett erő
összenyomásra hasonlóan !

$$-F_x(x) = k \cdot (x - x_0)$$

a kinyújtott rúgó ugyanennyi munkát tud végezni a ráakasztott **testen**, míg x_0 -ba visszaviszi :

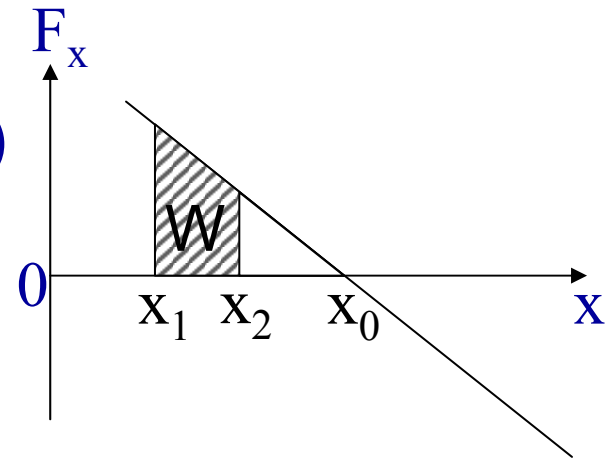
$$W(x \rightarrow x_0) = \int_x^{x_0} F_x(x) dx = \frac{k}{2}(x - x_0)^2 = W^*(x_0 \rightarrow x)$$



a rúgó által a tömegponton (testen) végzett munka, miközben egy tetsz. x_1 helyről x_2 -be viszi :

$$W(x_1 \rightarrow x_2) = W(x_1 \rightarrow x_0) - W(x_2 \rightarrow x_0)$$

$$U(x) := W(x \rightarrow x_0) = W^*(x_0 \rightarrow x)$$



az a fgv., ami megadja, h. mennyi munkát végezne a rúgó a testen, míg kvázisztatikusan x -ből x_0 -ba vinné

lineáris rúgóra :

$$U(x) = W(x \rightarrow x_0) = W^*(x_0 \rightarrow x) = \frac{1}{2}k \cdot (x - x_0)^2$$



tetsz. $x_1 \rightarrow x_2$ elmozd.-hoz szüks. munka :

$$W(x_1 \rightarrow x_2) = U(x_1) - U(x_2)$$

nem lineáris $F_x(x)$ esetére is érv. !

munkatétel $\longrightarrow \Delta E_{\text{kin}} = W(x_1 \rightarrow x_2) = U(x_1) - U(x_2)$

ha nincs súrl. !!!

$$E_{k,2} - E_{k,1} = U_1 - U_2$$

$$E_{k,1} + U_1 = E_{k,2} + U_2$$

potenciális energia = munkavégző képessége van
(mert az alakja eltér az egyensúlyi alaktól)

összes energia = **mechanikai energia** = $E_{\text{mozg}} + E_{\text{pot}}$

energiamegmaradás törv. : csak biz. feltételekkel !

$$\underbrace{E_{\text{mozg}} + E_{\text{pot}}}_{\text{kezdeti}} = \underbrace{E_{\text{mozg}} + E_{\text{pot}}}_{\text{végső}}$$

időben állandó

tehát : munkatétel $\longrightarrow$ energiamegmaradás

pl. : rúgón rezgő testre másképpen :

$$x - x_0 = A \cdot \sin(\omega t) \longrightarrow v_x = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \longrightarrow \begin{cases} E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{A^2}{2} m \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t) \\ E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = \frac{A^2}{2} \cdot k \cdot \sin^2(\omega t) \end{cases}$$

$E_{\text{tot}} = E_k + E_{\text{pot}} = \frac{A^2}{2} \cdot k \cdot \underbrace{[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)]}_{=1}$ $\longleftarrow$ és $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\longrightarrow m \cdot \omega^2 = k$

$$E_{\text{tot}} = E_k + E_{\text{pot}} = \frac{A^2}{2} \cdot k \cdot \underbrace{[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)]}_{=1} \longrightarrow \underbrace{E_{\text{tot}} = E_k + E_{\text{pot}} = \frac{A^2}{2} \cdot k}_{= \text{energiamegmaradás!}} = \text{áll.}$$

pl. : két tömegpont (test) összekapcsolva egy rúgóval:
belátható, hogy

$$(E_{k1} + E_{k2} + E_{\text{pot}})_{\text{kezd}} = (E_{k1} + E_{k2} + E_{\text{pot}})_{\text{vég}}$$

a rúgó csak akkor végez munkát, ha a 2 tömegpont egymáshoz képest elmozdul, mert $F_{\text{rúgó}}$ mindig párhuzamos a 2 testet összekötő egyenessel $\rightarrow$ a rúgóerő **centrális erő**

pl. : a **gravitációs kölcsönhatás pot. energiája** :

F_{grav} is centrális erő $\rightarrow$ hasonlít $F_{\text{rúgó}}$ - hoz

F_{grav} is centrális erő $\rightarrow$ hasonlít $F_{\text{rúgó}}$ - hoz



E_{pot} a gravitációra is hasonlóan felírható :


$$U(r) = W(r \rightarrow r_0) = \int_r^{r_0} \vec{F}_{\text{grav}} d\vec{r}$$

az a munka, amit a grav. erő végezne a **két** tömegponton (testen), míg azok az adott r relatív táv.-ból a null-helyzetnek választott r_0 relatív táv.-ra mozdulnak



hol legyen a null-helyzet :

rúgónál az egyensúlyi hosszánál volt :

tetsz. $x_1 \rightarrow x_2$ elmozd.-hoz szüks. munka :

$$W(x_1 \rightarrow x_2) = U(x_1) - U(x_2)$$

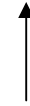
ha máshol választottuk volna a null-helyzetet (x_0') :

$$U'(x) = W(x \rightarrow x_0') = W(x \rightarrow x_0) + W(x_0 \rightarrow x_0') = U(x) + \text{áll.}$$

$$U'(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0') = W(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0) + W(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_0') = U(\mathbf{x}) + \text{áll.}$$

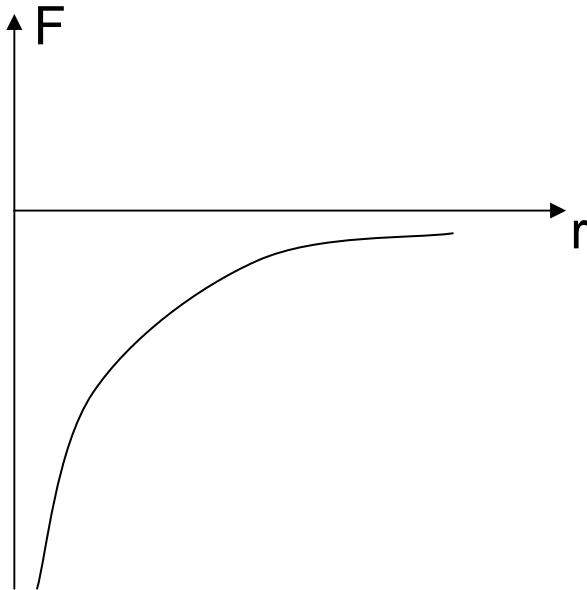


a pot. energia csak egy additív konstans erejéig egyértelmű !



tetszőlegesen választható

Föld – másik test grav. kölcsönhatása esetén :
nullhelyzet célszerűen lehet - a végtelen távoli pt., v.
- a földfelszín



← grav. kölcsönhatásnál nincs o.
véges táv., ahol $F = 0$ lenne
(rúgónál volt)

egyelőre függőben hagyva a null-
helyzet választást 

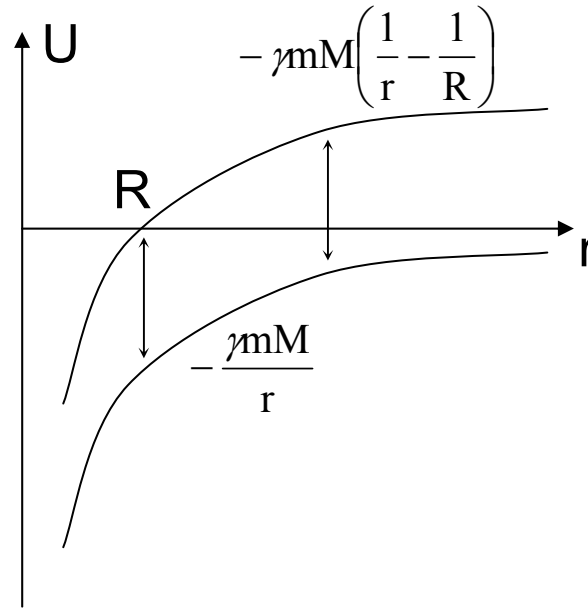
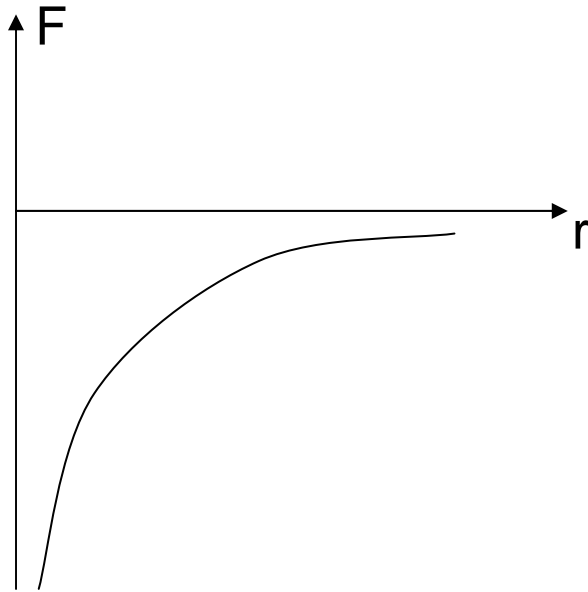
mennyi munkát végez a nehézségi erő, míg a tömegpontok r táv.-ból r_0 -ba mozdulnak :

mivel vonzóerő $\rightarrow$ ha $r > r_0 \rightarrow$ pozitív munka
 ha $r < r_0 \rightarrow$ negatív W

$W(x_1 \rightarrow x_2) = U(x_1) - U(x_2)$; munka = erő $\times$ elmozd.;

$$F_{\text{grav}} = -\gamma m M / r^2$$

$$U(r) = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum F(\rho_i) \Delta r_i = \int_r^{r_0} F dr = - \int_r^{r_0} \gamma \frac{mM}{r^2} dr = -\gamma m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$



$U(r) = -\gamma m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \longrightarrow$ tehát ha a nullhelyzetet r_0 -ban választjuk :

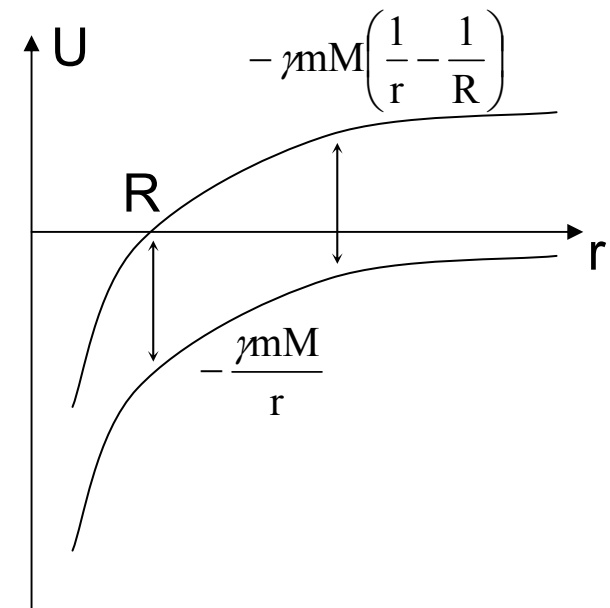
$$U(r) = -\gamma m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = -\gamma m M \frac{1}{r} + \gamma m M \frac{1}{r_0} = -\gamma m M \frac{1}{r} + \text{const.}$$

Föld – másik test grav. kölcsönhatása esetén :
a nullhelyzet célszerűen a földfelszín (a földsugár)

$$U = -\gamma m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

(itt r -t a Föld középpnt.-jától mérjük)

mivel $\frac{1}{r} = \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1+h/R}$



$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1+\frac{h}{R}} \quad \text{és } h \ll R \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{1}{r}\right) \approx \frac{1}{R} \cdot \left(1 - \frac{h}{R}\right) = \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2}$$

$$U = -\gamma m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) = \underbrace{\frac{\gamma M}{R^2}}_g m h = mgh \quad \longrightarrow \quad \mathbf{U = mgh}$$

de ezt úgy is meg lehet kapni, ha a nehézségi erő az m tömegű testen mgh munkát végez, míg a test h magasságból 0 magasságba süllyed (vagy mi végzünk a testen mgh munkát, míg 0 -ról h magasságra emeljük)

a Földtől nagyobb táv.-ra (ha $g \neq \text{áll.}$) a nulhelyzetet inkább a végtelenben választják :

$$U = -\gamma \frac{mM}{r}$$

grav. pot. energia = **helyzeti energia**

ha a két test közül egyik a Föld ($M \gg m$), akkor ez állónak tekinthető :

„a m testnek van helyzeti energiája”

de nem szabad elfelejteni :

a pot. E a KÉT test közös tulajdona

pl. : adott magasságból elejtett test mekkora sebességgel csapódik a földbe ?

pl. : mennyi lesz a h magasságú lejtőről súrlódásmentesen lecsúszó test végsebessége, ha a kezdőseb.-e 0 volt?

pl. : a Föld felszínéről egy testet nagy v_0 kezdőseb.-el függ.-en fellövünk. Milyen magasra jut ?

a Föld felszínéről egy testet nagy v_0 kezdőseb.-el függ.-en fellövünk. Milyen magasra jut ?

$$U = -\gamma \frac{mM}{r} \quad \text{és } r = R \quad \longrightarrow \quad -\gamma \frac{mM}{R} + \frac{1}{2} m v_0^2 = -\gamma \frac{mM}{R+h}$$

$\downarrow$
 $h = \dots$

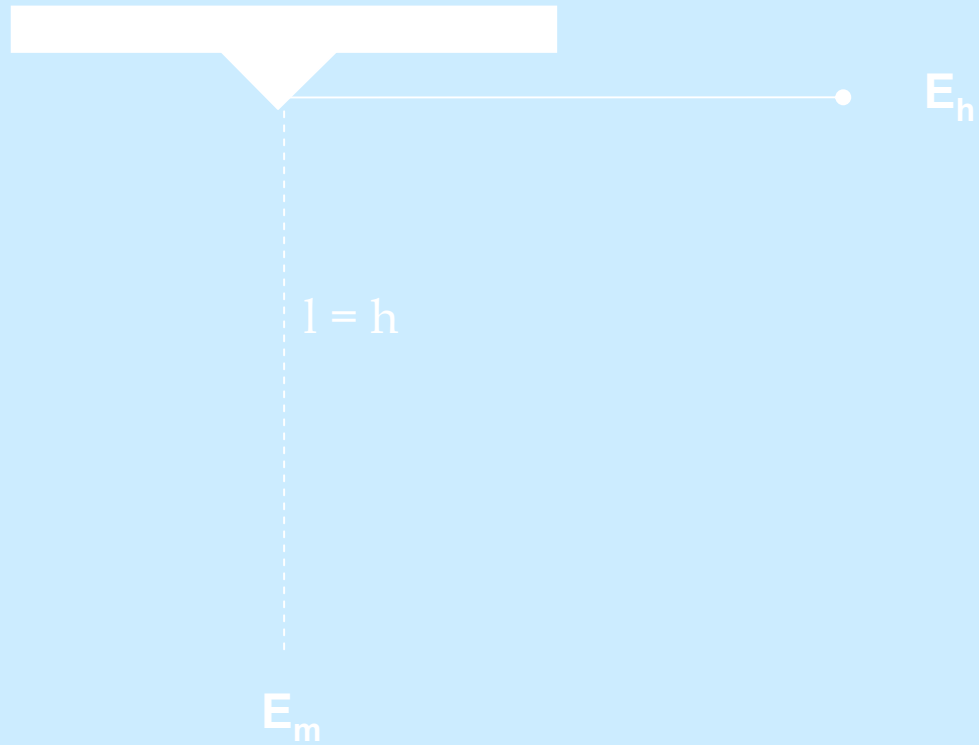
pl. : mekkora kezdőseb.-el kell fellőni, hogy ne essen vissza ?

ha az össz E a kilövés pillanatában < 0 , akkor lesz o. táv., ahol a test seb.-e 0 lesz $\longrightarrow$ hogy ne forduljon vissza :

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{2gR} \approx 11 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad \longleftarrow \quad -\gamma \frac{mM}{R} + \frac{1}{2} m v_0^2 \geq 0$$

↑
második kozmikus sebesség

pl. : fonálinga :



a pot. E általános def.-ja; konzervatív erők :

2 tp. közötti kölcs.hatáshoz csak akkor lehet E_{pot} -t def., ha a tp.-k között ható erő CSAK a 2 tp. relatív helyzetének fgv.-e, ekkor :

E_{pot} = az a W , amit az egyik tp. végez a másikon ÉS a másik az egyiken, míg adott helyzetből a nullhelyzetnek megfelelő rel. helyzetbe mozdulnak :

$$U(\vec{r}) = W(\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

relatív helyzet !

(rúgónál volt : ugyanez a W megkapható úgy is, h. ha az egyik tp.-ra ülünk és onnan nézzük a másik hozzánk visz. elmozd.t)

az $U(\vec{r}) = W(\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$ def. csak akkor egyért.,
ha a kölcs.h. erő munkáját egyért. megszabja a kezdő
és végső helyzet, fgtl. attól, h. milyen úton jut $\vec{r}$ -ből
 $\vec{r}_0$ -ba

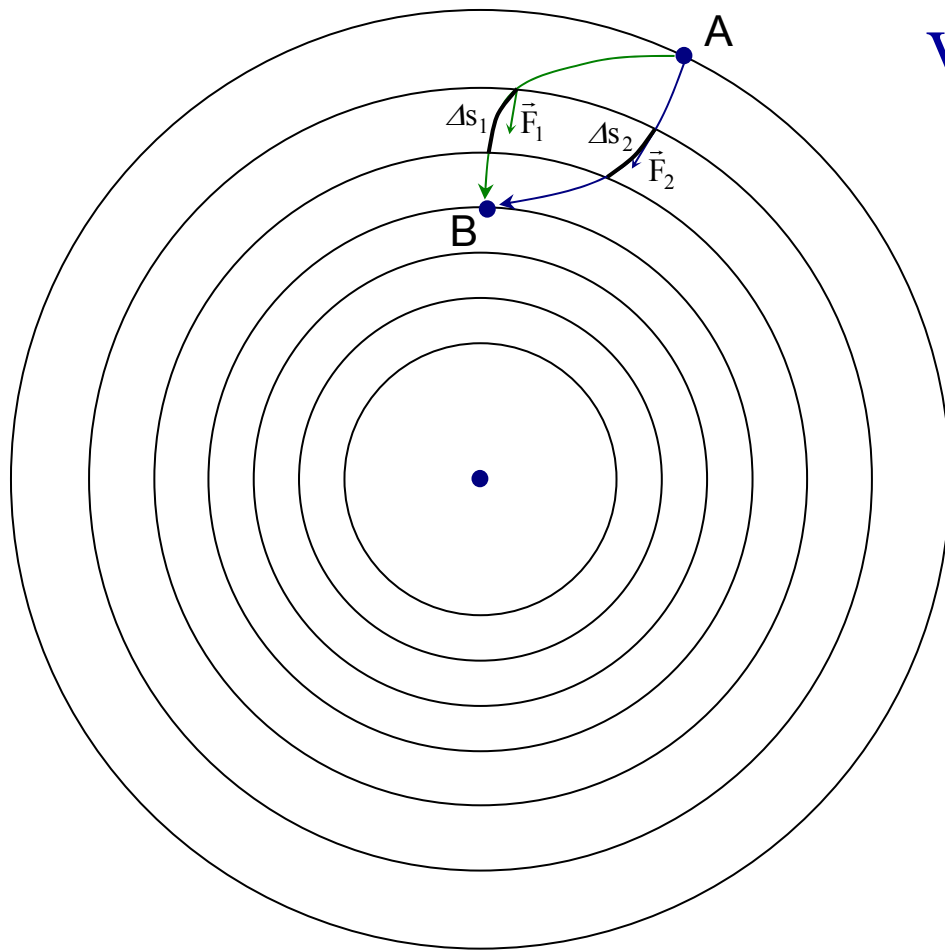
ha ez telj. $\longrightarrow \exists E_{\text{pot}} !$


$$W(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2) = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$$

a munkatételből : $U_1 - U_2 = E_{k2} - E_{k1}$


$$U_1 + E_{k1} = U_2 + E_{k2}$$

teljesül a mech. E megm. tétele !



valóban fgtl. a W az úttól ?
rúgóra; grav. kölcs.h.-ra:

$\forall 2$ esetben F csak a 2 tp.
táv.-tól függ
és F centrális

az utakat kis Δs elmoz-
dulásokra bontva:
az elmozd.-k erő-irányú
komponense megegyezik



a végzett munka a két úton megegyezik



$\forall$ centrális erőhöz rendelhető pot. energia (pl.
Coulomb-erőhöz is), de más kölcs.hatáshoz is lehet !!

(pl. torziós inga esetén, ahol forgatónyomaték végez munkát, ami csak a test kezdő- és véghelyzetétől függ)

konzervatív kölcsönhatás :

ha a végzett munka csak a kezdő- és véghelyzettől függ, azaz o. kölcs.h. amihez $\exists E_{\text{pot}}$
az ilyen erőket **konzervatív erők**-nek nev.

pl. $F_{\text{súrl.}}$ nem konz. !

tömegpontrendszerre :

ha a tagjai között (páronként) konz. kölcs.h. van :

energiatétel :

$$\sum_i E_{\text{mozg},i} + \sum_{i < j} E_{\text{pot},ij} = \text{állandó}$$

egyes tp.-k mozg.E-ja

az i,j páros kölcsönhatási pot E-ja

E_{pot} -t úgy is szokták def., mint azt a munkát, amit kell végezni a kölcsönhatási erő „ellenében”, míg a nullhelyzetből az adott helyre visszük:

$$W_{\text{én}} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_{\text{én}} d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_{\text{kölcsönhatási}} d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F}_{\text{kölcsönhatási}} d\vec{r} = U(\vec{r})$$

az erő meghatározása a pot. E-ból :

előbb $F(r) \longrightarrow U(r)$

most $U(r) \longrightarrow F(r)$



ismerni kell a tömegpontok (testek) kölcs. helyzetét,
ill. egy adott, kiszemelt tp. helyzetét : $\vec{r}$

a tp.rdsz.-re $U(\vec{r})_{\text{teljes}} =$ a tp.-k közötti pot.E-k összege;
értékét a tp.-k relatív helyzete egyért. megszabja egy

additív konstans erejéig !!! (ld. korábban)

de : $U(\vec{r})_{\text{teljes}}$ - ben $\vec{r}$ a kiválasztott tp. helyzetét jelöli ,
viszont U a rdsz. többi tagjának helyzetétől is függ !

mozdítsuk el gondolatban a tp.-t $\delta\vec{r}$ -el (= virtuális elmozdulás) $\longrightarrow U(\vec{r}) \rightarrow U(\vec{r} + \delta\vec{r})$

a pot. E csökkenése = a rdsz. többi tagja által a tp.-on végzett munkával $\longrightarrow U(\vec{r}) - U(\vec{r} + \delta\vec{r}) \approx \vec{F} \delta\vec{r} = F_{\delta\vec{r}} |\delta\vec{r}|$

pozitív, ha $U(r+\delta r) < U(r)$
és negatív fordítva

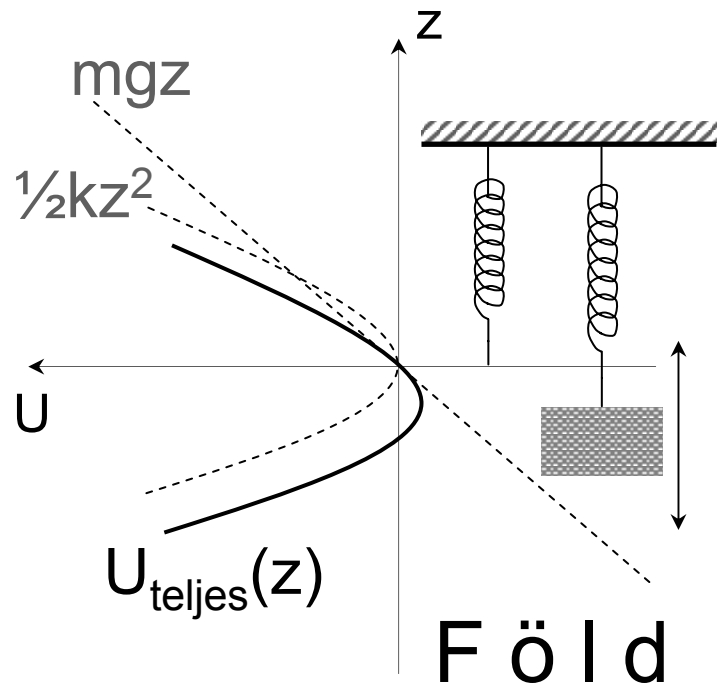
$$F_{\delta\vec{r}} = - \lim_{\delta\vec{r} \rightarrow 0} \frac{U(\vec{r} + \delta\vec{r}) - U(\vec{r})}{|\delta\vec{r}|}$$

ha végigpróbáljuk az összes lehetséges δr elmozdulásokat, megkapjuk az F -nek tetsz. irányú komponensét
az erőkomponens < 0 , ha az elmozd. U növekedésével jár, és fordítva

az az irány, amerre mozdulva a legnagyobb **pozitív** erőkomponenst kapjuk, az **erővektor iránya**

→ az erő abba az irányba mutat, amerre mozdtatva a pontot, a leggyorsabban csökken a rdsz. pot. E-ja

pl. : mekkora a testre ható erő egy adott z-helyen ?



a rúgó pot. E-ja :

$$U_1 = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2} k z^2$$

a test helyzeti E-ja : $U_2 = mgz$
(nullhelyzet az origóban)

$$U_{\text{teljes}}(z) = \frac{1}{2} k z^2 + mgz$$

a tp.-ra ható $F_{\text{eredő}}$ z-komponense:

$$F_z(z) = - \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{U(z + \delta z) - U(z)}{\delta z} = - \frac{dU}{dz} = -kz - mg$$

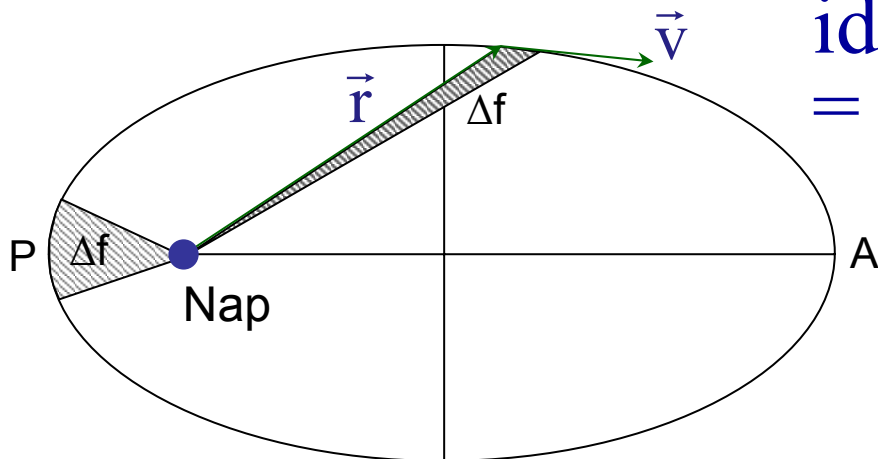
merev test egyensúlya, forgatónyomaték, impulzusmomentum (= perdület) :

vektormennyiség **momentuma** :
impulzusmomentum = $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
forgatónyomaték = $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

tömegpont perdülete :

Kepler I. : a bolygók ellipszispályán mozognak ...

Kepler II. : a Naptól a bolygóhoz húzott vezérsugár = időközök alatt = területeket sűrol :



időegység alatt sűrolt terület =
= *területsebesség* =

$$= \frac{df}{dt} = \dot{f} \approx \frac{\Delta f}{\Delta t} = \text{állandó}$$

a Föld sebessége legnagyobb P-ben
(január 3-án), legkisebb A-ban

$$\vec{f} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} \quad \text{merőleges a pályasíkra}$$

▲ területe = $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$, + irány a jobbkéz-szabály szerint

ha adott a tp.-ra (bolygóra) ható erő $\rightarrow$ mennyi $\vec{f}$ változási gyorsasága ? :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{f}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(\vec{r} + \Delta \vec{r}) \times (\vec{v} + \Delta \vec{v}) - \vec{r} \times \vec{v}}{\Delta t} \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \left[\vec{r} \times \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \times \vec{v} + \frac{\Delta \vec{r} \times \Delta \vec{v}}{\Delta t} \right] = \frac{1}{2} \cdot [\vec{r} \times \vec{a} + \cancel{\vec{v} \times \vec{v}} + 0] = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{a} = \\ &= \frac{1}{2m} \vec{r} \times \vec{F} \end{aligned}$$

vektori szorzatot deriválva :

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ (N.II.)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{f}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}} \right) = \frac{1}{2} (\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}) = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{a} \end{aligned}$$

vagyis : $\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{1}{2m} \vec{r} \times \vec{F}$

vagyis :
$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{1}{2m} \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{F}$ a Nap felé mutat, így $\vec{F} \parallel \vec{r} \longrightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0 \longrightarrow \dot{\vec{f}} = \text{áll.}$

ez éppen Kepler II. törv.

$\dot{\vec{f}}$ iránya is const. $\longrightarrow$ a pálya síkja is állandó

centrális erő = a tp.-ra ható erő hatásvonala mindig átmegy a koord.rdsz. egy adott pt.-ján (pl. a Földre ható grav. erő mindig a Nap felé mutat)



így Kepler II. másképpen : **centrális erő hatása alatt mozgó tömegpont területsebessége állandó**

egyúttal megkaptuk az **impulzusmomentum tételt**
tömegpontra :

$$\left(\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{1}{2m} \vec{r} \times \vec{F} \right) \xrightarrow{\text{green arrow}} \frac{d}{dt} \left(2m \cdot \vec{f} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$

perdület-tétel : $\longrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

ebből visszakapjuk a perdületmegmaradást :

ha $M = 0 \rightarrow L = \text{állandó}$
(pl. centrális erőnél)

perdülettel pontrendszerre :

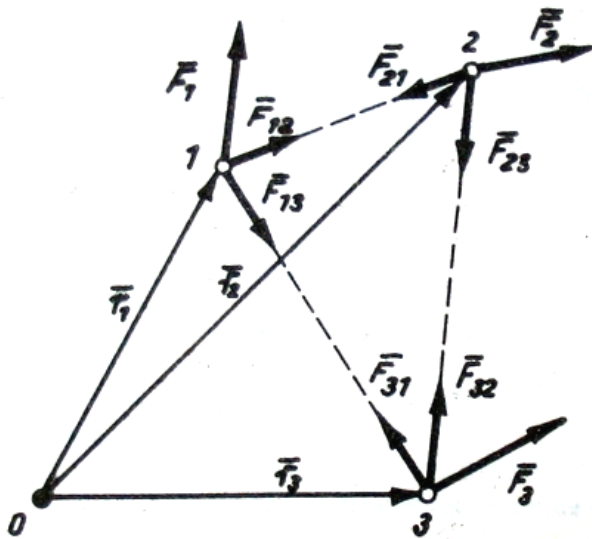
tp.rdsz. perdülete = az egyes tp.-k perdületeinek
összege :

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

az egyes tömegpontokra :



$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{M}_1 + \vec{M}_{12} + \vec{M}_{13} + \dots$$

$$\frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{M}_2 + \vec{M}_{21} + \vec{M}_{23} + \dots$$

stb...

(mint impulzustétel)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i$$

külső forgatónyomatékok
belső forgatónyomatékok

zárt tp.rdsz. : $\forall \vec{M}_i = 0$

ha még a belső erőkre $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (N.III.törv.) mellett az is teljesül, h. közös hatásvonalúak, akkor $\vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji}$ is teljesül


$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M} = 0$$


$$\vec{L} = \text{állandó}$$

vagyis zárt tp.rdsz. teljes perdülete állandó

pl. : naprendszerre igaz

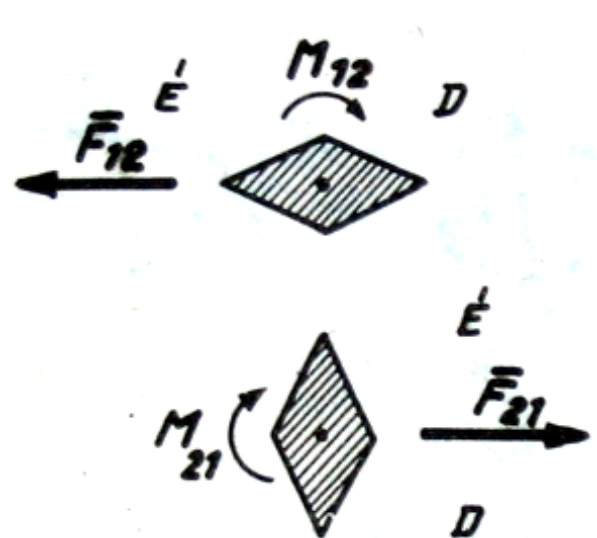
pontszerű, elektromosan töltött testekre is igaz

de :

nem zárt tp.rdsz.-re hatnak külső forgatónyomatékok :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i$$

ha a belső forgatónyomatékok nem ejtik ki egymást páronként : pl. egymásra $\perp$ mágnesek, ekkor nem centrális erők a belső erők



???

→ ld később...

pl. : fonálinga még egyszer :

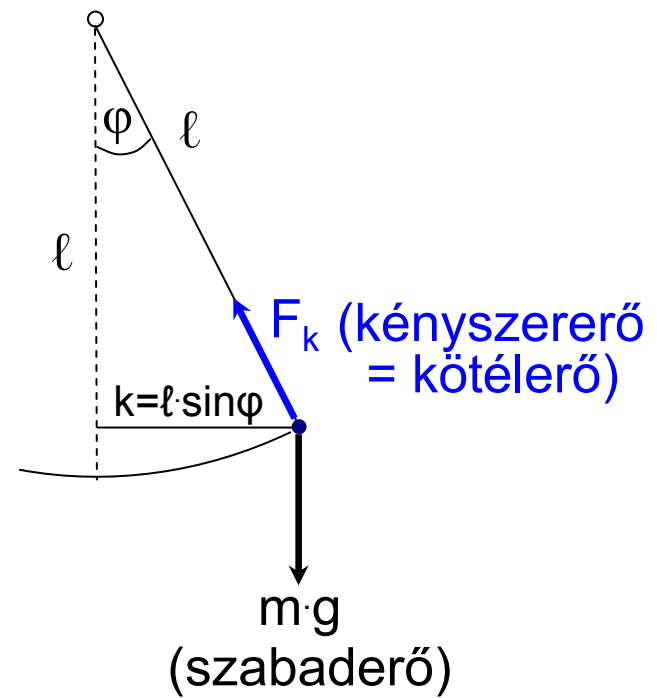
perdülettel

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad \text{és} \quad L = |\vec{L}| = m \cdot \ell \cdot v \quad ; \quad v = \ell \cdot \omega$$

$$\frac{d}{dt} m \ell v = \frac{d}{dt} m \ell \cdot \ell \omega = m \ell^2 \frac{d\omega}{dt} = m \ell^2 \ddot{\varphi} = M$$

$$M = |\vec{M}| = -m|\vec{g}| \cdot |\vec{\ell}| \cdot \sin \varphi = -mg \cdot k$$

$$m \ell^2 \ddot{\varphi} = -mg \cdot \ell \sin \varphi$$



ugyanaz a diff. egyenlet, mint amit korábban kaptunk
a N.II.-nél !
(megoldást ld. ott)

pl. : bizonyítsuk be Kepler III.-t :

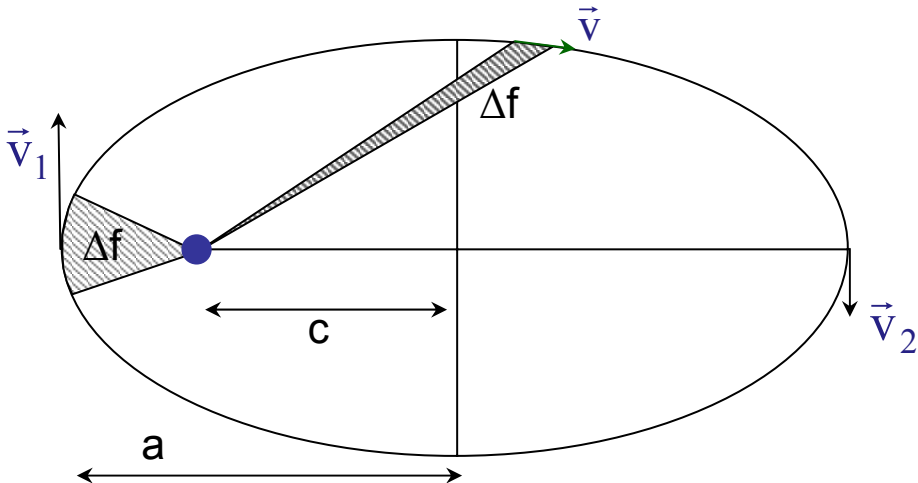
(a bolygópályák nagytengelyeinek köbei úgy aránylanak egymáshoz, mint a keringési idők négyzetei)

E_{mech} = állandó $\rightarrow$ napközeli és napközeli ugyanannyi, mint naptávolban

$$\frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) = \gamma m M \left[\frac{1}{a-c} - \frac{1}{a+c} \right] = \gamma m M \frac{2c}{a^2 - c^2}$$

+ felületsebesség állandó :

T = ellipszis területe osztva területsebességgel :
keringési idő



$$T = \frac{ab\pi}{\frac{1}{2}(a-c)v_1} \rightarrow v_1 = \frac{2ab\pi}{(a-c)T}$$

$$T = \frac{ab\pi}{\frac{1}{2}(a+c)v_2} \rightarrow v_2 = \frac{2ab\pi}{(a+c)T}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \frac{4a^2 b^2 \pi^2}{T^2} \underbrace{\left[\frac{1}{(a-c)^2} - \frac{1}{(a+c)^2} \right]}_{4ac(a^2-c^2)^{-2}} = \gamma M \frac{2c}{a^2 - c^2}$$

és ellipszisre : $b^2 = a^2 - c^2$

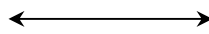


$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{1}{4\pi^2} \gamma M = \text{állandó}$$

Kepler III.

merev test egyensúlya, forgatónyomaték :

egyensúlyban van



nyugalomban van

$$\vec{v} = \text{áll.}$$

$$\vec{v} = 0$$

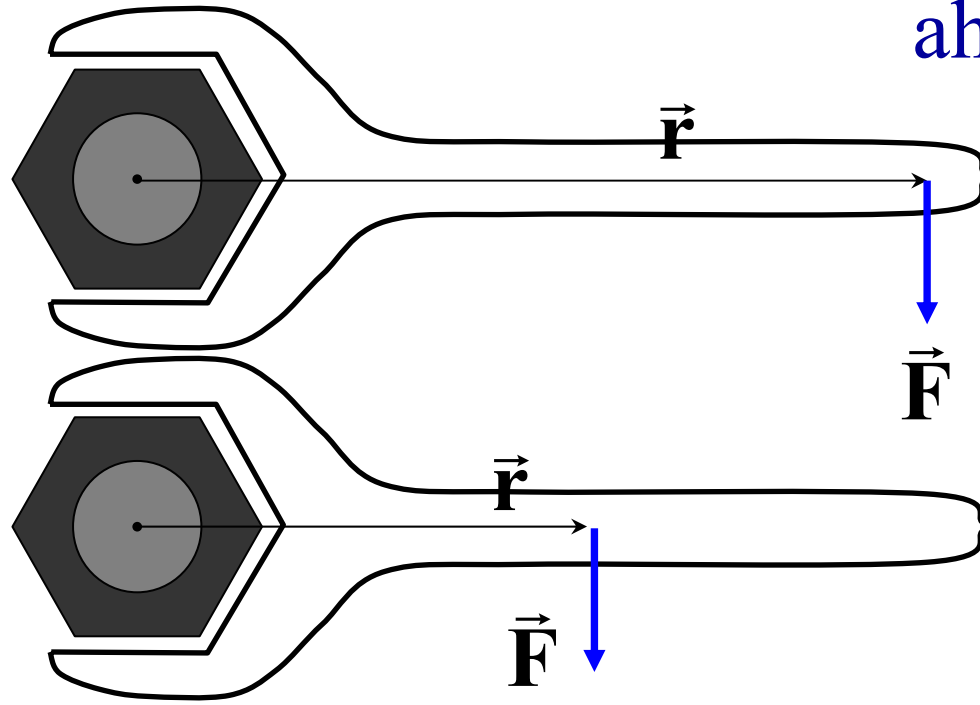
$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \rightarrow \text{de foroghat!} \rightarrow \sum_i \vec{M}_i = 0$$

ahol $M = \text{forgatónyomaték}$

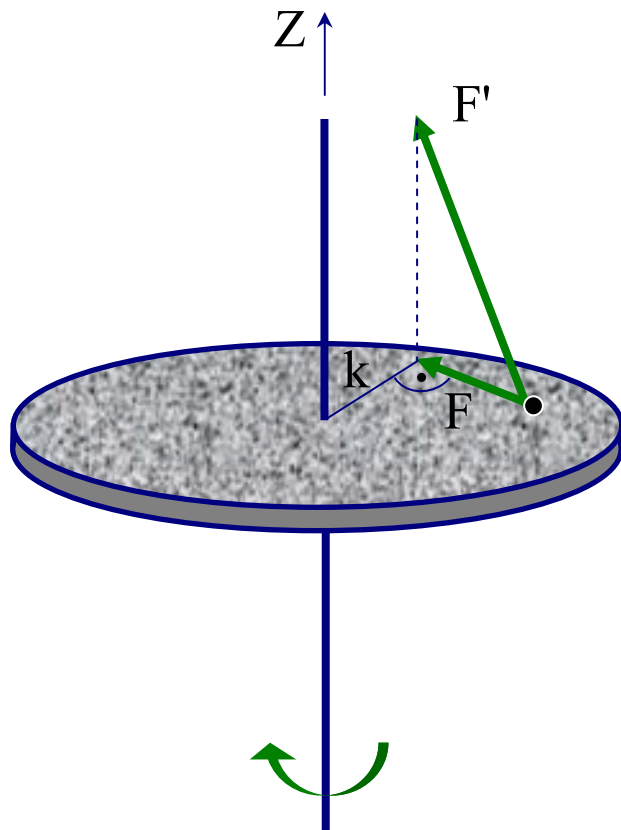
= „forgató hatás”

$\mathbf{M} = \text{erő} \times \text{erőkar} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$
tengelyre vonatk. !!

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



tengely körüli forgás :



pl: ajtó nyitása

csak akkor van forgás, ha
F hatásvonala nem megy
át a tengelyen

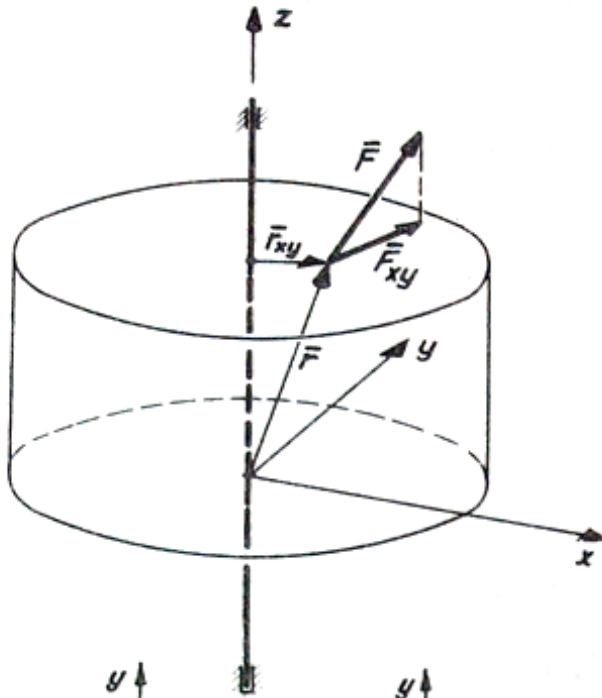
$$\mathbf{M}_Z = \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}$$

erőkar

rögzített teng. körül forgó merev test a tengelyre merőleges
síkban ható erők esetén akkor van egyensúlyban, ha a teng.-
re vonatkozó forgatónyomatékok algebrai összege nulla

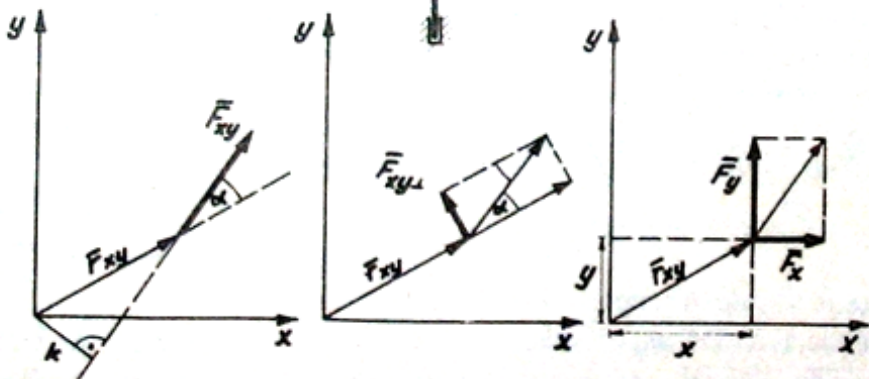
rögzített tengely, tengelyre vonatkozó forgatónyomaték :

egyetlen F erő hatására akkor és csakis akkor jön forgásba, ha F -nek van a tengelyre $\perp$ komponense; és hatásvonal nem megy át a tengelyen



az okozott β nem egyértelmű :

ugyanakkora, ugyanolyan irányú erő másként forgat, ha hatásvonala messzebb van a tengelytől

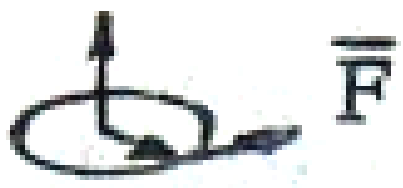


nagysága :

$$M_z = k \cdot F_{xy}$$

forogatónyomaték előjele :

$$M_z = \begin{cases} k F_{xy}, & \text{ha} \\ -k F_{xy}, & \text{ha} \end{cases}$$



$\vec{F}$

M_z pozitív



$\vec{F}$

M_z negatív

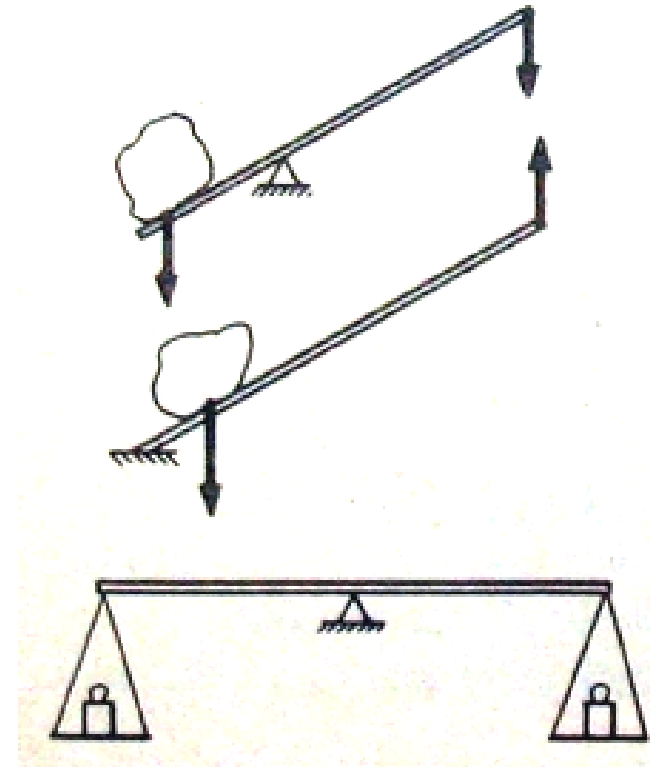
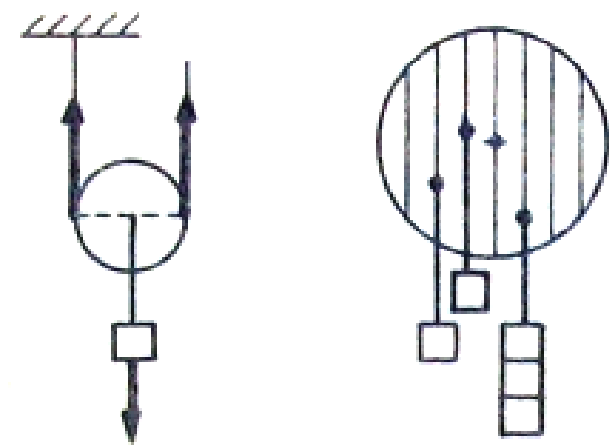
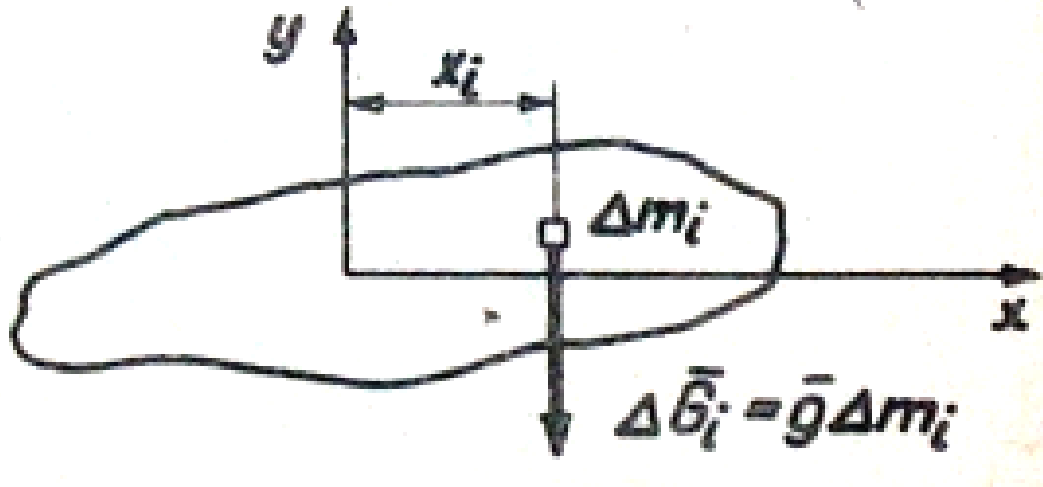
pl. : kétkarú mérleg, lipityóka,
benzinmotor, fogaskerék,
hengerkerék, ...

teng. körül forgatható testek
egyensúlyban vannak, ha :

$$\sum_i M_{iz} = 0$$

(a jobbra és balra forgató
 nyomatékok összege egyenlő)

térfogati erők forgatónyomatéka:



$$\sum_i M_{iz} = \sum_i \Delta G_i \cdot x_i = \sum_i g \cdot \Delta m_i \cdot x_i = g \cdot \sum_i \Delta m_i \cdot x_i = g \cdot m \cdot x_{\text{tkp}}$$

pl. : vsz. teng. körül forgatható test hogyan áll be egyensúlyba ?

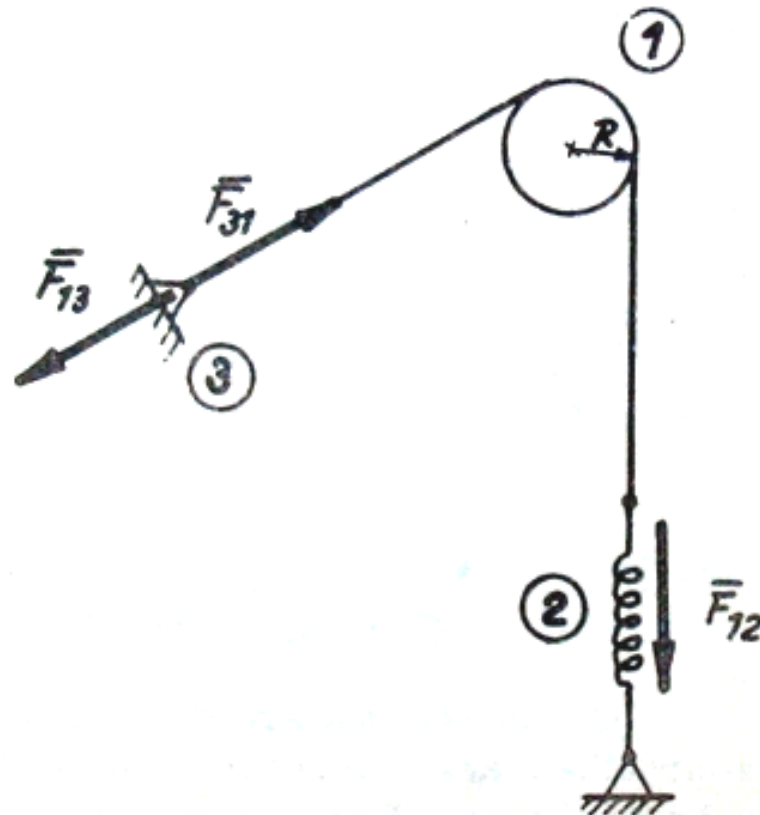
ha a tkp.-ban van felfüggeszttve, akkor a súlyerő forgatónyomatéka a tkp.-on átmenő vsz. teng.-re nézve nulla

pl. : a fonal megváltozott iránnyal, de azonos nagysággal továbbítja az egyik végére ható erőt :

$$F_{12} \cdot R = F_{13} \cdot R$$

$$F_{12} = F_{13}$$

$$F_{31} = -F_{13}$$



emelő-típusú egyszerű gépek : emelő, csiga, hengerkerék, fogaskerék- és szíj áttétel (pl. sebességváltó)

pl. : karos mérleggel **tömeget** mérünk :

$$m_1 g \ell_1 = m_2 g \ell_2 \longrightarrow m_1 \ell_1 = m_2 \ell_2$$

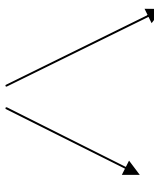
egyensúly esetén:

ha a karok egyenlők, akkor a tömegek is egyenlők
a súlyáról nem tudunk biztosat, mert az függ a földrajzi helytől !!!

**merev test egyensúlyának általános feltétele,
pontra vonatkozó forgatónyomaték :**

ha a merev test egyetlen pt.-ban van rögz.ve, akkor egyetlen koncentrált erő hatására akkor marad egyensúlyban, ha a hatásvonal átmegy a ponton

akkor az erőnek tetsz., a forgásponton átmernő teng.-
re vonatk. forgatónyomatéka nulla

erőhatás 
elmozdulás, ha F hatásvonala átmegy a
forgástengelyen (erőkar = 0)
elfordulás, ha nem megy át (van
erőkar)

ha több erő hat  egyensúly van, ha az erők
forgatónyomatékainak eredője
nulla 

ez tömören megfogalmazható a pontra vonatkozó
forgatónyomaték vagy **forgatónyomaték vektor**
segítségével :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

az $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ vektor komponensei az egyes tengelyekre vonatkozó forgatónyomatékokat adják pl. a z-tengelyel párhuzamos komponense:

$$\vec{M}_z = \vec{r}_{xy} \times \vec{F}_{xy}$$

ennek nagysága:

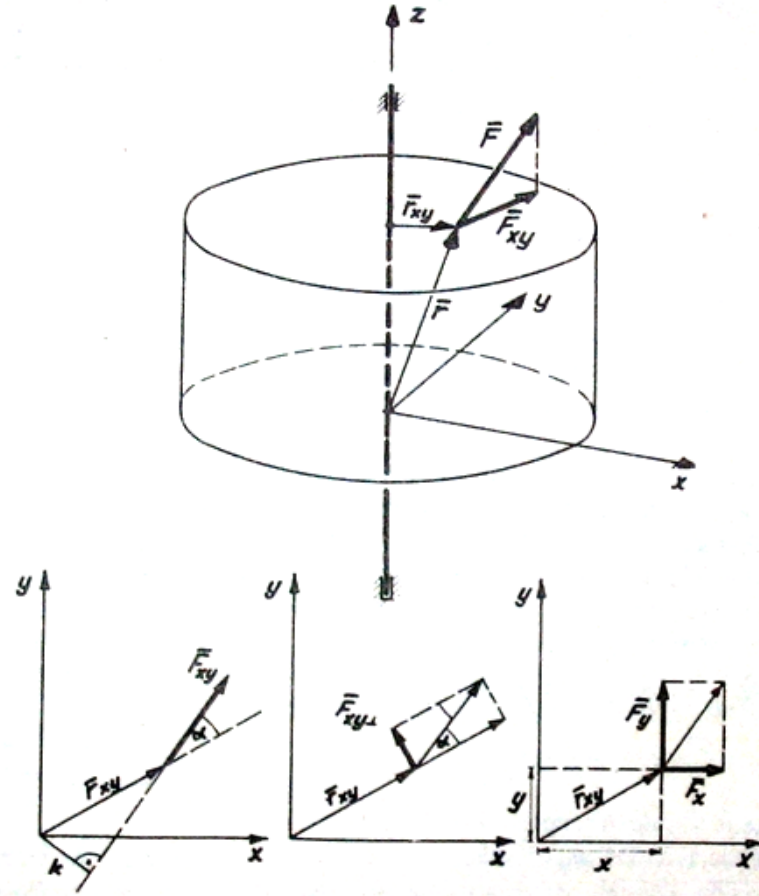
$$M_z = |\vec{M}_z| = r_{xy} \cdot F_{xy} \cdot \sin \alpha = k \cdot F_{xy} = r_{xy} \cdot F_{xy\perp}$$

$\vec{M}_z$ a z-teng. irányába mutat, ha $\vec{r}_{xy}$, $\vec{F}_{xy}$ és a z-teng. ebben a sorrendben jobbsodrású; és ellentétes irányú egyébként

skalárkomponensekkel:

$$M_z = x \cdot F_y - y \cdot F_x \longrightarrow$$

(hasonlóan a többi komponens is)



ha $\vec{M} = 0$, akkor bárm. irányú teng.-re vonatk. vetülete is nulla $\rightarrow \forall i\text{-re } M_i = 0 \text{ (} i = x, y, z \text{)}$



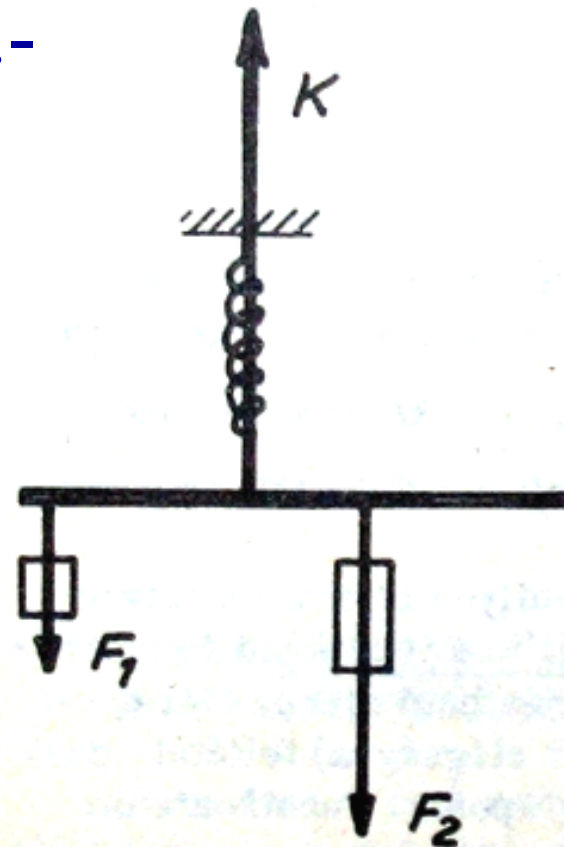
rögz. pont körül tetsz. forgatható merev test
egyensúlyának szükséges és elégséges feltétele:

a testre ható külső erőknek a forgáspt.-
ra vonatk. eredő forgatónyomatéka
nulla legyen :

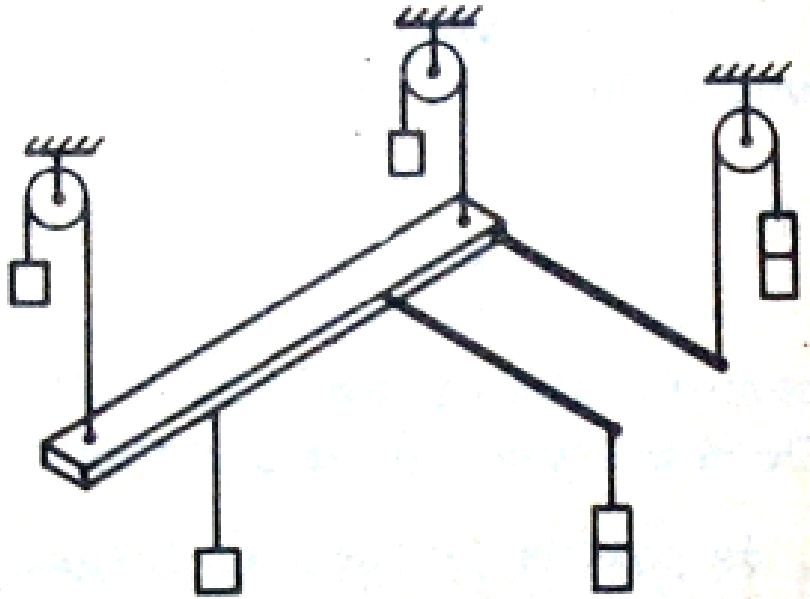
$$\sum \vec{M}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

és persze $F_{\text{eredő}} = 0$ is !

egyensúlyban van;
 $\forall F\text{-t tudunk mérni}$



egyensúlyban van; $\forall F$ -t tudunk mérni :



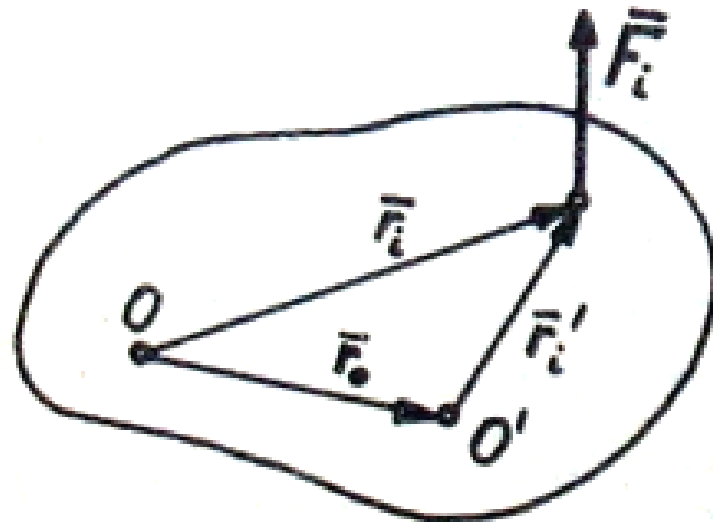
nincs kényszerekkel előírt forgáspont v. tengely, de

$$\sum \vec{M}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

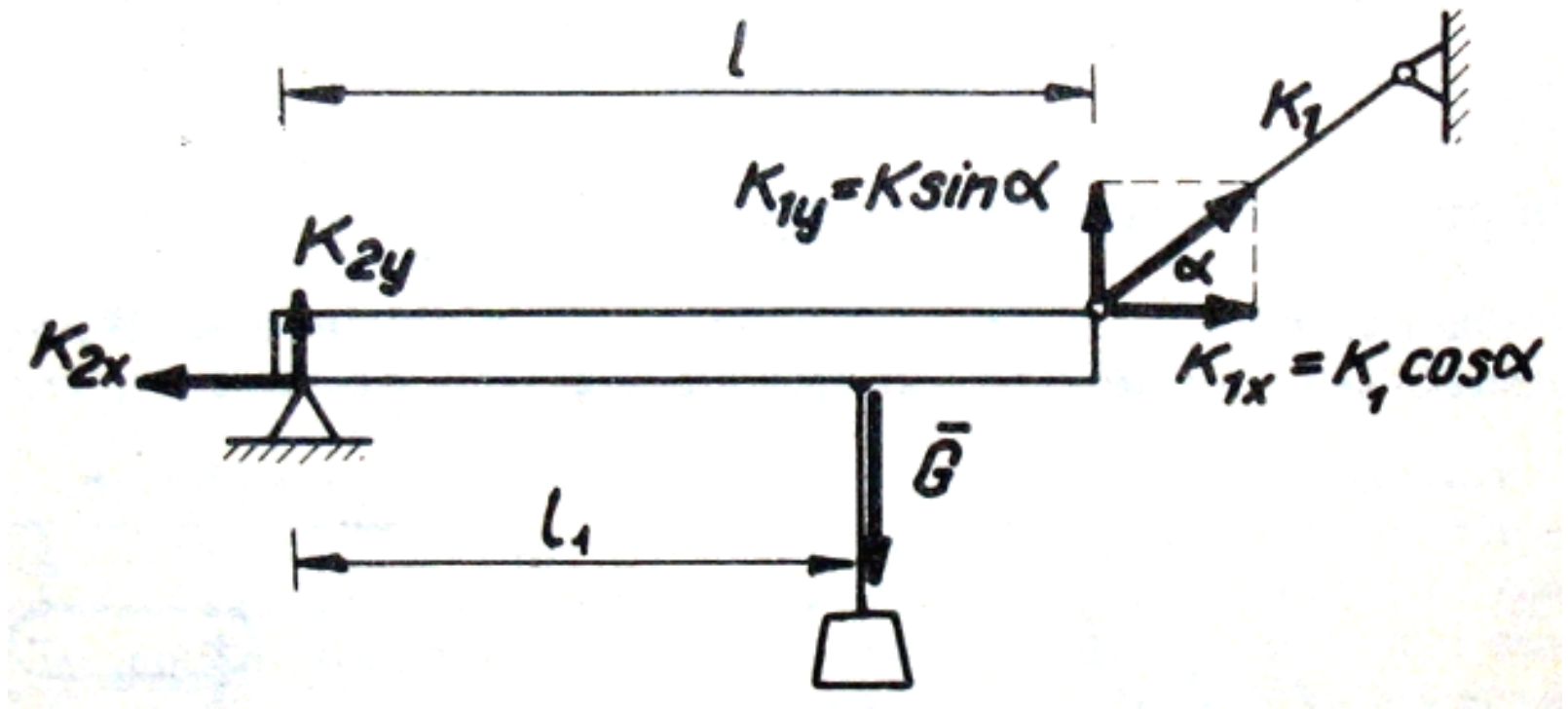
akkor is igaz, mert ha a testre ható erőknek vmely O pt.-ra vonatk. $\sum \vec{M}_i = 0$

akkor bárm. más O' pt.-ra vonatk. $\sum \vec{M}_i = 0$ is telj.

bizonyítás: HF



pl. :



milyen erővel nyomja a rúd a támaszt és milyen erővel húzza a kötelet?

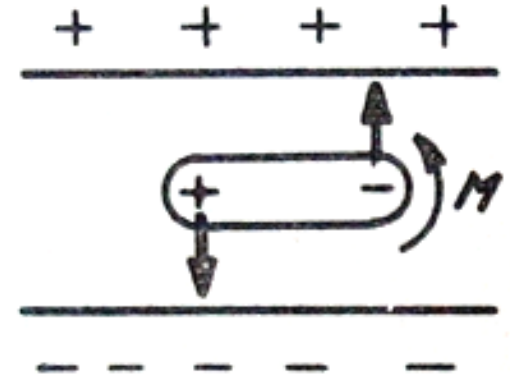
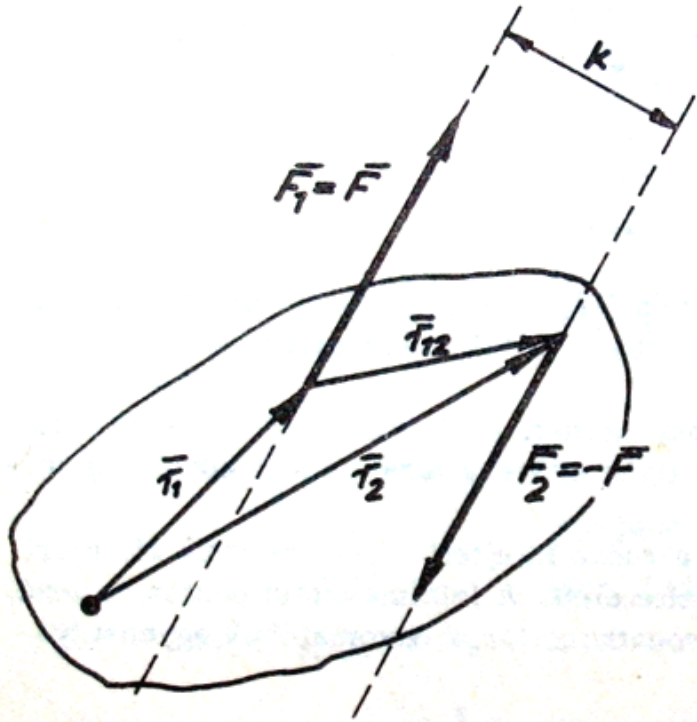
erőpár, koncentrált forgatónyomaték :

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \vec{F} \\ -\vec{F} \longleftarrow \end{array}$$

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

$\Sigma \vec{F} = 0 \longrightarrow$ csak forgatónyomatéka van (csak forgatni tud)

pl. :



az erőpár forgatónyomatéka $\forall$ pontra ugyanannyi:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_1) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{r}_{21} \times \vec{F}_1 = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_2 \end{aligned}$$

a nagysága : $M = |\vec{M}| = F \cdot k$ iránya: jobbkézszabály

másik pl. : mágnestű homogén mágn. térben elfordul

de a mágn.tűre ható forgatónyomatékokat nem lehet felbontani erőpárra: ha a mágnestűt kétévágjuk, akkor megint nulla eredő erőt és véges forgatónyomatékokat kapunk

a mágn. töltéseket nem lehet szétválasztani, a mágnestű $\forall$ kis darabjára is csak forgatónyomaték hat, nem pedig erő



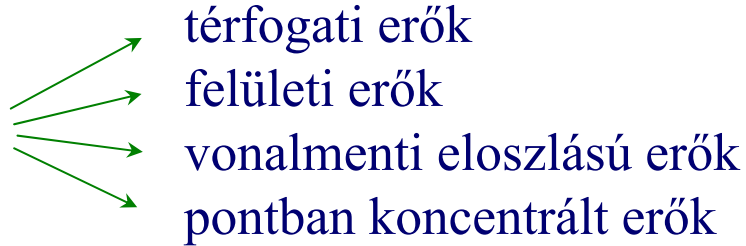
= **koncentrált forgatónyomaték**
(nem lehet erőpárra visszavezetni)

pl. a torziósszál is csak forgatónyomatékokat fejt ki a ráakasztott testre

erőrendszerek ekvivalens helyettesítése :

ismétlés:

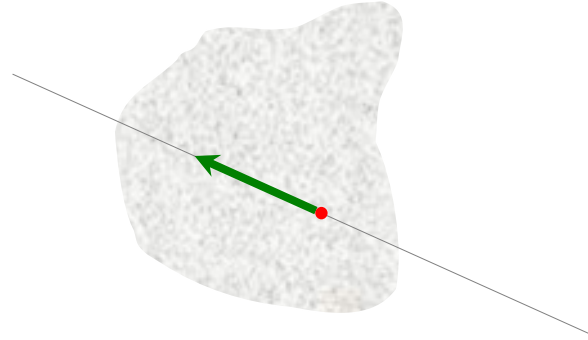
merev testre ható erők



- *térfogati erők*: a teljes térfogatban hatnak, a „terek” által kifejtett erők (gravitáció, elektrosztatikus, mágneses erők). Ezen belül a tömeggel arányos a **tömegerő** (grav. és nehézségi erők)
- *felületi erők*: rövid hatótáv., felületi érintkezés útján fejtik ki hatásukat (kényszererők, súrlódási erő, közegellenállás)
- *vonalmenti eloszlású erők*: igen kis felületen (vonal mentén) érintkező testek között (pl. kés éle)
- *pontban koncentrált erők*: igen kis felületen (egyetlen pontban) ható rövid hatótáv.-ú erők.

támadáspont: a testnek az a pontja, ahol a pontban koncentrált erő hat („érintkezik” a testtel)

hatásvonal: a támadásponton átmenő, a pontban koncentrált erő vektorral párhuzamos egyenes

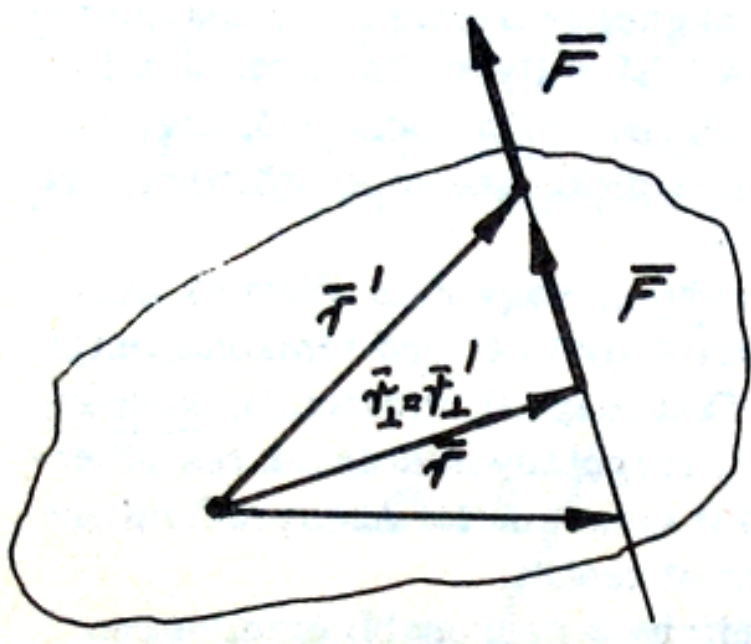


erőrendszerek redukálása, összetevése:

ekvivalens helyettesítés = a helyettesítő erőnek „ugyanaz a hatása”, az erő egyenlő az erőrendszer eredőjével és a forgatónyomatéka is ugyanaz → hatására a merev test ugyanúgy fog mozogni

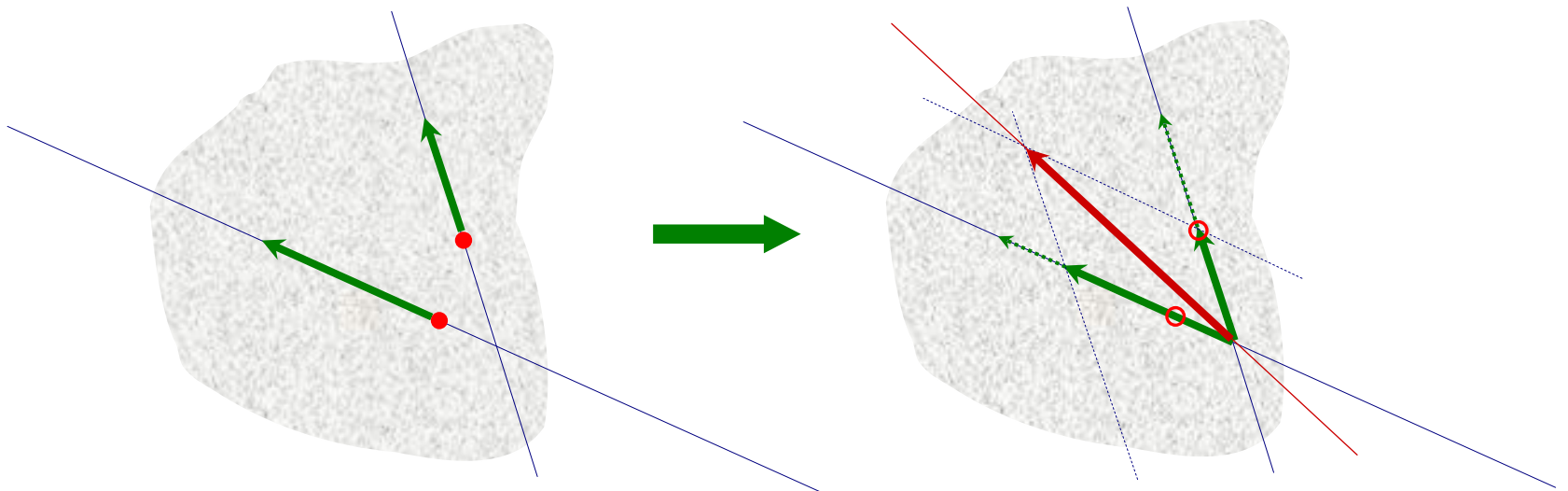
1. pontban koncentrált erő helyettesíthető ugyanolyan irányú, nagyságú és hatásvonalú erővel

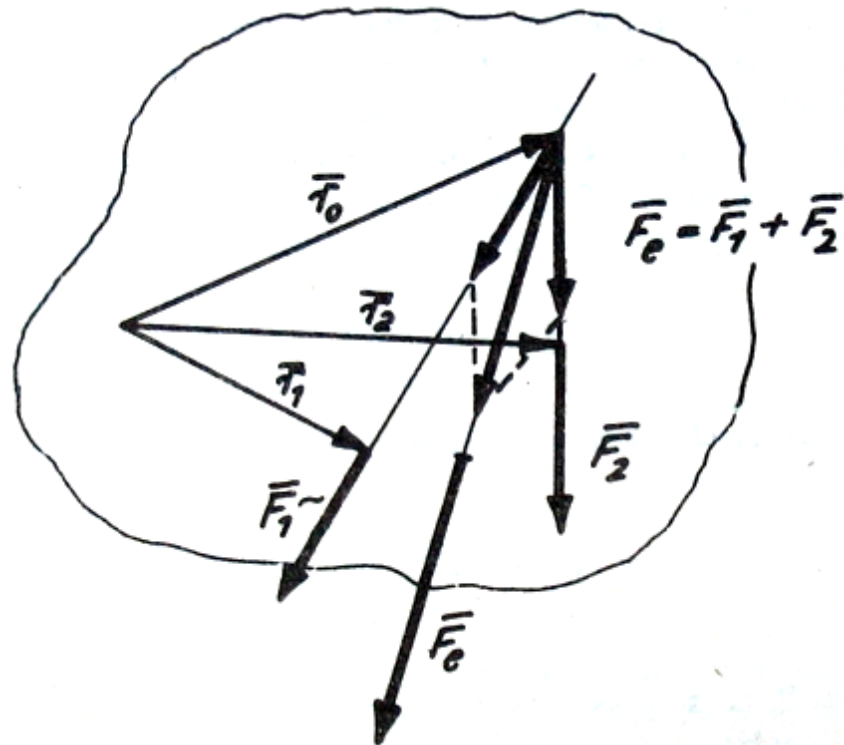
[hétköznapi nyelven: pontban koncentrált **erő a hatásvonala mentén eltolható**]
(nem változik a merev testre gyakorolt hatása: se a tkp. gyorsulása, sem a forgatónyomatéka)



$$\left. \begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r}_\perp \times \vec{F} \\ \vec{M}' &= \vec{r}' \times \vec{F} = \vec{r}'_\perp \times \vec{F} \\ \text{de } \vec{r}_\perp &= \vec{r}'_\perp \end{aligned} \right\} \vec{M} = \vec{M}'$$

2. 2 erő eredője: két koncentrált erő helyettesíthető egy olyan erővel, amely a 2 erő összege és amelynek támadáspontja a két eredeti erő hatásvonalainak metszéspontjába esik





$$\vec{M}' = \vec{r}_0 \times \vec{F}_e = \vec{r}_0 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r}_0 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_0 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

felhasználtuk az 1. szabályt

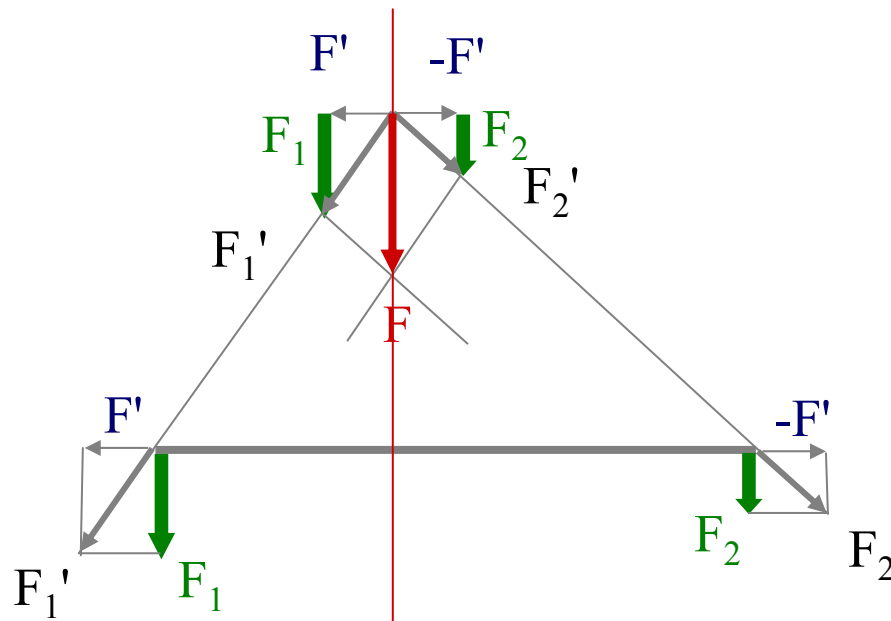
2/a. több erő eredője: a merev testre ható több erő helyettesíthető egyetlen pontban koncentrált erővel. Az eredő erő hatása ugyanaz, mint a többi erő együttes hatása

több erő eredőjét az előző pont szerint lehet megkereseni, lépésről lépésre, de ez az eljárás nem használható párhuzamos vagy kitérő hatásvonalú erők esetén

3. párhuzamos erők eredője:

ellentétes irányú, egyforma nagyságú, közös hatásvonalú erők eredője: 0

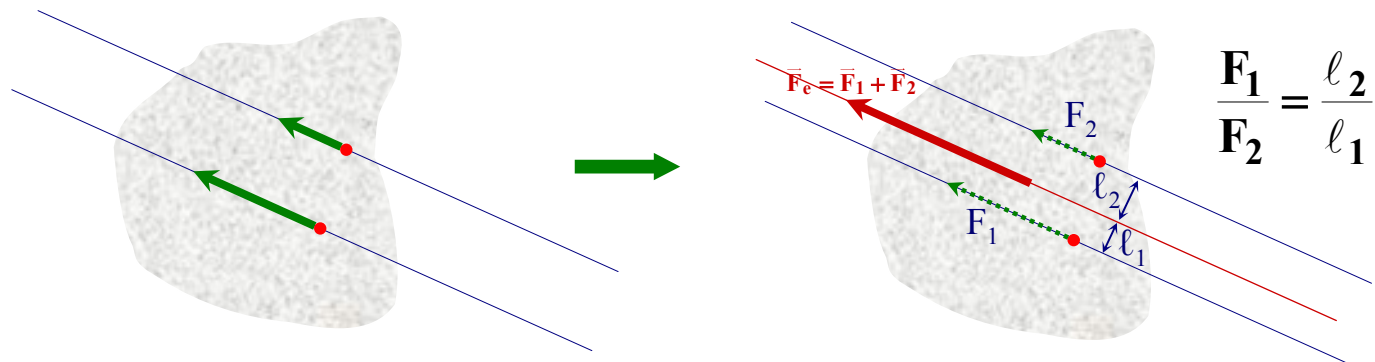
bármely erőrendszerhez hozzáadhatunk egy $\vec{F}'$ és $-\vec{F}'$ segéderőkből álló rendszert



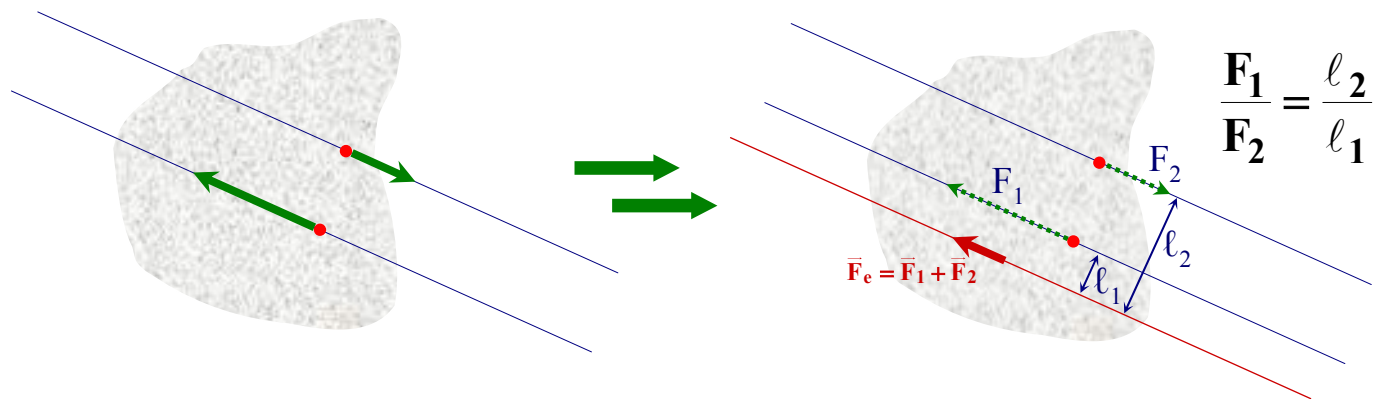
F_1' és F_2' eredőjének megszerkesztéséhez felhasználtuk a 2. szabályt

erőpár esetén nem használható !

párhuzamos, egyirányú erők eredője:



párhuzamos (nem közös hatásvonalú) ellentétes irányú erők eredője:

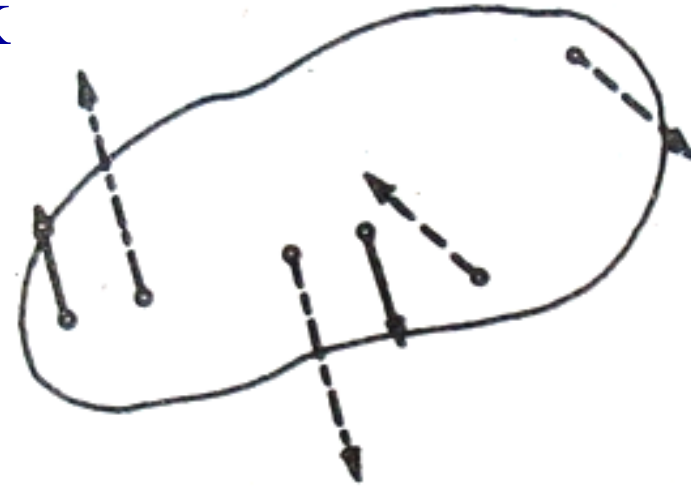


párhuzamos, nem közös hatásvonalú, ellentétes irányú, egyforma nagyságú erők:

erőpár

közös pontban ható, tetszőleges irányú erőkből álló erőrendszer mindig helyettesíthető egyetlen, pontban koncentrált erővel.

erőpárnak nincs ekv. eredője, csak másik erőpárral helyettesíthető :
ugyanabban a síkban fekvő erőpár, ugyanolyan forgásirányú és $k'F' = kF$ →

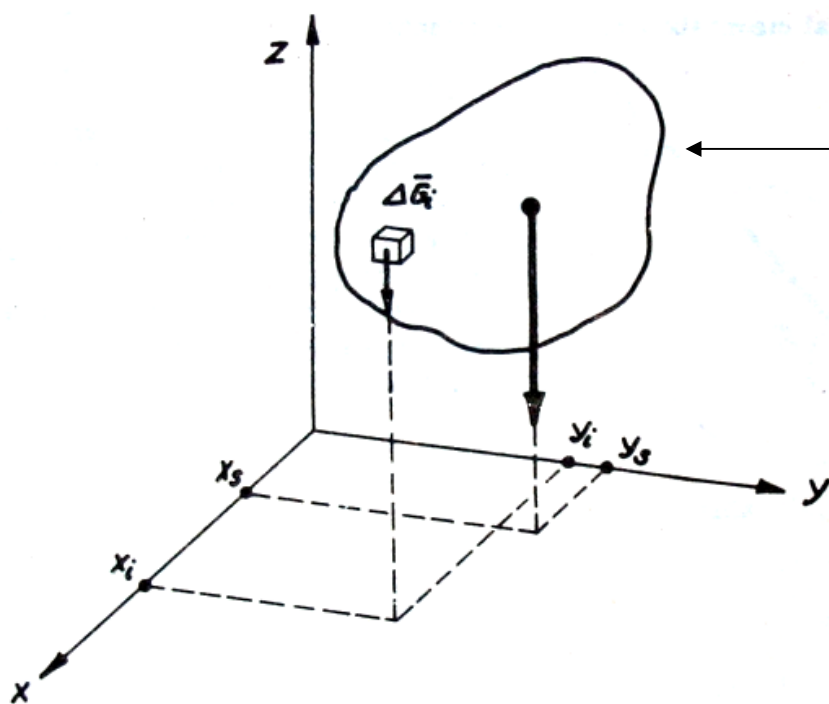


legáltalánosabb erőrendszer ekv. helyettesíthető egy **erőcsavar**-ral = 1 erőpár + 1 rá $\perp$ erő

nem közös pontban ható, tetszőleges irányú erőkből álló erőrendszer mindig helyettesíthető egyetlen erőcsavarral

súlypont :

keressük a test súlyának (térfogati erő!) ekv. eredőjét



vizsgált test

x és y teng.-k a vsz. síkban,
a z-teng. függőleges

a testet kis Δm_i darabokra bontjuk, az i-edik db súlyának forgatónyomatéka a 3 tengelyre :

$$M_{ix} = -\Delta m_i \cdot g \cdot y_i, \quad M_{iy} = \Delta m_i \cdot g \cdot x_i, \quad M_{iz} = 0$$

az eredő forgatónyomaték komponensei :

$$M_x = -g \cdot \Sigma \Delta m_i \cdot y_i, \quad M_y = g \cdot \Sigma \Delta m_i \cdot x_i, \quad M_z = 0$$

az ekv. eredő $= G = m \cdot g$, ennek forgatónyomatéka :

$$M_x = -g \cdot m \cdot y_s, \quad M_y = g \cdot m \cdot x_s, \quad M_z = 0$$

az ekv. eredő keresett támadáspontjának koord.-i

$$x_s = \frac{\sum x_i \cdot \Delta m_i}{m}, \quad y_s = \frac{\sum y_i \cdot \Delta m_i}{m}$$

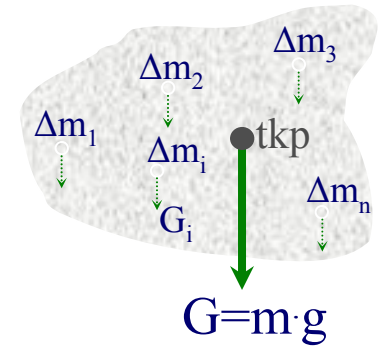
z_s határozatlan marad, ami természetes, mert az ekv. eredő hatásvonalának $\forall$ pt.-jába helyezhető

ha a testet más helyzetbe hozzuk, az ekv. eredő hatásvonala más lesz $\longrightarrow$ a testnek végtelen sok súlyvonala van

ezek egyetlen pt.-ban metszik egymást, a tkp.-ban = **súlypont**

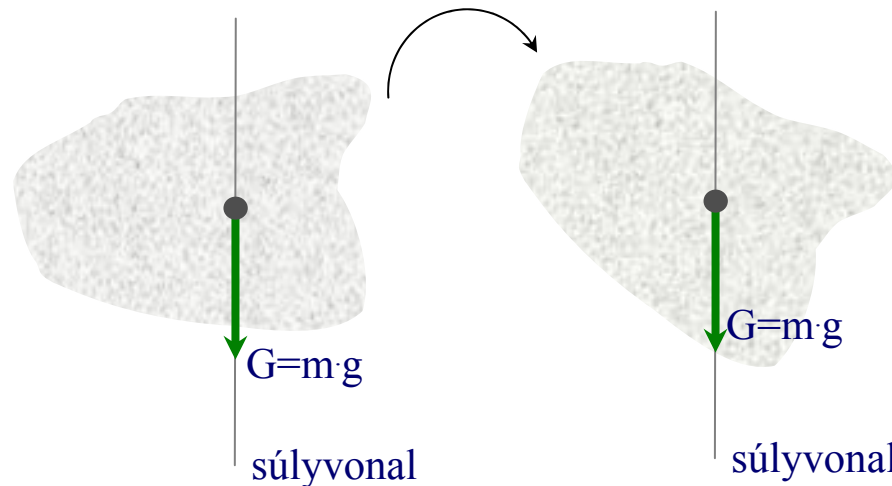
ha a test nem túl nagy, vagyis a térfogatán belül g nagysága és iránya mindenhol egyforma, akkor a grav. erő helyettesíthető a test tkp-ban ható egyetlen (pontban koncentrált) erővel:

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{g} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{g}$$



súlypont: az a pont, ahol a nehézségi erő koncentrált eredője támad (homogén grav. térben egybeesik a tkp-al)

súlyvonal: a pontban koncentrált nehézségi erő hatásvonala (mindig függőleges), átmegy a súlyponton:



súlypont meghatározása:

- kísérletileg
- szerkesztéssel

pl. : test (vonalzó) súlypt.-nak megkeresése felfüggesztéssel

tömegpont impulzusmomentuma : $\mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{v} \ (= \mathbf{r} \cdot \mathbf{p})$
= „forgási impulzus” $(\ \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \)$

perdülettel : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M} = 0$


 $\vec{L} = \text{állandó} = \text{perületmegmaradás}$

ha a tp. körpályán mozog: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v} = m \cdot \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = mr^2 \vec{\omega}$$

akkor a perdülettel : $\dot{\vec{L}} = mr^2 \dot{\vec{\beta}} = \vec{M}$

(analóg a tp. mozgását leíró N.II.-vel)

az mr^2 mennyiség „felel meg” a tömegnek:

 **tehetetlenségi nyomaték: $\Theta = mr^2$**

tengelyre vonatk.-va: $\mathbf{M}_z = \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\beta}_z$



perdülettel pontrendszerre :

tp.rdsz. perdülete = az egyes tp.-k perdületeinek
összege : $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$



az egyes tömegpontokra :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{M}_1 + \vec{M}_{12} + \vec{M}_{13} + \dots$$

$$\frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{M}_2 + \vec{M}_{21} + \vec{M}_{23} + \dots$$

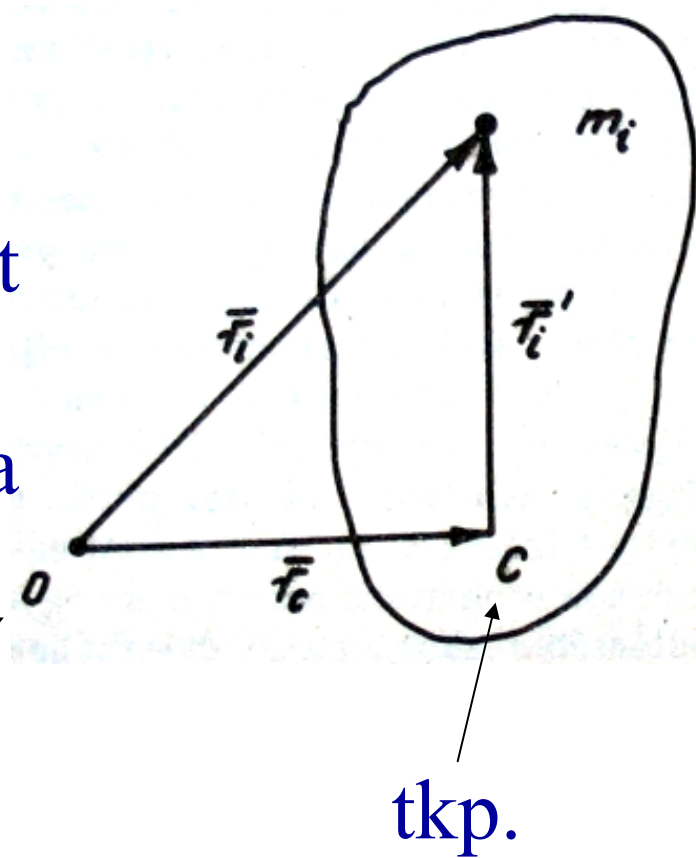
stb...

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{M}_1 + \vec{M}_{12} + \vec{M}_{13} + \dots \\ \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{M}_2 + \vec{M}_{21} + \vec{M}_{23} + \dots \\ \text{stb...} \end{array} \right\} \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i$$

pálya- és sajátperület :

a perdülettétel áttekinthetőbb alakba írható, ha a teljes perdületet két tag összegére bontjuk :

egyik a tkp.-ra vonatk. perdülete, a másik pedig a tkp.-nak az eredeti pontra vonatkozó perdülete



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i' \longrightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i'$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_i &= \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = m_i \cdot (\vec{r}_c + \vec{r}_i') \times (\vec{v}_c + \vec{v}_i') = \\ &= \vec{r}_c \times m_i \vec{v}_c + \vec{r}_c \times m_i \vec{v}_i' + m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_c + \underbrace{\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'} \end{aligned}$$

a tp.-nak a tkp.-ra vonatk. perdülete

a teljes perdület =

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \vec{r}_c \times \underbrace{\left(\sum m_i\right)}_m \vec{v}_c + \vec{r}_c \times \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i'}_0 + \underbrace{\left(\sum m_i \vec{r}_i'\right)}_0 \times \vec{v}_c + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

$$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$$

$$\frac{\sum m_i \vec{v}_i'}{m}, \quad \frac{\sum m_i \vec{r}_i'}{m}$$

a tkp. sebessége ill. helyvektora a tkp.-hoz képest

$$\vec{L} = \vec{r}_c \times m \cdot \vec{v}_c + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' = \vec{L}_{\text{pálya}} + \vec{L}_{\text{saját}}$$

a perdülettétel külön érv. mindkét tagra :

$$\frac{d\vec{L}_p}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_c \times m \vec{v}_c \right) = \underbrace{\vec{v}_c \times m \vec{v}_c}_0 + \vec{r}_c \times m \vec{a}_c = \vec{r}_c \times \sum \vec{F}_i$$

= a tkp.-ba, mint támadáspt.-ba képzelt külső erők forgatónyomatékaival

$$\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' \right) = \underbrace{\sum \vec{v}_i' \times m_i \vec{v}_i'}_0 + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i'$$

ha $F_{\text{külső, eredő}} \neq 0$, a tkp. gyorsulva mozog
 a_i' az i -edik tp.-nak a tkp.-hoz rögz. von.redsz.-beli
gyorsulása azaz a tkp.-al együtt haladó von.rdsz.-beli
gyorsulása $\longrightarrow$ tehetetlenségi erőket is figyelembe
kell venni : ezek a tp.-k tömegeivel arányosak és
egymással $\parallel$ -k, mint a nehézségi erő. Az ilyen
erőrdsz. ekv. eredője a tkp.-n átmenőhatásvonalú
koncentrált erő, aminek a tkp.-ra vonatk.
forgatónyomatéka 0, így

$$m_i \cdot \vec{a}_i' = \vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{i, \text{teh}} \quad \text{-t helyettesítve oda}$$

a teh. erők forgatónyomatékai összesen 0-t adnak, és
felt. h. a belső erők forgatónyomatékai is kiejtik egymást

$$\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' \right) = \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i' \quad \text{és} \quad m_i \cdot \vec{a}_i' = \vec{F}_i$$

így marad :

$$\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i$$

vagyis:

a bárhogy gyorsuló tkp.-ra vonatk. perdület vált.
gyorsaságát megadja a testre ható valódi külső
erőknek a tkp.-ra vonatk. eredő forgatónyomatéka

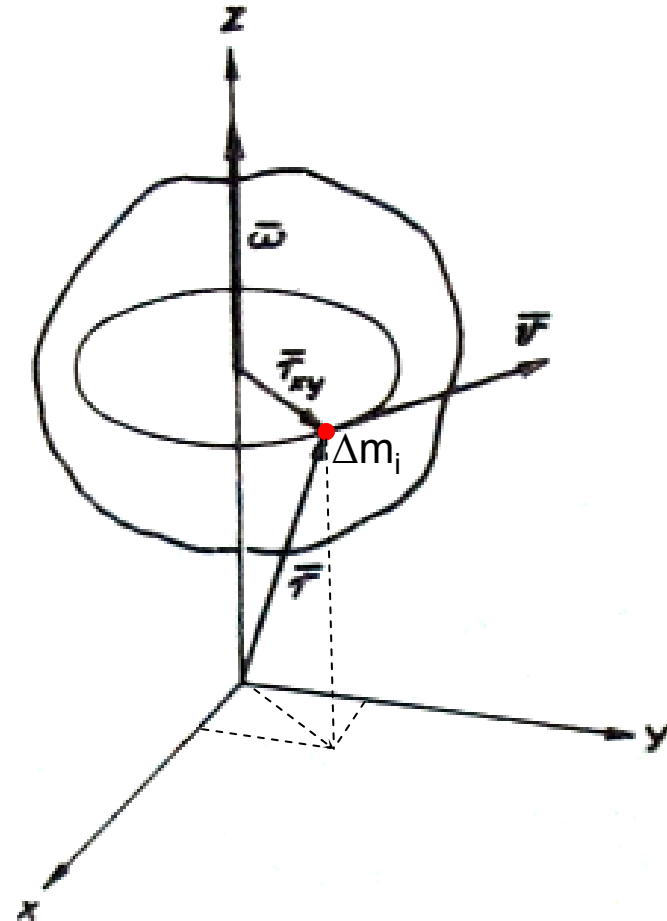
**merev test forgása rögzített teng. körül,
a forgómozgás alapegyenlete,
tehetetlenségi nyomaték :**

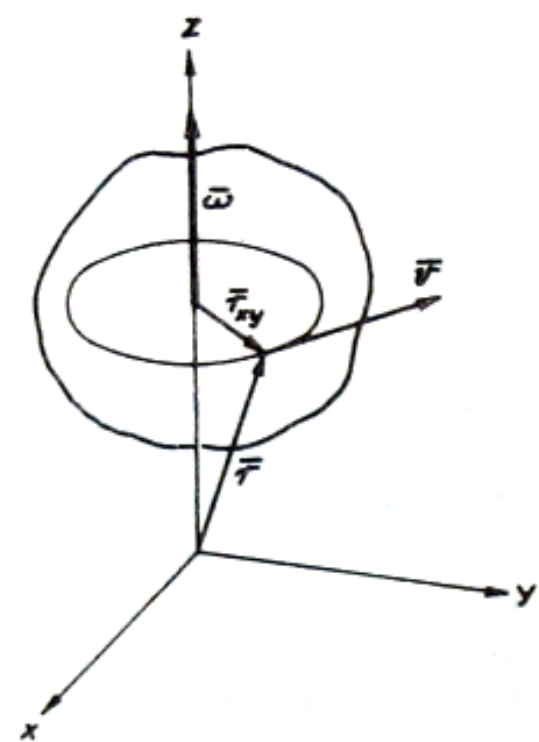
rögz. teng. $\longrightarrow$ elegendő a perdület teng.-irányú
komponensével foglalkozni

ez elég a merev test forgásának
leírásához, ha a teng. irányának
megtartásához szücs. külső
forgatónyomaték nem érdekel
minket $\longrightarrow$ pörgettyűk
(ld később)

legyen z-teng. = forgásteng.

$$\vec{L}_{i,z} = \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^2 \cdot \vec{\omega}$$





$$\vec{L}_{i,z} = \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^2 \cdot \vec{\omega}$$

nagysága :

$$|\vec{L}_{i,z}| = \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^2 \cdot |\vec{\omega}| = \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^2 \cdot \omega$$

skalárkomponense :

$$L_{i,z} = \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^2 \cdot \omega_z = \pm \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^2 \cdot \omega$$

+, ha $\vec{\omega}$ és z-teng. $\uparrow\uparrow$, és

-, ha $\vec{\omega}$ és z $\uparrow\downarrow$

a teljes perdület : $\vec{L}_z = \sum \vec{L}_{i,z} = \sum \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^2 \cdot \vec{\omega}$

vagy a kontinuum-modell szerint a felosztást végtelenül finomítva :

$$\vec{L}_z = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \left(\sum \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^2 \cdot \vec{\omega} \right) = \underbrace{\left(\lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^2 \right)}_{\Theta} \cdot \vec{\omega} = \Theta \cdot \vec{\omega}$$

$$\Theta = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum \Delta m_i \cdot r_{i,xy}^2 = \int r_{i,xy}^2 dm$$

$$\vec{L}_z = \Theta \cdot \vec{\omega}$$

$$L_z = \Theta \cdot \omega_z \quad \text{és} \quad |\vec{L}_z| = \Theta \cdot \omega$$

Θ a test tömegeloszlásától függ

kísérlet : tömör és üres karika legurulása a lejtőn

hasonlít a haladó mozg.-nál def. lendülethez :

$m \rightarrow$ tehetetlenség

$\Theta \rightarrow$ tehetetlenség a forgó mozgásra

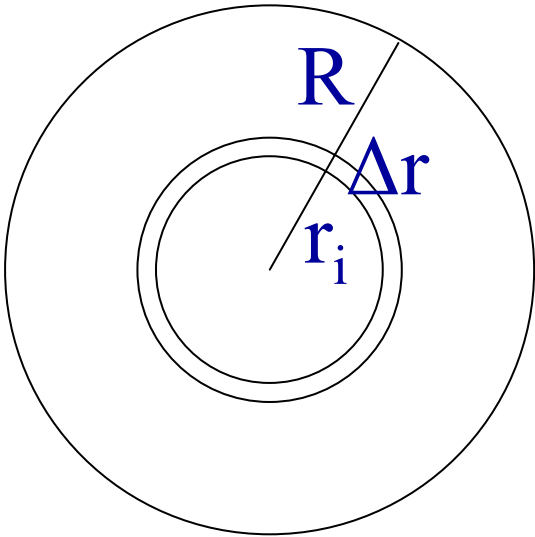
Θ = tehetetlenségi nyomaték
(z-teng.re vonatk. teh. nyomaték)

mivel merev test rögz. teng. körüli forg. esetén Θ = állandó

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\Theta \cdot \vec{\omega}) = \Theta \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \Theta \cdot \vec{\beta}$$

$$\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\beta} = \text{forgó mozg. alapegyenlete}$$

pl. : tömör korong tehetetlenségi nyomatéka :



$$\Theta = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 =$$

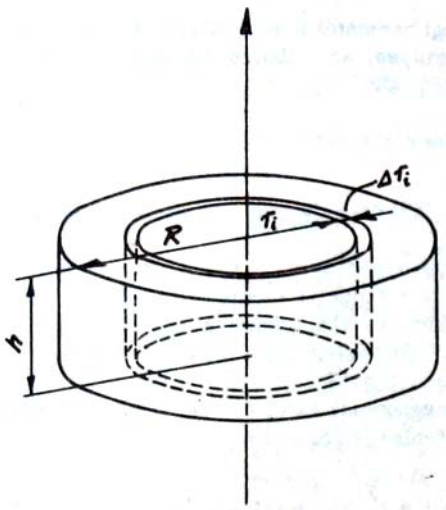
$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot R^2 \pi \cdot h$$

$$\Delta V = 2r\pi \cdot dr \cdot h \quad (=dV)$$

$$= \sum_i \rho V_i \cdot r_i^2 = \sum_i \rho \Delta V \cdot r_i^2 =$$

$$= \int_V \rho \cdot r^2 dV = \int_0^R \rho r^2 2r\pi h dr = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr =$$

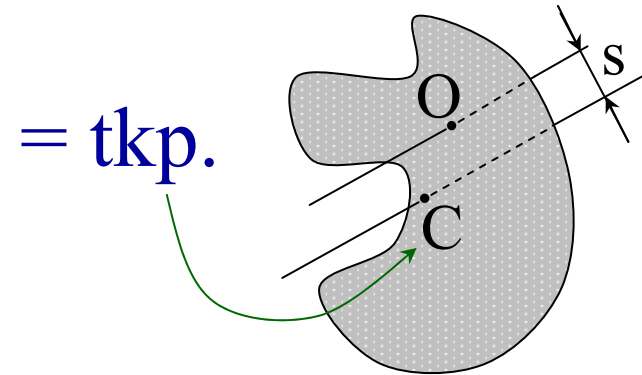
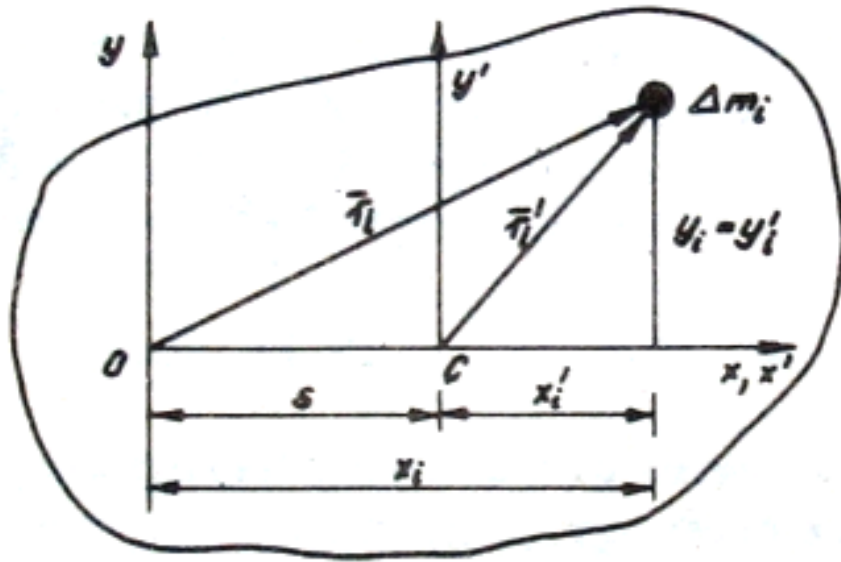
$$= \rho 2\pi h \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \rho 2\pi h \frac{R^4}{4} - 0 = \underbrace{\rho R^2 \pi h}_m \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$



üres gyűrű : $\Theta = mR^2$, gömb : $\frac{2}{5}mR^2$, ℓ hosszúságú
pálca kp.-jára : $\frac{1}{12}m\ell^2$ és végére $\frac{1}{3}m\ell^2$, stb...

Θ = a forgató hatással szembeni „ellenállás”,
 tehetlenség mértéke
 (mint a tömeg a mozgó hatással szembeni tehetlenség mértéke)

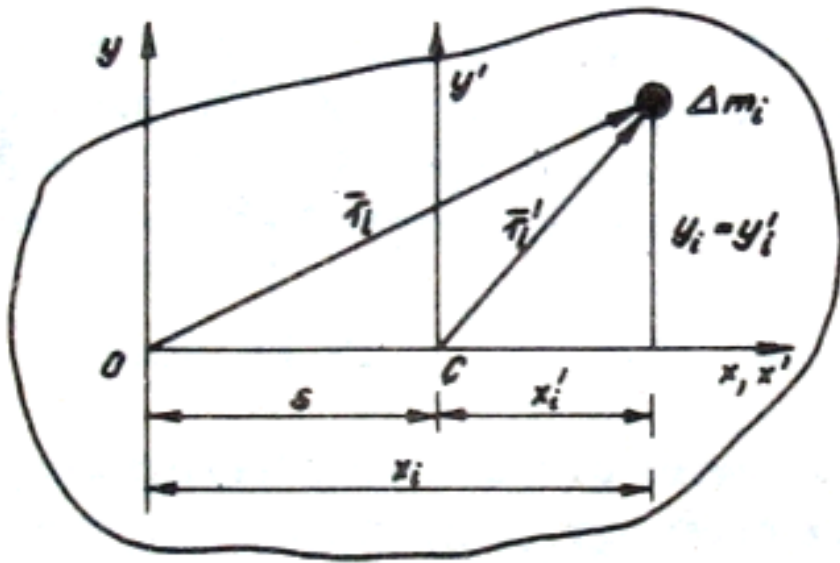
Steiner tétele : $\Theta_O = \Theta_C + m \cdot s^2$



a K-koord.-rdsz. z-teng. essen
 egybe az új forg.teng.-el, az x-
 teng.-e menjen át a tkp.-on (→ a
 forg.teng az ábra síkjára $\perp$)

a K' koord.-rdsz. origója pedig essen a tkp.-ba és teng.-i
 legyenek $\parallel$ a K teng.-ivel.

akkor $\forall \Delta m_i$ tömegpontjának az új és a régi tengelyektől mért
 távolságai között



$$\begin{aligned} r_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 = (x_i' + s)^2 + y_i'^2 = \\ &= x_i'^2 + y_i'^2 + 2sx_i' + s^2 = \\ &= r_i'^2 + 2sx_i' + s^2 \end{aligned}$$

összefüggés olvasható le



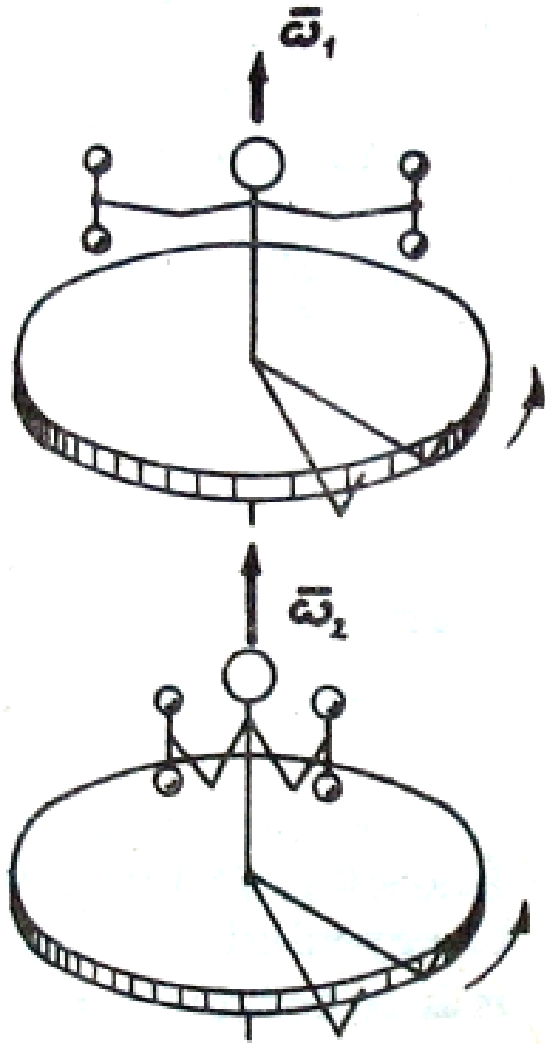
$$\begin{aligned} \underline{\Theta_O} &= \sum r_i^2 \cdot \Delta m_i = \sum (r_i'^2 + 2sx_i' + s^2) \cdot \Delta m_i = \\ &= \sum r_i'^2 \cdot \Delta m_i + 2s \cdot \sum x_i' \cdot \Delta m_i + s^2 \cdot \sum \Delta m_i = \\ &= \Theta_C + 0 + m \cdot s^2 = \underline{\Theta_C + m \cdot s^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\sum x_i' \cdot \Delta m_i}{m} = \text{a tkp.-nak a tkp.-tól mért x-koord.-ja} \longrightarrow \text{nulla}$$

$$\longrightarrow \Theta_O = \Theta_C + m \cdot s^2 \text{ igaz}$$

az impulzusmomentum megmaradása forgásnál :

kísérlet : forgózsámoly súlyzókkal $\leftrightarrow$ piruettező
korcsolyázó



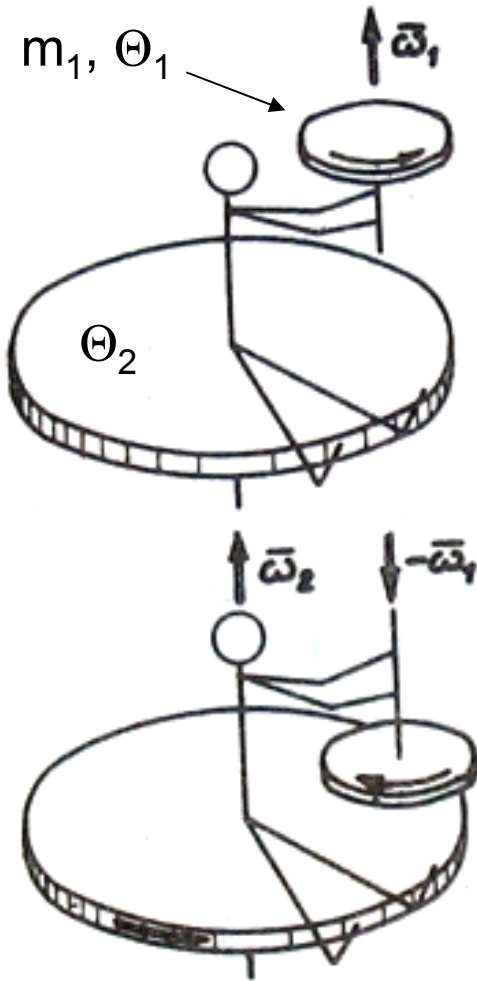
$$M = 0 \longrightarrow \Theta \cdot \omega = \text{áll.}$$

összehúzza a karjait $\longrightarrow \Theta$ csökken
 ω növekszik ! 

$$\omega_2 > \omega_1$$

és fordítva

kísérlet : forgózsámolyon ülő ember forgó bicikli-
kereket kap :



kezdetben nyugvó zsámoly + a keréknek
felfelé mutató perdületvektora van
→ továbbra is nyugalomban marad
de ha a kerék tengelyét 180° -al elfordítja, a
zsámoly fogásba jön
ha visszafordítja a kereket, megint megáll

értelmezés :

perdületmegmaradás :

$$L_{\text{kezd}} = \Theta_1 \omega_1 = L_{\text{vég}} =$$

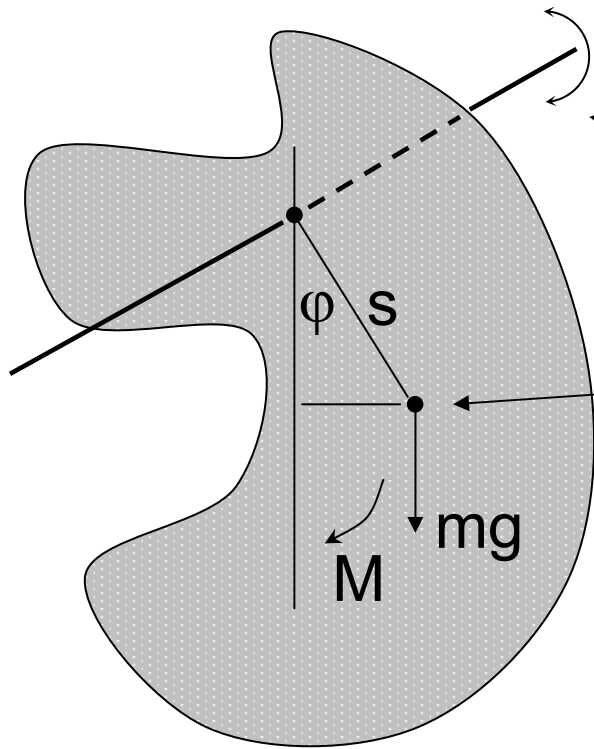
$$= (\Theta_2 + m_1 s^2) \vec{\omega}_2 - \Theta_1 (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2)$$

valamint : tornász a nyújtón, földön v. forgó-
zsámolyon ülő ember forgásba tudja hozni magát

fizikai inga :

korábban volt :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{m \cdot g \cdot s}}$$



erre a teng.-re a forgó mozgás alap-
egyenlete :

$$M = \Theta \cdot \beta$$

$$M = -mg \cdot s \cdot \sin \varphi$$

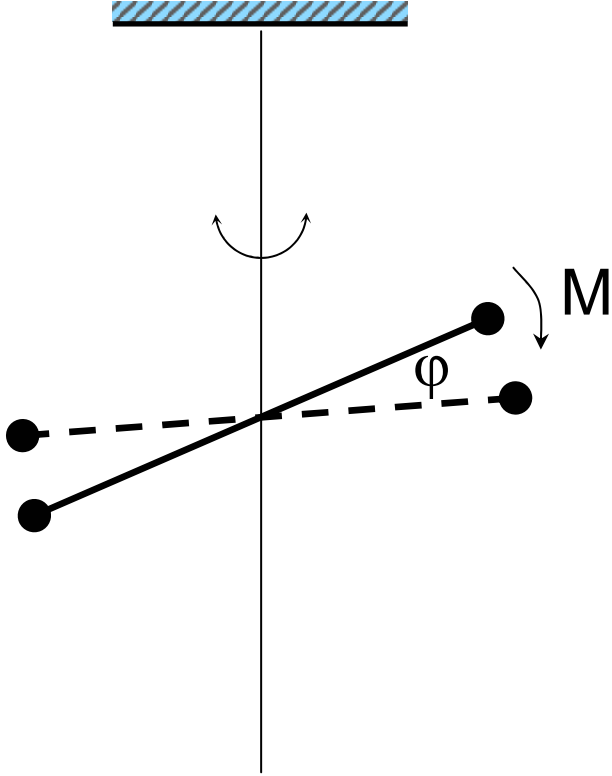
$$\Theta \cdot \beta = -mg \cdot s \cdot \sin \varphi \approx -mg \cdot s \cdot \varphi$$

$$\Theta \cdot \ddot{\varphi} = -mg \cdot s \cdot \varphi$$

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + \delta) \quad \text{ahol} \quad \omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot s}{\Theta}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{m \cdot g \cdot s}}$$

torziós inga :



$$M = -k \cdot \varphi$$

hasonlóan az előbbihez

↓

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{k}}$$

részletesebben : ld. a mechanika labor jegyzetben...

merev testek síkmozgása :

síkmozgás $\longrightarrow$ 3 szab. fok $\longrightarrow$ az elmozdulás 3 adattal megadható, pl. a szögelfordulással és a tkp.-nak ω -ra $\perp$ 2 elmozduláskomponensével :

$$m \cdot a_{\text{tkp},x} = F_x$$

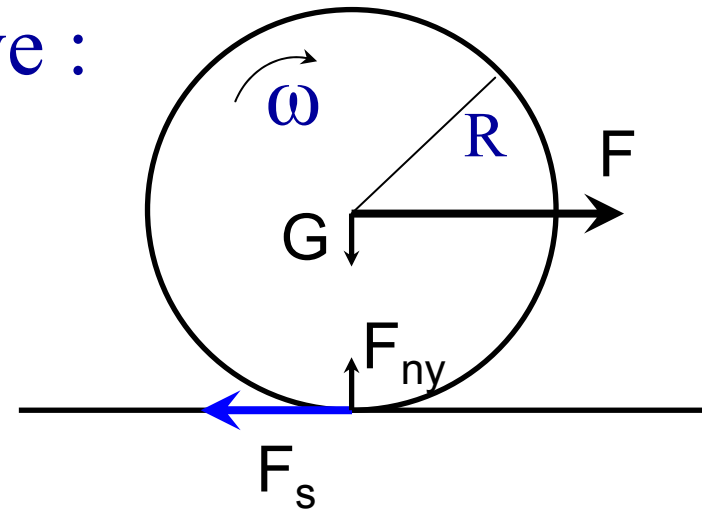
$$m \cdot a_{\text{tkp},y} = F_y$$

$$\Theta_C \cdot \beta_z = M_{C,z}$$

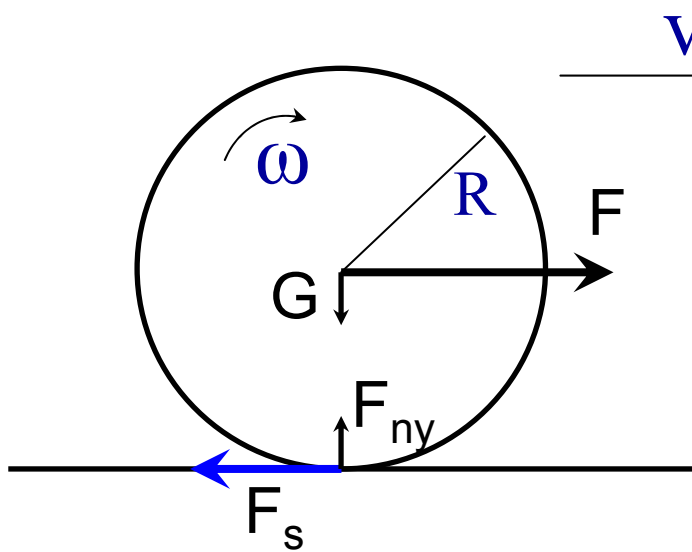
vagy pedig :

a pillanatnyi forgástengelyre nézve :

$$\Theta_O \cdot \beta_z = M_{O,z}$$



gördülés, gördülési ellenállás :



halad $\rightarrow$ N.II. :

$$F - F_s = m \cdot a$$

forog $\rightarrow$ forgó mozg. alapegy. :

$$F_s \cdot R = \Theta \cdot \beta$$

és :

$$a = R \cdot \beta$$

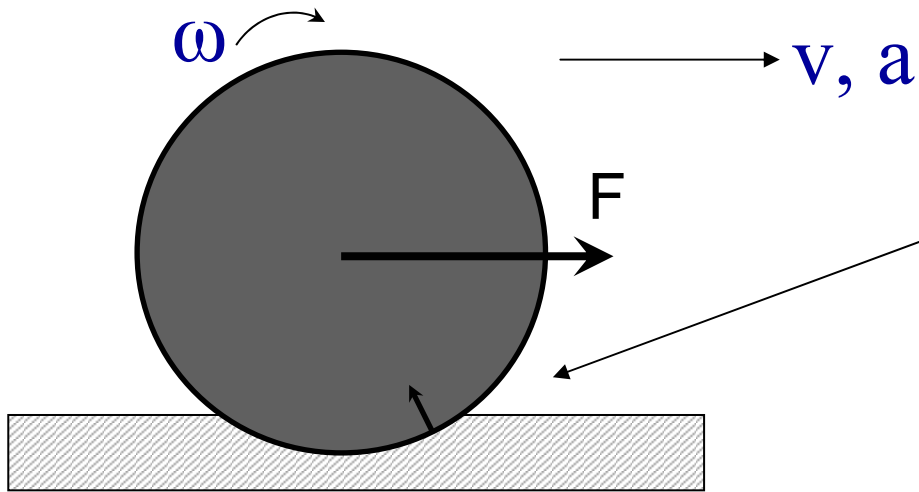
tapadás vagy csúszás

tiszta gördülés vagy csúszva gördülés

vagy pedig a pillanatnyi forgástengelyre nézve :

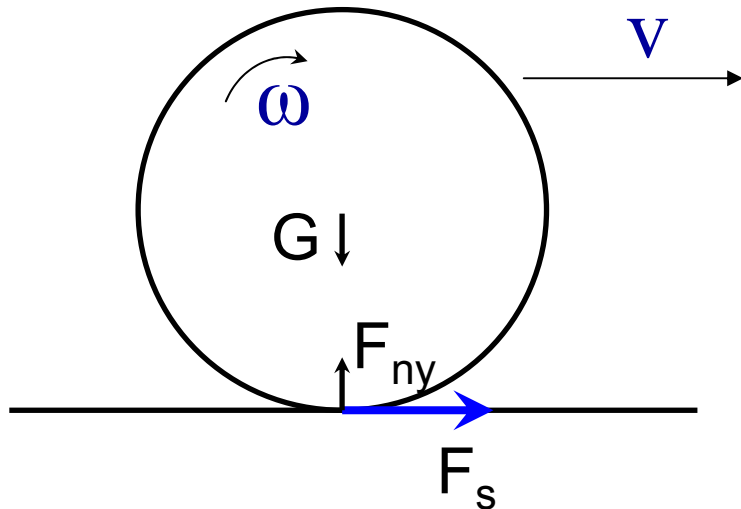
HF !

a gördülés a valóságban :



ott behorpad =
gördülési ellenállás

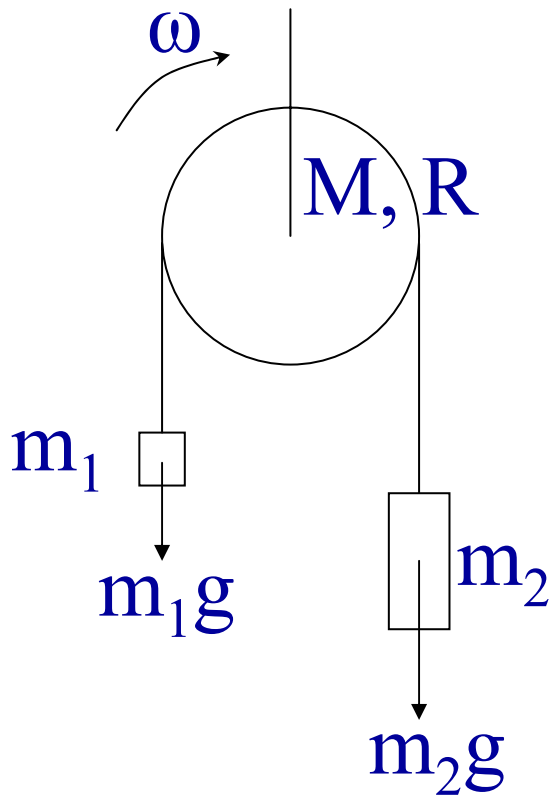
gépjárművek haladása :



a tapadási surlódási
erő viszi előre a kocsit !

pl. :

a) perdülettétel-lel:



z-teng.-re vonatk. teljes perdület=

$$L_z = m_1 R v_1 + m_2 R v_2 + \Theta \omega =$$

$$= (m_1 R^2 + m_2 R^2 + \Theta) \omega =$$

$$= (m_1 + m_2 + \Theta/R^2) \omega R^2$$

a külső erők forgatónyomatékának

z-komponense=

$$= M_z = m_1 g R - m_2 g R = (m_1 - m_2) g R$$

→ a perdülettétel szerint:

$$(m_1 - m_2) g R = (m_1 + m_2 + \Theta/R^2) \beta R^2$$

és $a = R\beta$ ↗



$$a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

ideális csiga esetén

$$a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{\Theta}{R^2}}$$

a) a dinamika alaptörvényével:

$$m_1 \text{ test: } m_1 a = m_1 g - F_{k1}$$

$$m_2 \text{ test: } m_2 a = -m_2 g + F_{k2}$$

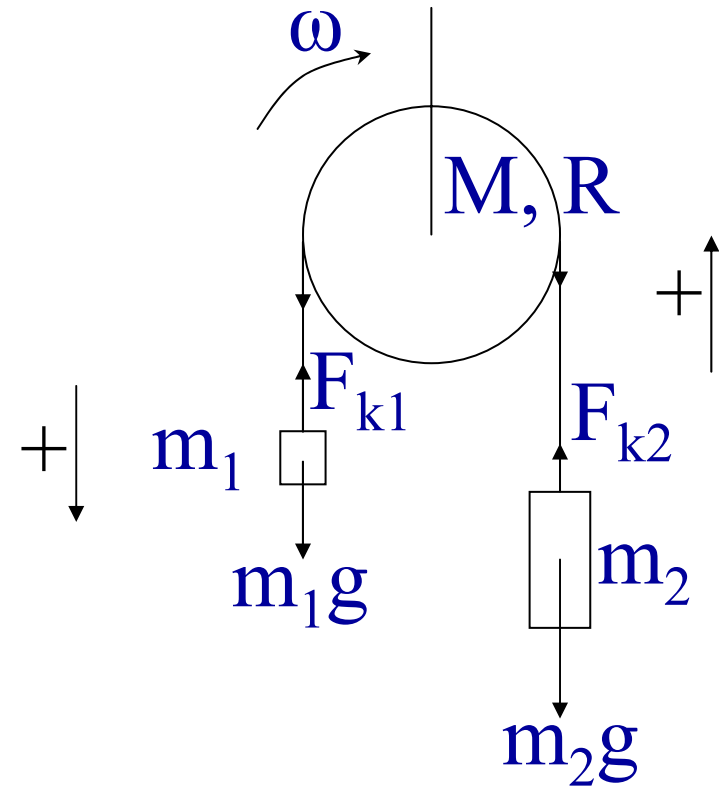
$$M \text{ test: } \Theta \beta = F_{k2} R - F_{k1} R$$

$$\text{kényszerfeltétel: } a = R \beta$$

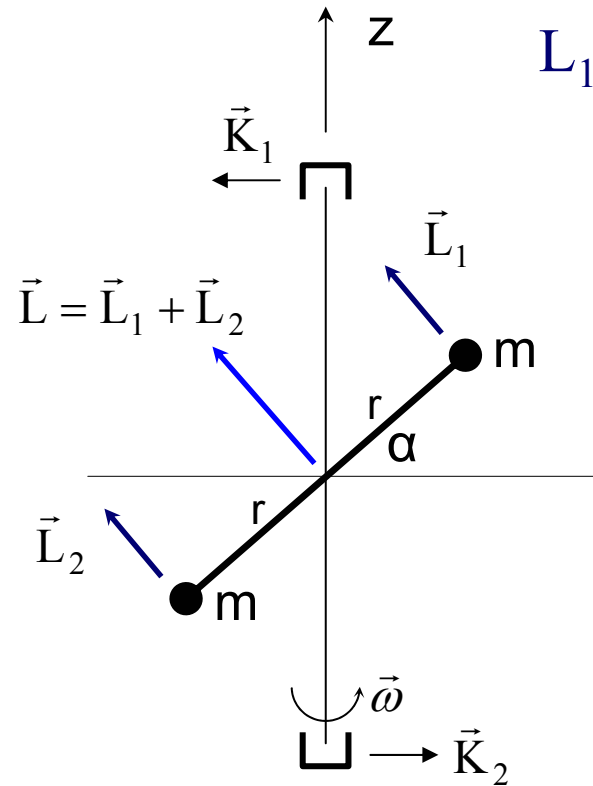


ugyanaz a megoldás adódik

ha ideális csiga $\longrightarrow F_{k1} = F_{k2}$



csapágy-kényszererők, szabad tengely :



$$L_1 = L_2 = |\vec{r}_1 \times \vec{p}_1| = |\vec{r}_2 \times \vec{p}_2| = m \cdot r \cdot v = mr^2 \cos \alpha \cdot \omega$$

$$L = L_1 + L_2$$

az $\vec{L}$ egy α szögű kúp mentén
körbejár

perdülettel szerint ehhez állandó
forgatónyomaték kell :

a z-teng. és a súlyzó által
megszabott síkra $\perp$ irányú

ilyen forgatónyomatékot (erőpárt) a csapágyak által
kifejtett kényszererők tudnak kifejteni

ha a súlyzó $\perp$ vagy $\parallel$ a teng.-el, akkor a kényszererők
eltűnnek $\longrightarrow$ **szabad tengelyek**
átmennek a test tkp.-ján

forgásszimmetrikus homogén test szimm.-teng.-i
egyúttal szabad tengelyek is
a szimm.teng. körül megpörgetett és eldobott test
repülés közben is megőrzi a tengelyirányát
pl. : diszkosz, megpörgetett pénzdarab

kísérlet: fonálon megpörgetett testek, lánc

pörgettyű :

egyetlen pt.-ja van rögzítve, e körül szabadon
elfordulhat $\forall$ irányban (a teng. függőleges)

erőmentes pörgettyű :

a testre ható külső erők forgatónyomatéka a forgáspnt.-
ra nézve 0

pl. : ha a testet a súlypt.-jában támasztjuk alá, vagy
ilyen a szabadon eső és forgó test is

ha egy erőmentes pörg.-t úgy indítunk el, h. $\omega \parallel$
vmelyik szabad teng.-el $\longrightarrow \omega$ is és a forg.teng. is
állandó lesz
stabil a forgás a legnagyobb és legkisebb tehetetlenségi
nyomatékú tengely körül;
labilis a forgás a középső tehetetlenségi nyomatékú tengely
körül

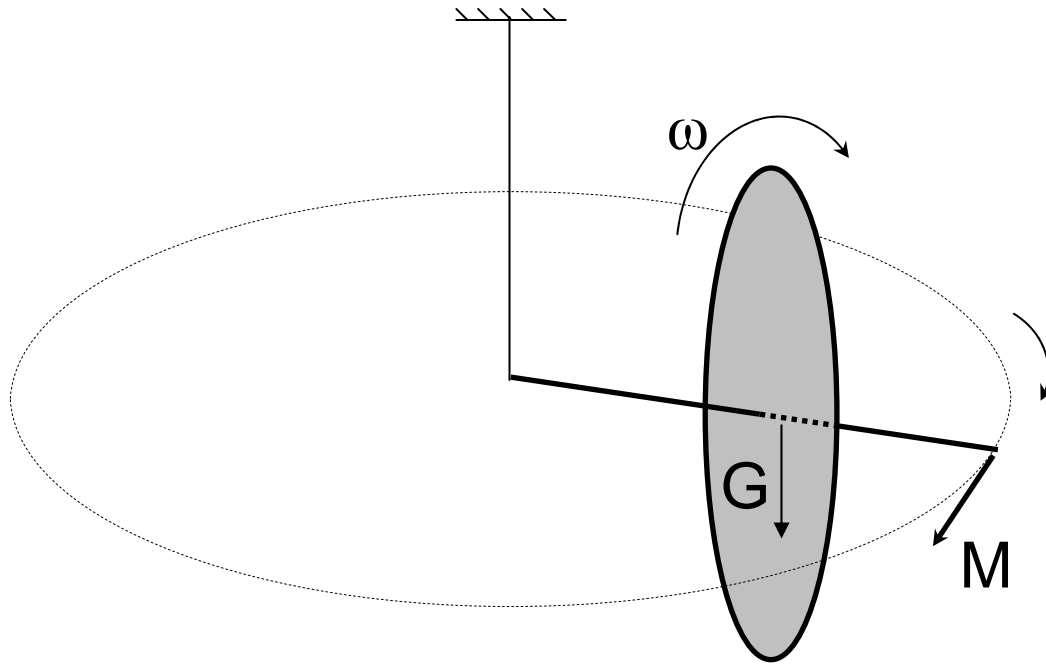
ha nem $\longrightarrow$ forgatónyomaték kellene az állandó
teng.-hez $\longrightarrow$ **a forg.teng. nem lesz állandó**

pörög a szimmetriatengelye körül (szabad tengely) és
a tengely is „körbejár” $\rightarrow$ **nutáció**

pörgettyű mozgása forgatónyomaték hatása alatt :

ha a pörgettyű nem a súlypontjában van alátámasztva :
a súlyerőnek forgatónyomatéka van 

kísérlet : megpörgetett biciklikerek madzagon



a tengely „körbejár”
a vsz. síkban



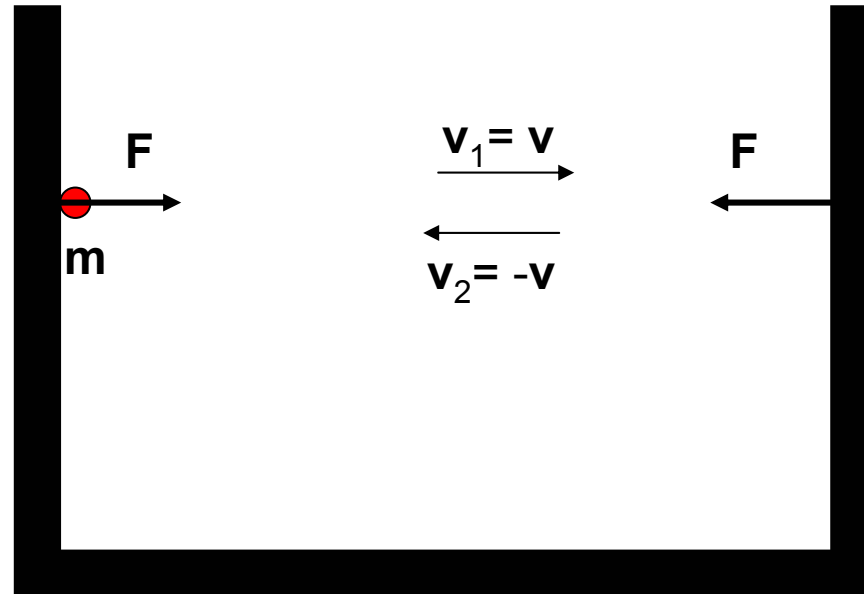
precesszió

pörgettyű alkalmazása: pl. pörgettyűs iránytű

a perdület megmaradása ütközésekben :

ld. a gyakorlaton...

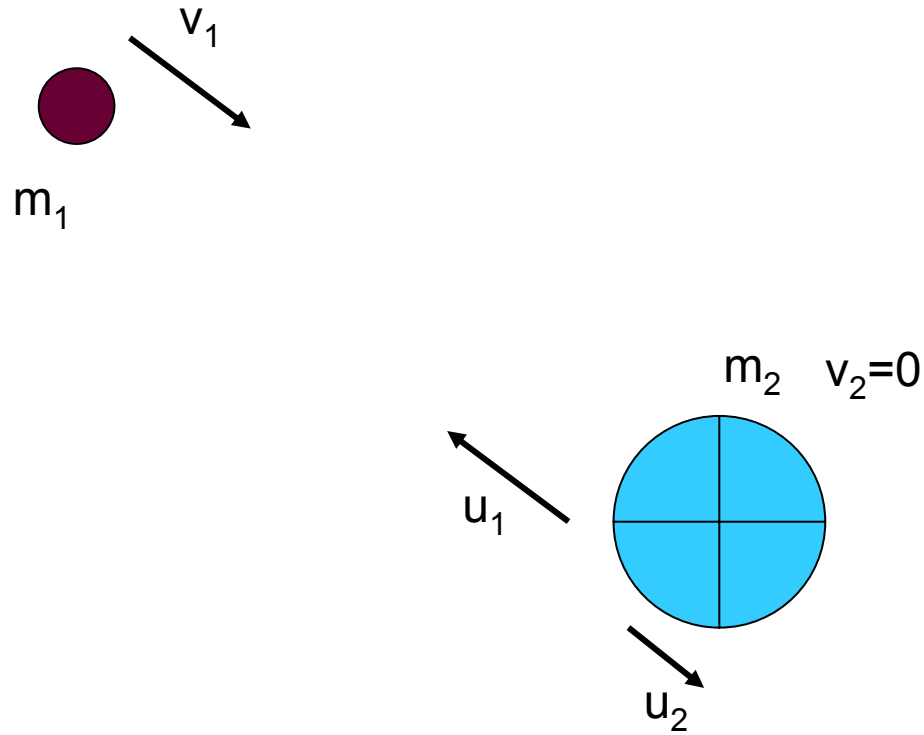
Golyó dobozban



Visszalépés: ←

Kilépés: Esc.

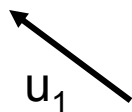
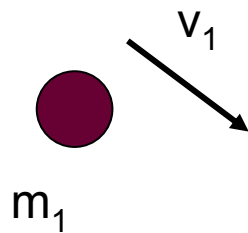
Rugalmas egyenes ütközés 1.



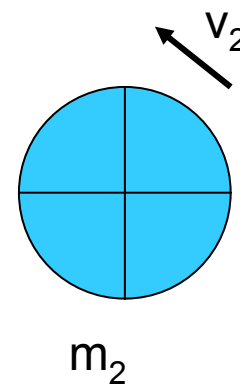
Visszalépés: ←

Kilépés: Esc.

Rugalmas egyenes ütközés 2.



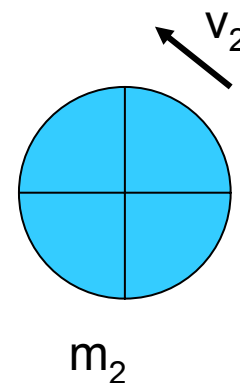
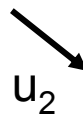
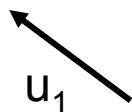
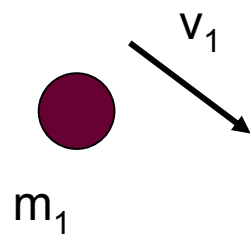
$$u_2 = 0$$



Visszalépés: ←

Kilépés: Esc.

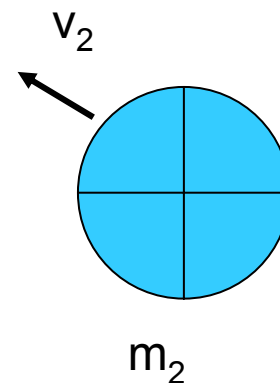
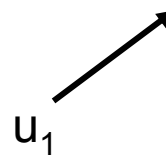
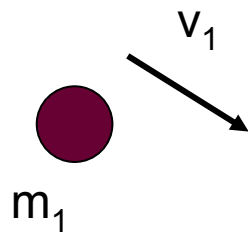
Rugalmas egyenes ütközés 3.



Visszalépés: ←

Kilépés: Esc.

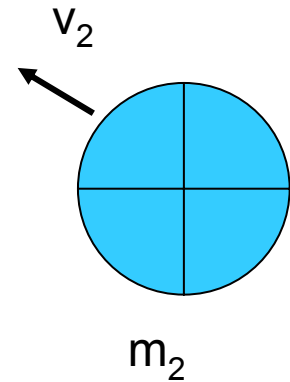
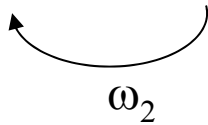
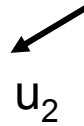
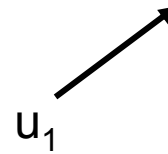
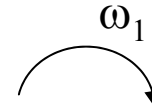
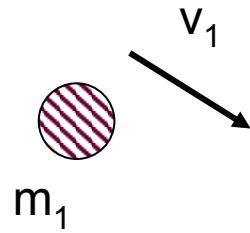
Rugalmas ferde ütközés 1.



Visszalépés: ←

Kilépés: Esc.

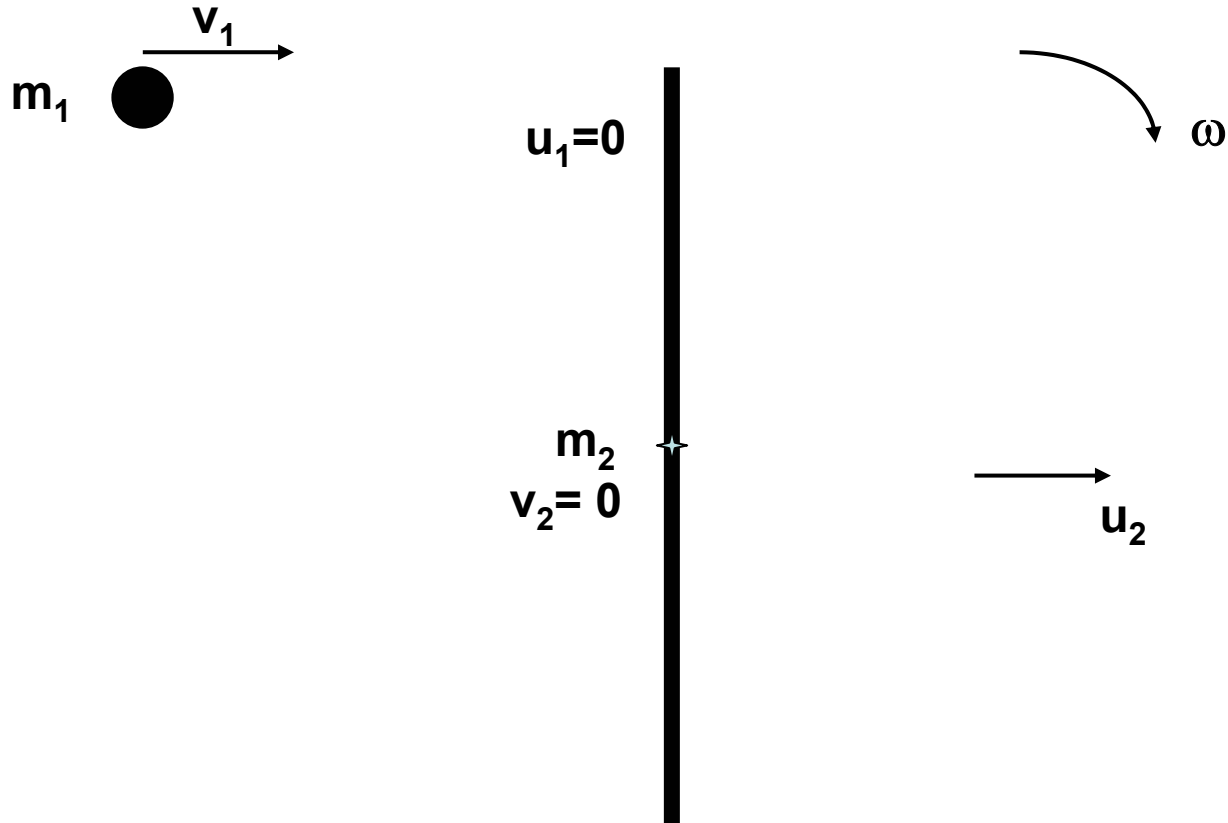
Rugalmas ferde ütközés 2.



Visszalépés: ←

Kilépés: Esc.

Golyó rugalmas ütközése rúddal



Visszalépés: ←

Kilépés: Esc.

munkatétel merev testekre :

$E_{\text{mozg}} = \sum E_{i,\text{mozg}} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 =$ a tp.-k mozg. energiáinak összege

$W_{\text{össz}} = \sum W_i = \sum \vec{F}_i \Delta \vec{r}_i =$ a tp.rdsz.-en végzett munkák összege

a munkatétel szerint $W_{\text{össz}} = E_{\text{vég}} - E_{\text{kezd}}$

csak hogy a belső erőkről ált.-ban nem tudunk semmit
de merev testeknél egyszerűsítő feltevéssel élhetünk :

ha a tp.-k között centrális erők hatnak  a belső erők összes munkája nulla, mert

- a tp.-k egymáshoz képest nem mozdulhatnak el;
- vagy ha az elmozdulhatnak, akkor az elmozd.-k ellentétes irányúak és egyforma nagyságúak, így az egyik által a másikon és a másik által az egyiken végzett munka egyenlő nagyságú, ellentétel előjelű
- vagy ha forognak, akkor mindkét munka nulla

tapasztalat szerint

a belső erők figyelmen kívül hagyhatók

a külső erőkre: $\forall$ erőt a támadáspt.-jának elmozd.-val számolunk

de sok erő esetén ez bonyolult

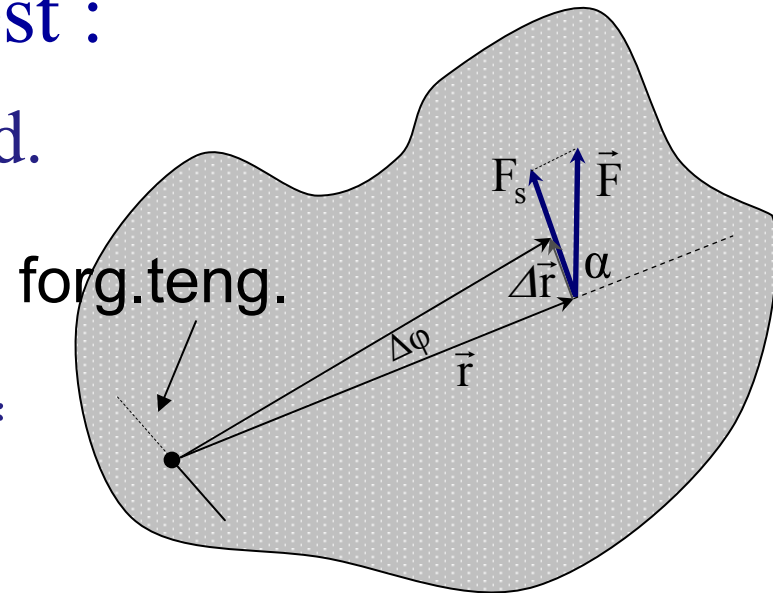


nézzük a rögz.teng. körül forgó merev testet :

rögz. teng. körül forgó merev test :

kis $\Delta\varphi$ forgásszöghöz tartozó elmozd.

$\Delta r = \Delta\varphi \cdot r_{\perp}$; az erő elmozd.-irányú komponense $= F_s = F \cdot \sin\alpha$, $\rightarrow$ a végzett munka $= \mathbf{W} = (\pm) F_s \cdot \Delta r = (\pm) F \cdot \sin\alpha \cdot \Delta\varphi \cdot r_{\perp} = (\pm) \underbrace{F \cdot r_{\perp} \cdot \sin\alpha}_{\mathbf{M}} \cdot \Delta\varphi = *$



$* = (\pm) \mathbf{M} \cdot \Delta\varphi$ ($\vec{r}$ a forg.t. $\forall$ pt.-jából húzott vektor, $r_{\perp}$ pedig a teng.-től $\perp$ húzott

$\uparrow$
+, ha $\vec{M}$ értelme megegyezik a szögelford.-val

de ez kifejezhető így is : $W = \vec{M} \cdot \Delta\vec{\varphi}$

vagy : $W = M_{\varphi} \cdot \Delta\varphi$, ahol M_{φ} az $\vec{M}$ -nak a szögseb.-irányú komponense

vagy vektorosan : $W = \Delta\vec{r} \cdot \vec{F} = (\Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{F} = \Delta\vec{\varphi} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \Delta\vec{\varphi} \cdot \vec{M}$

ha több erő hat a testre :

$$W = \sum W_i = \sum (\vec{M}_i \cdot \Delta\vec{\phi}) = \sum (\vec{M}_i) \cdot \Delta\vec{\phi} = \vec{M} \cdot \Delta\vec{\phi}$$

ált.-an, ha nem csak egy rögz. teng. körül fordulhat :

→ hanem halad és forog :

az $\vec{F}_i$ erő támadáspt.-jának elmozd.-t a korábbiaknak megf.-en felbontjuk a tkp. elmozd.-ra és az e körüli forgásra :

$$\Delta\vec{r}_i = \Delta\vec{r}_c + \Delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i'$$

a külső erők által végzett munka ekkor

$$\begin{aligned} W &= \sum \Delta\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = \sum \Delta\vec{r}_c \cdot \vec{F}_i + \sum (\Delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i') \cdot \vec{F}_i = \\ &= \Delta\vec{r}_c \cdot \sum \vec{F}_i + \sum \Delta\vec{\phi} (\vec{r}_i' \times \vec{F}_i) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_c + \vec{M}_c \cdot \Delta\vec{\phi} \end{aligned}$$

= a tkp elmozdítására fordított munka + a tkp körüli elfordításhoz szükséges munka

síkmozgás esetén : $W = F_s \cdot \Delta s_{\text{tkp}} + M_{\text{tkp},\phi} \cdot \Delta\phi$

a forgó mozgás kinetikus energiája :

rögz.teng. körüli forgásra :

egy $\forall$ pt.-jának sebessége $= v_i = r_{i\perp} \cdot \omega$

 (a forg.teng.-től $\perp$ húzott helyvektor)

$$E_{\text{mozg},i} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_{i\perp}^2 \omega^2$$

$$E_{\text{mozg, teljes}} = \sum E_{\text{mozg},i} = \frac{1}{2} \sum (\Delta m_i r_{i\perp}^2 \omega^2) = \frac{1}{2} \left(\sum \Delta m_i r_{i\perp}^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$$

$$\mathbf{E}_{\text{forg}} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2 \longleftrightarrow \mathbf{E}_m = \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}^2$$

pl. : gördülés = haladás + rögz. teng. körüli forgás :

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}_{\text{tkp}}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{\text{tkp}} \cdot \omega^2$$

a munkatétel így
$$\Delta E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2} \Theta \omega_2^2 - \frac{1}{2} \Theta \omega_1^2 = W = M_\varphi \cdot \Delta \varphi$$

alakba írható

általános elfordulásra :

a tömegpont elmozd.-t felbontjuk a tkp. elmozd.-ra és az e körüli forgásra : $\Delta \vec{r}_i = \Delta \vec{r}_c + \Delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_i' \longrightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp}'$

a tp. mozg. E-ja =

$$E_{\text{mozg},i} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i v_c^2 + \frac{1}{2} \Delta m_i r_{i\perp}'^2 \omega^2 + \vec{v}_c (\vec{\omega} \times \Delta m_i \vec{r}_{i\perp}')$$

$$E_{\text{mozg, teljes}} = \sum E_{\text{mozg},i} =$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum \Delta m_i \right)}_m v_c^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum \Delta m_i r_{i\perp}'^2 \right)}_{\Theta} \omega^2 + \vec{v}_c \left(\vec{\omega} \times \underbrace{\sum \Delta m_i \vec{r}_i'}_0 \right)$$

$\sum \Delta m_i \vec{r}_i' = m \vec{r}_c'$ a tkp.-ból a tkp.-ba mutató helyvektor = 0

$$E_{\text{mozg, teljes}} = \frac{1}{2} (\sum \Delta m_i) v_c^2 + \frac{1}{2} (\sum \Delta m_i r_{i\perp}^2) \omega^2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2$$

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}_{\text{tkp}}^2}_{\text{haladó mozg.}} + \underbrace{\frac{1}{2} \Theta_{\text{tkp}} \cdot \omega^2}_{\text{forgó mozg.}}$$

haladó mozg.

forgó mozg.

a munkatétel erre :

$$\Delta E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2} m v_{c2}^2 - \frac{1}{2} m v_{c1}^2 = W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_c \quad \left(= \left(\sum \vec{F}_i \right) \cdot \Delta \vec{r}_c \right)$$

a munkatétel az egészre :

a testre ható összes erő összes munkája megadja a test teljes kin. E-jának megvált.-t

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} m v_{c2}^2 - \frac{1}{2} m v_{c1}^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega_2^2 - \frac{1}{2} \Theta \omega_1^2 = W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_c + \vec{M}_c \Delta \vec{\varphi}$$

$$\Delta E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2} m v_{c2}^2 - \frac{1}{2} m v_{c1}^2 = W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_c \quad \text{és}$$

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} m v_{c2}^2 - \frac{1}{2} m v_{c1}^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega_2^2 - \frac{1}{2} \Theta \omega_1^2 = W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_c + \vec{M}_c \Delta \vec{\varphi}$$



$$\Delta E_{\text{forg}} = \frac{1}{2} \Theta \omega_2^2 - \frac{1}{2} \Theta \omega_1^2 = \vec{M}_c \Delta \vec{\varphi} \quad \left[\vec{M}_c = \sum \vec{M}_{c,i} \right]$$

vagyis a tkp.-ra vonatk. forgatónyomatékok munkája a tkp. körüli forgás kin. E-jának megvált.-t adja

egyszerű gépek :

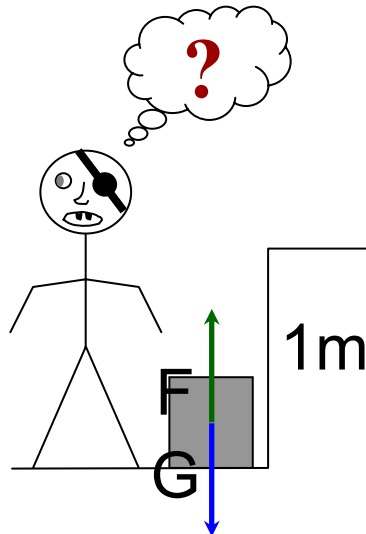
korábban már volt !

kisebber erővel (erőlködéssel) tudjuk ugyanazt a munkát elvégezni

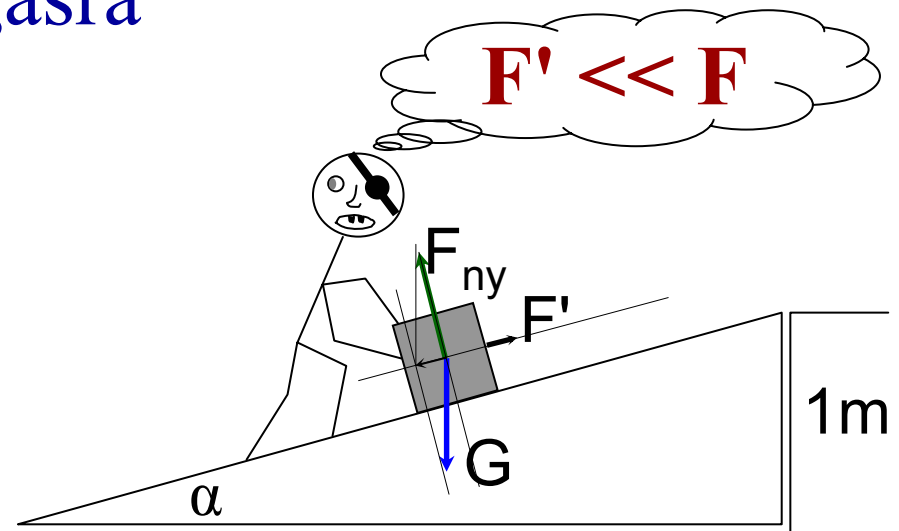
pl. : lejtő, emelő, ék, hengerkerék, csigák, stb ...

állócsiga, mozgócsiga, csigasor

pl. : egy 100 kg tömegű nagy ládát 1 ember egyedül akar feltenni 1 m magasra

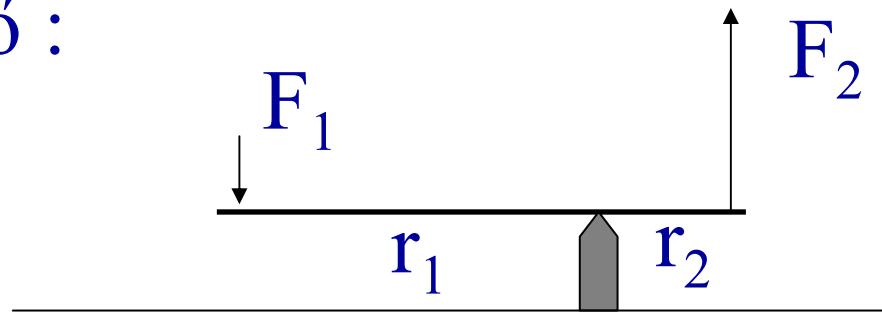


$$W = F \cdot s = mgh$$



$$W = F' \cdot s' = mgsin\alpha \cdot h/sin\alpha = mgh$$

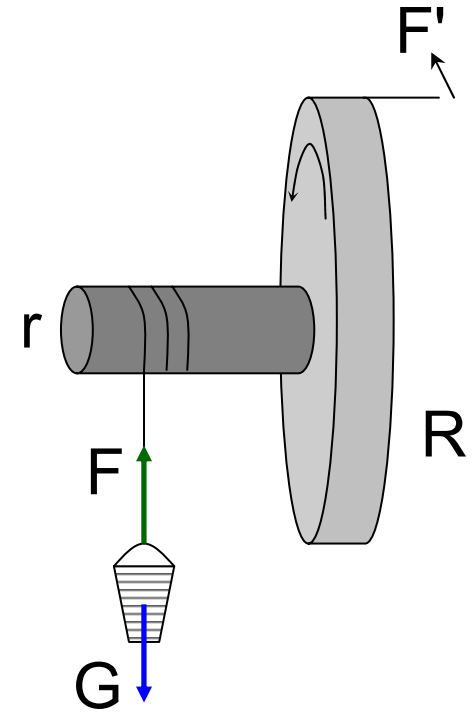
emelő :



$$M_1 = M_2$$
$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

→ $F_1 \ll F_2$

hengerkerék : (pl. kerekeskút)



ék : pl. : balta :

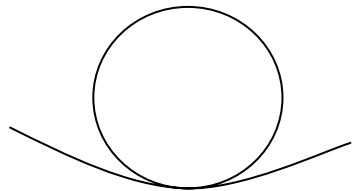
miért könnyebb nagy fatuskót
„fejjel lefele” széthasítani ?

csavar :

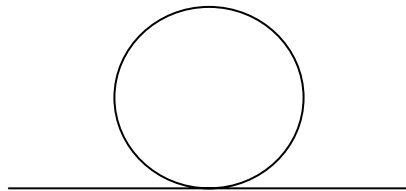
= speciális lejtő

$$F \cdot r = F' \cdot R \longrightarrow F' \ll F$$

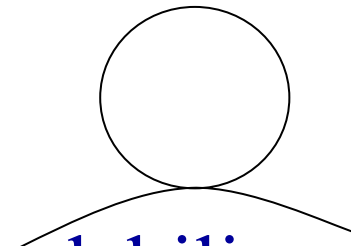
egyensúlyi helyzetek :



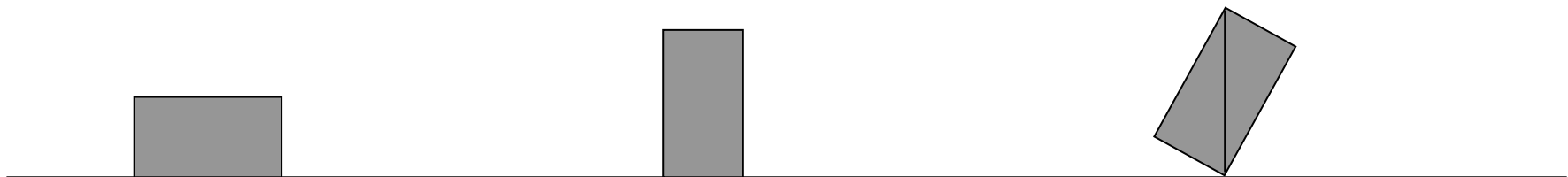
stabil



indifferens



labilis



metastabil

hogy lehet eldönteni, h. milyen egyensúlyi helyzet ? :
igen kicsit kimozdítjuk, és megnézzük, h. visszatér-e

→ **virtuális munka elve**

energiaminimumra törekszik

pl. : merre könnyebb feldönteni egy támlás széket ?
miért?